格子点の個数の小手技

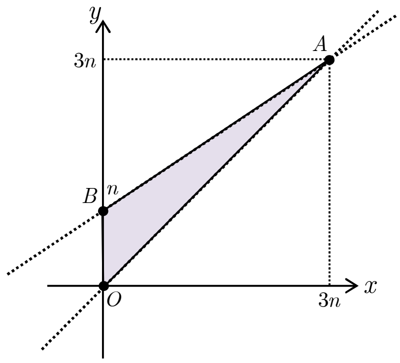
札幌旭丘高校　中村文則

○効率的な図形のスキャンニング法

<先　生> 今日は，座標平面上にある図形の周および内部の格子点の個数を求めてみよう。
<よしお> 格子点はxy座標平面上で，x座標とy座標がともに整数である点のことですね。
<まなぶ> 格子点はこうしてん求めるということだ。
<アリス> ころして…っていったんですか。
<かず子> それは私の気持ち。アリス，無視して。
<先　生> 問題を示そう。

> Ex）異なる３点を
> 　　$O(0,0)$，$A(3n,3n)$，$B(0,n)$
> とする。三角形OABの周および内部の格子点の個数を求めよ。ただし，nは自然数とする。

まず，グラフを書いてみよう。
<かず子> 右の図になります。



<アリス> この図から格子点を数えるのですね。
例えばy軸上にある線分OB上の点だとy座標は，０からnまでカウントすればいいから$n+1$個になります。
<まなぶ> 残りの格子点もアリスがやったように縦方向に要領よく数えたらいい。
<先　生> y軸に平行な直線上の格子点を探していくということだね。そのためにまず，直線OA，直線ABの方程式を求めておこうか。
<よしお> 直線OA，ABの方程式は，それぞれ，

$$y=x\ ,\quad y=\frac{2}{3}x+n$$

になります。
<かず子> それじゃあ，直線$x=1$上の点で調べてみるね。直線OA，ABとの交点の座標をそれぞれP，Qとすると，

$$P(1,1)\ ,\quad Q\left(1,n+\frac{2}{3}\right)$$

あれ，端点Qは格子点ではないわ。ということは，線分PQの端点Qの下にある点$(1,n)$が最後の点になる。だからこの場合は格子点の数はn個になります。でも先ほどアリスが求めた線分は端点Bも格子点だったから，線分PQの端点Qが格子点になったりならなかったりするのね。
<先　生> そのとおり。y軸に平行な直線を$x=m$（mは整数で$0\leqq m\leqq 3n$）とすると，

$$P(m,m)\ ,\quad Q\left(m,\frac{2m}{3}+n\right)\qquad\cdots(*)$$

となる。これからmの値がどんな場合に端点Qは格子点になるだろうか。
<アリス> 分母の３で分数が約分できればいいからmが３の倍数のときです。
<よしお> ということは，mを３で割ったときの余り０，１，２のグループで場合分けをすればいい。
だから，次の３つに分類できます。
　$m=3k\ ,\ 3k+1\ ,\ 3k+2$　（kは０以上の整数）
<かず子> やってみます。
$m=3k$のときは，(*)に代入すると，
　$P(3k,3k)$，$Q(3k,2k+n)$
だから，格子点の個数は，$(2k+n)-3k+1=-k+n+1$
<アリス> 次は，$m=3k+1$の場合ですね。

$$P(3k+1,3k+1)\ ,\quad Q\left(3k+1,2k+\frac{2}{3}+n\right)$$

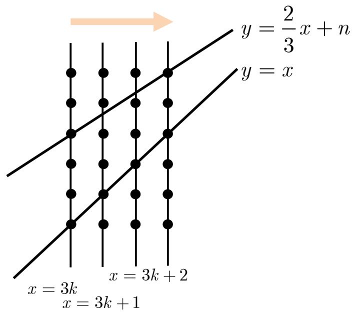
端点Qは格子点ではないからひとつ下の点の$(3k+1,2k+n)$が最後の格子点。だから個数は，

$$(2k+n)-(3k+1)+1=-k+n$$

３の倍数のときより１個少なくなるわ。

<まなぶ> そうすると同じように考えると，$m=3k+2$ のときも3で割り切れないから，格子点の個数は $-k+n$ だ。

<かず子> まなぶ，違うわ。このときは，$Q\left(3k+2, 2k+\dfrac{4}{3}+n\right)$



$\dfrac{4}{3}=1+\dfrac{1}{3}$ より，最後の格子点の y 座標は，$2k+n+1$ になるよ。
ものぐさな性格がこういったときにミスにつながるのね。

<まなぶ> 鬼の首を取ったような言い方だな。ということは格子点の個数は，

$$(2k+n+1)-(3k+2)+1=-k+n$$

なんだい。$m=3k+1$ のときと一緒じゃないか。

<先　生> では，格子点の個数をTとして，直線 $x=3k, 3k+1, 3k+2$ でスキャンニングしていこう。

<アリス> スキャンニングですか。確かに求め方はスキャナーの走査線(scan line)のような感じですね。

<かず子> Σ記号を使って求めた方が良さそうね。

$$T=\sum_{k=0}^{n}(-k+n+1)+\sum_{k=0}^{n}(-k+n)+\sum_{k=0}^{n}(-k+n)$$

これを計算すればいい。

<まなぶ> やっちゃったね。かず子。2つめと3つめの k の範囲が違うよ。走査線は，

$$x=3k+1,\ 3k+2$$

だから，$k=n$ とすると，点 B の x 座標を超えてしまうだろ。鬼の首，取り返したぞ。

<かず子> あんたの鬼っ子首なんていらないわよ。でも確かにそうね。そうすると，

$$T=\sum_{k=0}^{n}(-k+n+1)+\sum_{k=0}^{n-1}(-k+n)+\sum_{k=0}^{n-1}(-k+n)$$

ということです。

<よしお> 和の最後の k をすべて $n-1$ にしてしまうと計算が簡単になると思う。

$$\begin{aligned}T&=1+\sum_{k=0}^{n-1}(-k+n+1)+\sum_{k=0}^{n-1}(-k+n)+\sum_{k=0}^{n-1}(-k+n)\\&=1+\sum_{k=0}^{n-1}\{(-k+n+1)+2(-k+n)\}=1+\sum_{k=0}^{n-1}(-3k+3n+1)\end{aligned}$$

<アリス> 走査線3本を1つにして一気にスキャンするんですね。
ところでこの後の計算ですが，べき乗和の公式を用いるには最初の k の値は $k=1$ になるようにした方がいいのではないでしょうか。

<先　生> それでもできるけど，$\{-3k+3n+1\}$ はどんな数列か，考えてごらん。

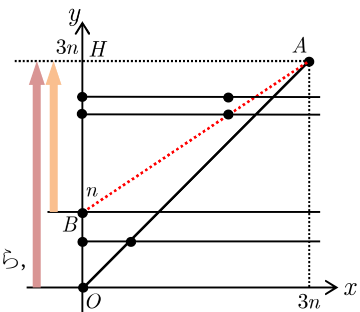
<まなぶ> そうか，等差数列だ。だから等差数列の和の公式が使える。初項は，$k=0$ のとき $3n+1$。
末項は $k=n-1$ のときで4。そして項数は n 項だから，

$$T=1+\frac{1}{2}n\{(3n+1)+4\}=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

<かず子> でも，先生。ちょっと思ったんですけど，y 軸に平行な直線のスキャンよりも，x 軸に平行なスキャンの方が，走査線は少なく済みますよね。

<アリス> 直線 AB の方程式は，x について解くと，$x=\dfrac{3}{2}(y-n)$ 。このようにみれば，2で割った余り0,1のグループの走査線でいいということですね。

<よしお> でも，そうやってスキャンすると，走査線の右端点は直線 $y=x$ 上の点だけど，
左端点は，最初は y 軸で，途中から直線 $x=\dfrac{3}{2}(y-n)$ 上の点になってしまう。



<先　生> そうだね。一長一短といったところだけど，先ほどの y 軸平行のスキャンの練習にもなるから挑戦してみようか。ただし，右端点を $y=x$ 上の点に固定するのではなく，左端点を y 軸上に固定するとして考えてみよう。

<まなぶ> 左端点が y 軸ってどういうこと。あっ，分かった。引けばいいんだ。点 A から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を H とすると，ΔOAH の格子点の個数から，ΔBAH の格子点の個数を引くということだ。

<アリス> そう考えると計算は楽になりますね。やってみます。
まず，ΔOAH のほうですけど，$y=k$ を走査線にすると，y 軸との交点は $P(0,k)$ で，直線 $y=x$ との交点

は，$Q(k,k)$ だから，格子点の個数は$(k+1)$ 個です。$k=0$ から$k=3n$ の範囲でスキャンすればいいから，

格子点の総数をT_1 とすると，

$$T_1=\sum_{k=0}^{3n}(k+1)=\frac{1}{2}(3n+1)\{1+(3n+1)\}=\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)=\frac{9}{2}n^2+\frac{9}{2}n+1$$

<かず子> 次は，$\triangle BAH$ の格子点ね。この場合の走査線は，$y=2k$ と$y=2k+1$ の 2 本になるけど，走査線の始点は $k=n$ になってちょっと面倒だわ。

<よしお> 予め，n を加えておいて，走査線を，$y=2k+n$，$y=(2k+1)+n$ とすればいいよ。

<かず子> そうか，そうすると，始点は$k=0$ にできる。

<まなぶ> ふっふっふ。かず子，$k=0$ は$y=x$ 上の点だから，引き過ぎだよ。直線$y=x$ 上の点は除かなければだめだ。だから，$k=1$ から始めるということになる。

<アリス> まなぶ，なんか嬉しそうですね。

<まなぶ> ぼくはいつだって，ハッピーだよ。まあ，アドバイスしたことだし，後半は僕が示そう。

$y=2k+n+1$ と直線AB との交点Q のx 座標は，

$$x=\frac{3}{2}\{(2k+n+1)-n\}=3k+\frac{3}{2}$$

このときは，点Q は直線AB 上の点ではないから，点Q の一つ手前の$3k+1$ を考える。これから格子点の個数は$3k+2$ 個です。

あとは走査線の終点だけど，$y=2k+n$ のときは$k=n$ で，$y=2k+n+1$ のときは，$k=n-1$ になる。

だから，格子点の総数T_2 は，

$$T_2=\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)$$

これは終点が$n-1$ になるようにしてまとめてスキャンすればいいな。

<かず子> でもそんなふうに無理やり変形しなくても，$y=3k+2$ を$y=3k-1$ としても 3 で割った余りは 2 になり，さらに終点は，$k=n$ にすることができる。

このとき，$x=\dfrac{3}{2}\{(2k+n-1)-n\}=3k-\dfrac{3}{2}$

だから，格子点の個数は，$3k-1$ 個。

$$T_2=\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=\sum_{k=1}^{n}(6k-1)=\frac{1}{2}n\{5+(6n-1)\}=3n^2+2n$$

できたわ。

<アリス> かず子も嬉しそうですね。二人で何かいいことあったんですか。

<かず子> ない，ない，ない。さっさと格子点の総数T を求めるわ。

$$T=T_1-T_2=\left(\frac{9}{2}n^2+\frac{9}{2}n+1\right)-\left(3n^2+2n\right)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

<まなぶ> どうにかできた。でも最初の方法より面倒になってしまった。この方法で解く必要はあったのだろうか。

先生，これ例えば，走査線を直線AB に平行な直線にするというのはありかな。そうすると，走査線の左端点は y 軸上で右端点は直線AB 上になる。

<かず子> 斜めに切るということね。何事も斜めにみてしまうまなぶらしい発想ね。

<先　生> その言葉のあとではちょっと言いにくいのだけど，実は次の思考法としてその考えを提案するつもりだった。

<かず子> 先生の場合は複数ある思考法から 1 つの思考法を選んでいます。でも，まなぶはどうしたらラクをできるかというルーズで単純な動機から出発して思考法を決めている訳でまったく別物ですね。

<まなぶ> ぼくを出汁に会話するの止めてくれない。とにかくやってみようよ。

走査線は，$y=x+k$ で，$k=0$ から$k=n$ までスキャンすればいい。

走査線の左端点の座標は$P(0,k)$ 。

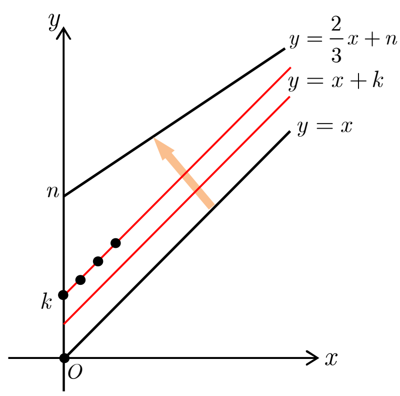
右端点Q は，$y=x+k$ と$y=\dfrac{2}{3}x+n$ の交点だから，

$x+k=\dfrac{2}{3}x+n$ より，$x=-3k+3n$

$\therefore\quad Q(-3k+3n,-2k+3n)$

格子点の個数は$y=x+k$ の傾きは 1 よりx 座標とy 座標の個数は同じ。

だからx 座標だけみればいい。



すなわち，$(-3k+3n+1)$ 個。よって格子点の総数は，

$$T=\sum_{k=0}^{n}(-3k+3n+1)=\frac{1}{2}(n+1)\{(3n+1)+1\}=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

なんだ。これが一番簡単じゃないか。

同じように考えると，直線ABに平行な直線のスキャンもできるから，先生，きっと次はそれでしょ。

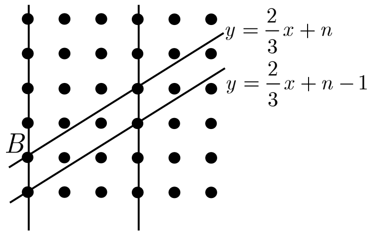
<先　生> うっ，その通りなんだけど，まなぶに先取りして言われるとやっぱり同じレベルの思考なんだと思われてしまう。

<アリス> 先生，そんなことはありません。先生は先生です。

<まなぶ> あのー，アリス，ぼくのフォローにはまったくなっていないんだけど。

<よしお> でも直線OAに平行な直線上の格子点の個数は簡単に求められたけど，直線ABに平行な直線上の格子点の個数はそんなに簡単ではない。例えば，線分ABについてみると，$A\left(3n,3n\right)$，$B(0,n)$ ですが，これから，単純にx座標や，y座標の個数を求めても駄目ですよね。

<まなぶ> そういうときは実際に図を描いて予想するのが一番。



右図より，直線ABを表す$y=\frac{2}{3}x+n$ 上の格子点は，x軸に平行で等間隔に並んだ直線の3本のうち1本がAB上にある。だから，$x=0$ から$x=3n$までの格子点の個数は $(n+1)$ 個になる。直線ABに平行な直線上の格子点の個数も同じように数えればいい。

<かず子> 図で予想するというならまなぶ，見落としているよ。

$\frac{2}{3}x+n-1<y\leqq\frac{2}{3}x+n$ の帯状の部分の内部にも格子点はあるでしょ。

<まなぶ> 本当だ。走査線上の格子点の個数だけでなく，この場合はそれ以外も考えなければならないのか。そうすると面倒になってしまう。

<先　生> 悩んでいるようだね。ヒントを出そう。直線ABは一般形で表すと，

$$-2x+3y=3n$$

となる。これを見て何か思い出さないだろうか

<よしお> ……，分かりました。不定方程式です。解の組が格子点を表しているということですね。

<アリス> 面白いですね。直線上の格子点ということばかりに目がいって，整数問題にすればいいとは思いもよらなかったです。やっぱり先生とまなぶは全然違う。

<まなぶ> アリス，苛めないでよ。

<かず子> まなぶ，アリスを責めるべきではないわ。アリスは誰もが思っていることを口に出しただけよ。

さて，不定方程式の一般解を求めるにはまず特殊解を見つければいい。

右辺が1の特殊解は$x=1$，$y=1$ より，これを$3n$倍すればいいから，$x=3n$，$y=3n$。

したがって，与式を変形すると，

$$2(x-3n)=3(y-3n)$$

2と3は互いに素だから一般解は，

$$x=3k+3n\,,\quad y=2k+3n$$

<先　生> その通り。ただ，今の場合は，一般解は次のようにしよう。

$$x=-3k+3n\,,\quad y=-2k+3n$$

<よしお> kを$-k$にしたということですね。この後で$0\leqq x\leqq 3n$ より，kの範囲を求めるとき，kが負の値にならないようにしたんですね。やってみます。

$0\leqq -3k+3n\leqq 3n$ より，$0\leqq k\leqq n$。これから，xが整数となる個数は$(n+1)$ 個。

まなぶの予想とした個数だ。

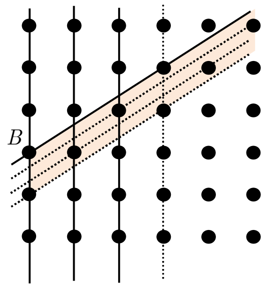
<まなぶ> ぼくの直感力は先生の思考力と同じぐらい高いということだ。

<かず子> 直観力の信頼度は極めて低いけどね。でもまだスキャンの間隔の問題が残っている。

<まなぶ> それもぼくの書いた図から読み取れるよ。

y軸方向の間隔1の間に2つの等間隔で格子点が配置されている。

それをどうやってスキャンするかを考えればいいんだ。



<よしお> まなぶ，だんだん先生みたいな口調になってるよ。

そのスキャンだけど，先ほどのヒントの不定方程式が利用できる。

ABに平行な直線のy切片をmとすると，直線の方程式は，

$$y=\frac{2}{3}x+m \quad より，\ -2x+3y=3m$$

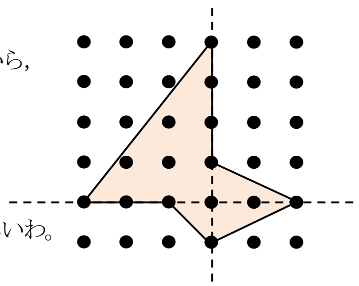
だから，$\quad 3(m-1)<-2x+3y\leqq 3m$

これから，$3m-2$，$3m-1$，$3m$ とすると，3つのグループ分けられるよ。

<アリス> これも不定方程式の一般解を求めればいいということですね。
まず特殊解でしょうか。
<先　生> 先ほど，右辺が$3n$のときの一般解は，次の式で与えられていた。
$x=-3k+3n$，$y=-2k+3n$
この式の$3n$のところを$3m-2$，$3m-1$，$3m$に変えてやればよい。
<アリス> いつものリユースですね。
そうすると，$3m-2$のときは，$x=-3k+3m-2$，$y=-2k+3m-2$
$x \geqq 0$だから，$0 \leqq k \leqq m-\dfrac{2}{3}$　これから格子点の個数は，$0 \sim m-1$よりm個です。
<かず子> あとも同じようにできるわ。
$3m-1$のときは，$x=-3k+3m-1$ より，$0 \leqq k \leqq m-\dfrac{1}{3}$。$0 \sim m-1$よりこれも$m$個。
$3m$のときは，$x=-3k+3m$ より，$0 \leqq k \leqq m$。$0 \sim m$より$(m+1)$個。
これから，$3(m-1)<-2x+3y \leqq 3m$の間にある格子点の個数は，
$m+m+(m+1)=3m+1$
そしてこれを走査線で集めていけばいい。
<まなぶ> これはもう走査線ではないよ。3つの直線を最初から束ねてスキャンしているから，走査帯(Scan-Band)といった方が適切だ。走査帯は，
$3(m-1)<-2x+3y \leqq 3m$
だから，$m=1$，2，3，…こうやってスキャンしていって，最後は$m=n$までということになる。
<かず子> まなぶ，ひとつ見落としているのがあるわよ。不等式をよくみてみたら。
<まなぶ> えっ？，あっ，左辺の不等式には等号は含まれてない。だから，始点の$-2x+3y=0$が抜けてしまうのか。
ということは，
$$T=1+\sum_{m=1}^{n}(3m+1)=1+\frac{1}{2}n\{4+(3n+1)\}=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$
格子点の個数が先ほど求めたものと一致した。
<よしお> 最後の解法は大変だったけど面白いですね。まなぶがいっていた走査帯でスキャンすると，図を指 1 本でなぞることが，3本使って一気にゴソッとなぞってすぐに終ってしまう。とても合理的ですね。
<かず子> ずいぶん具体的な例えね。よしおらしくないわ。ところで先生，これで 4 通りのスキャンで求めたわけですけどもうこれで終りですよね。
<先　生> 最後にもう一つ面白い方法を紹介するつもりなんだ。
<まなぶ> まだあるんですか。もうΣは使い疲れたのだけど。
<先　生> Σは使わない方法だ。ある有名な定理を用いる。

ピックの定理
座標平面上に，頂点が格子点の多角形Dがあり，その面積をSとする。
このときDの周上の格子点の個数をE，Dの内部の格子点の個数をFとするとき，
次の関係式が成立する。
$$S=\frac{E}{2}+F-1$$

右図で確認してみよう。



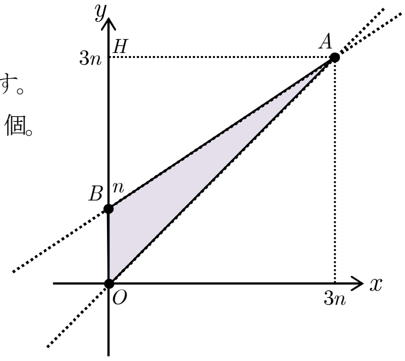
<アリス> 図形の周上の格子点の個数は，$E=9$です。図形の内部の点は$F=5$だから，
多角形Dの面積は，
$$S=\frac{9}{2}+5-1=\frac{17}{2}$$
できましたが，本当にこれで面積が求められたのでしょうか。
<かず子> 図の点線で図形を三角形に分割すると面積は簡単に求められる。確かに正しいわ。
でも，これから格子点の個数はどうやって求めればいいの。
<先　生> ピックの定理を図形の内部の格子点の個数Fについて解く。
$$F=S-\frac{E}{2}+1 \quad \cdots\cdots(*)$$
図形Dの格子点の個数Tは，$T=F+E$だから，(*)を代入する。

$$T = E + F = S + \frac{E}{2} + 1$$

<よしお> 図形の格子点の個数は，図形の面積S と周上の点の個数E が分かれば求められるということですね。

<アリス> 右図より面積S は簡単に求められます。

$$S = \frac{1}{2}OB \cdot AH = \frac{1}{2} \times n \times 3n = \frac{3}{2}n^2$$



<かず子> 辺AB 上の格子点は，先ほどの不定方程式の解より$(n+1)$ 個です。

辺OB の格子点の個数は$(n+1)$ 個で，辺OA の個数は$(3n+1)$ 個。

<まなぶ> 辺の両端が 2 個ずつ重なっているから引かないとだめだよ。

だから，周の格子点の個数は，

$$E = (n+1) + (n+1) + (3n+1) - 3 = 5n$$

これで準備はできた。だから格子点の総数T は，

$$T = S + \frac{1}{2}E + 1 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

できた。凄い。この方法だと線分でスキャンする必要がなくなる。

<かず子> まなぶが感動しているのは，格子点の個数が簡単に求められるからでしょ。でも先生，例えば放物線で囲まれてできる図形の格子点は求められないですねよ。

<先　生> そういうことになる。

<まなぶ> なんだ，線分で囲まれた単純な図形以外はだめなのか。使えない奴だな。

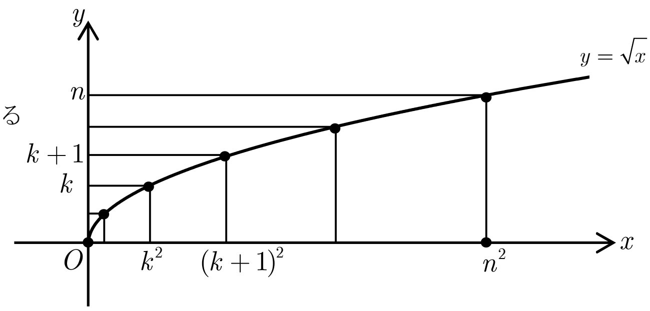
<かず子> 単純な奴はすぐにスキャンできるってことでもあるでしょ。誰かさんみたいに。

あとがき

数学の思考力にずいぶん焦点があたるようになってきました。でも，多面的で発展的な思考は解答者があれやこれやと悩み試行錯誤して楽しみひねりだすものであり，ナビゲータによる誘導で引っ張ってしまうのは，悪い言い方をすると思考操作とも考えられます。そのうち，その思考操作をまねるテクニックが横行し，結局はVSOP(Very special one pattern)になってしまうのではないでしょうか。共通テストの問題のように 1 つの出題分野の中で多面的な思考を養う問題を作成するのは無理があります。使うツールが限定されているからです。学習の過程には，むしろ 1 つのツールを何度も何度も使いこなし理解することが大事であり，その一部は計算力としてやがて多面的思考を支えることになります。そういったツールをたくさん思考の道具箱に整理できてから，1 つの問題と対峙するときに，ではどのツールを用いて解こうかと楽しむ，それが数学の面白さだと思うのです。

本文では，格子点の個数を数列としてスキャンしたり，不定方程式の解と考えたり，そして，ピックの定理で間接的に求めたり，そうやって多面的に思考を広げてみました。なお，ピックの定理の証明は触れていません。点を数えて面積を求めることができるこのユニークな定理は，拙著「三角形の面積をひも解く」で説明しています。興味がある諸氏はご覧ください(応用として，面を数えて面積を求める額賀の定理についても紹介しています)。

なお，ピックの定理を応用して格子点の個数を求めることができるのは直線図形だけであると述べていますが，もちろん，曲線上の格子点を結んで多角形を作ると曲線図形においても求めることは可能になります。



右の曲線$C : y = \sqrt{x}$ とx 軸および直線$x = n^2$ で囲まれてできる図形の周および内部の格子点の個数を求めてみましょう。

曲線C 上の格子点は

$$(k^2, k) \quad (k = 0,1,2,\cdots n^2)$$

となります。これらの格子点と点$(n^2, 0)$ を結んでできる多角形 D に，ピックの定理を用います。

格子点からx 軸に下ろした垂線を引くと，1 つの直角三角形と，$(n-1)$ 個の台形に図形は切り分けられます。

4 点 $\left(k^2, 0\right)$，$\left((k+1)^2, 0\right)$，$\left(k^2, k\right)$，$\left((k+1)^2, k+1\right)$

を頂点とする台形の面積は，

$$\frac{1}{2}\left\{(k+1)^2 - k^2\right\}\left\{k + (k+1)\right\} = \frac{(2k+1)^2}{2}$$

これから，多角形 D の面積S は，

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)^2}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(4k^2 + 4k + 1) = \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{6}n$$

また，多角形Dの周上の格子点の個数Eは，

$$E=(n^2-1)+2(n-1)+3=n^2+2n$$

よって，多角形Dの周および内部の格子点の個数Tは，

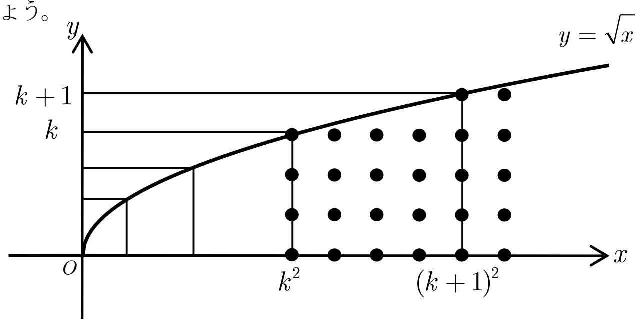
$$\begin{aligned}T&=S+\frac{E}{2}+1\\&=\left(\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right)+\frac{1}{2}\left(n^2+2n\right)+1=\frac{2}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

ここで，次の極限はなにを意味するか自明のことでしょう。

$$\lim_{n\to 0}\frac{S}{n^3}=\lim_{n\to 0}\frac{T}{n^3}=\frac{2}{3}$$

では次は，スキャンニングにより格子点の個数を求めてみましょう。

まず，y軸に平行な直線でスキャンしていきます。



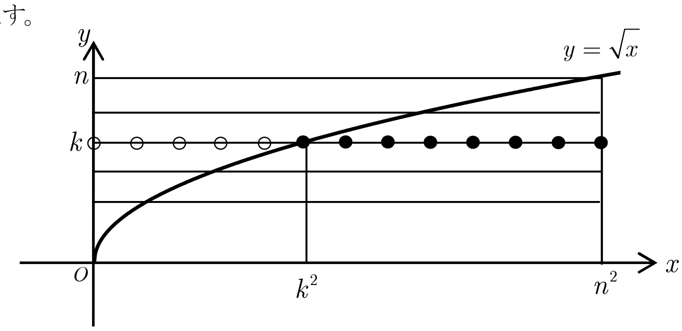
直線$x=k^2$と，曲線$y=\sqrt{x}$との交点は(k^2,k)より，$(k^2,0)$から(k^2,k)まで格子点の個数は$(k+1)$個になります。この個数は，$x=(k+1)^2$のとき，1つ増え，$(k+2)$個になるので，$x=(k+1)^2-1$までは，すべて$(k+1)$になります。すなわち，$k^2\leqq x<(k+1)^2$の範囲にあるy軸に平行な直線の本数は，$(k+1)^2-k^2=2k+1$であり，これらの直線上にはすべて$(k+1)$個の格子点があります。

$k=0,1,2,\cdots(n-1)$より，これらをスキャンして，最後に直線$y=n^2$上の格子点を数えると次のようになります。

$$\begin{aligned}T&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(2k+1)+(n+1)\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+3k+1)+(n+1)=\frac{2}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

次はx軸に平行な直線でスキャンしてみましょう。

右図のように，直線$y=k$（$k=0,1,2,\cdots n$）でスキャンします。



この直線上にある格子点の個数は，

直線上の$0\leqq x\leqq n^2$の範囲にある格子点の個数から，

直線上の$0\leqq x<k^2$の範囲にある格子点の個数を減ずると，

得られます。すなわち，

$$(n^2+1)-k^2$$

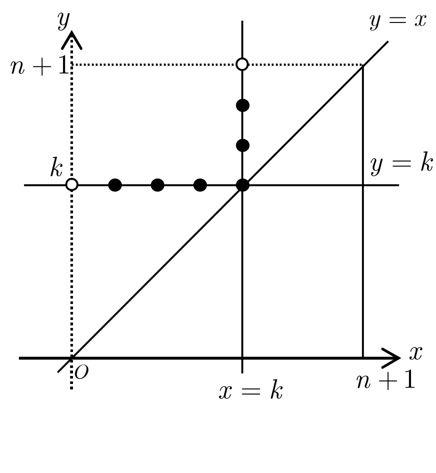
これから，格子点の個数は，

$$\begin{aligned}T&=\sum_{k=0}^{n}\left\{(n^2+1)-k^2\right\}\\&=n(n^2+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

このスキャンニングは一番単純な走査線(Scan-Line)によるもので，簡単に格子点の個数を求めることができます。

しかし，ピックの定理や走査帯のスキャンニングは，導出の過程にはとても面白いものが含まれています。

さらに，それらの方法を比較することで間接的に他の性質を導きだすことができます。



右の直線$y=x$と，$x=0$（y軸），直線$y=n+1$で囲まれた図形Dで，$x=0$と$y=n+1$上の格子点を除いた図形Dの周および内部の格子点の個数Tを，2通りのスキャンニングで求めてみましょう。

y軸に平行な直線でスキャンすると，$x=k$上の格子点の個数は$(n+1-k)$個。

$$T=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1)-k\right\}=n(n+1)-\sum_{k=1}^{n}k\quad\cdots\cdots①$$

x軸に平行な直線でスキャンすると，$y=k$上の格子点の個数はk個。

$$T=\sum_{k=1}^{n}k\quad\cdots\cdots②$$

①と②より，

$$\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k$$

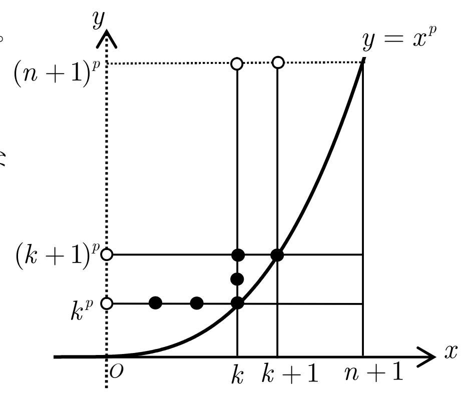
$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

自然数の和の公式が得られました。

同じように考えて，自然数のべき乗の和の公式を求めてみましょう。

$f(x) = x^p$（p は自然数)とします。

曲線$y = f(x)$ と，2 直線$x = 0$，$y = f(n+1)$ で囲まれる図形の周および内部の格子点で，$x = 0$，$y = f(n+1)$ の格子点を除いた格子点の個数をTとします。



y 軸に平行な直線でスキャンすると，$x = k$ 上の格子点の個数は$(n+1)^p - k^p$ 個。

よって，　$T = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (n+1)^p - k^p \right\} = n(n+1)^p - \sum_{k=1}^{n} k^p$

x 軸に平行な直線でスキャンすると，$k^p \leqq y < (k+1)^p$ の範囲にあるx 軸に平行な直線は，$(k+1)^p - k^p$ 本あり，その直線上の格子点の個数はk 個より，

$$T = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (k+1)^p - k^p \right\} k = \sum_{k=1}^{n} p k^p + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{p-2} {}_pC_r k^{r+1} \right)$$

これから，　$n(n+1)^p - \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n} p k^p + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p-2} {}_pC_r k^{r+1} \right)$

以上より，　$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \left(n(n+1)^p - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{p-2} {}_pC_r k^{r+1} \right) \right)$

この式から，べき乗和に関する重要な極限公式が得られます。

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{p-2} {}_pC_r \frac{k}{n^{p+1}} \right) \right\}$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

では，$p = 2$，3，4 の場合のべき和を求めてみましょう。

$p = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3} \left(n(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(n(n+1)^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \right) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

$p = 3$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4} \left(n(n+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} (k + 3k^2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(n(n+1)^3 - \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) \right) \\ &= \frac{1}{8} n(n+1) \left\{ 2(n+1)^2 - 1 - (2n+1) \right\} = \left(\frac{1}{2} n(n+1)^2 \right) \end{aligned}$$

$p = 4$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5} \left\{ n(n+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} (k + 4k^2 + 6k^3) \right\} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ n(n+1)^4 - \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{4}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{6}{4} n^2 (n+1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \end{aligned}$$

このように，p の値から順次，自然数のべき乗和が求められます。

なお，自然数の p 乗和は $(p+1)$ 次の自然数 n の高次式であり，その係数には次の関係があることが知られています。

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p} = \sum_{q=1}^{p+1} a_{p,q} n^{q}$$

ここで，$a_{p,q+1} = \dfrac{p}{q+1} a_{p-1,q}$ $(q = 1,2,3,\cdots,p)$，$\displaystyle\sum_{q=1}^{p+1} a_{p,q} = 1$

$p = 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ より，$a_{0,1} = 1$

$p\,/\,q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1									
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$						
4	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$					
5	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$			
7	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	
9	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

これを初期値として，マトリックスの $(p-1,q)$ に対応する $a_{p-1,q}$ の値から，マトリックスの右下 $(p,q+1)$ に対応する $a_{p,q+1}$ の値がパスカルの三角形の如く定まっていくのです。

なお，$a_{p,1}$ の値は，$\displaystyle\sum_{q=1}^{p+1} a_{p,q} = 1$ より得ることができます。

具体的に p の値でみてみましょう。

$p = 1$ のとき，

$a_{1,2} = \dfrac{1}{2} a_{0,1} = \dfrac{1}{2}$，$a_{1,1} + a_{1,2} = 1$ より，$a_{1,1} = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k = a_{1,1} n + a_{1,2} n^{2} = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^{2}$$

$p = 2$ のとき，

$a_{2,3} = \dfrac{2}{3} a_{1,2} = \dfrac{1}{3}$，$a_{2,2} = \dfrac{2}{2} a_{1,1} = \dfrac{1}{2}$，

$a_{2,1} = 1 - a_{2,2} - a_{2,3} = \dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^{2} = a_{2,1} n + a_{2,2} n^{2} + a_{2,3} n^{3} = \frac{1}{3} n + \frac{1}{2} n^{2} + \frac{1}{6} n^{3}$$

$p = 3$ のとき，

$a_{3,4} = \dfrac{3}{4} a_{2,3} = \dfrac{1}{4}$，$a_{3,3} = \dfrac{3}{3} a_{2,2} = \dfrac{1}{2}$，$a_{3,2} = \dfrac{3}{2} a_{2,1} = \dfrac{1}{4}$，$a_{3,1} = 1 - a_{3,2} - a_{3,3} - a_{3,4} n^{3} = 0$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^{3} = a_{3,1} n + a_{3,2} n^{2} + a_{3,3} n^{3} + a_{3,4} n^{4} = \frac{1}{4} n^{2} + \frac{1}{2} n^{3} + \frac{1}{4} n^{4}$$

$p = 4$ のとき，

$a_{4,5} = \dfrac{4}{5} a_{3,4} = \dfrac{1}{5}$，$a_{4,4} = \dfrac{4}{4} a_{3,3,} = \dfrac{1}{2}$，$a_{4,3} = \dfrac{4}{3} a_{3,2} = \dfrac{1}{3}$，$a_{4,2} = \dfrac{4}{2} a_{3,1} = 0$，

$a_{4,1} = 1 - a_{4,2} - a_{4,3} - a_{4,4} - a_{4,5} = -\dfrac{1}{30}$

$$\therefore \quad \sum k^{4} = a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} = -\frac{1}{30} n + \frac{1}{3} n^{3} + \frac{1}{2} n^{4} + \frac{1}{5} n^{5}$$

このように逐次的にべき乗和の項の係数が得られます。

なお，マトリックスの数 $a_{p,q}$ を右斜め下方向にみていくと，規則的な数の並びになっていることが分かります。

このような, べき乗和の項の係数を求める方法には, 二項定理を用いたユニークでエレガントな解法も知られています。

$$(k+\alpha)^{p+1} = \sum_{r=0}^{p+1} {}_{p+1}C_{r} k^{(p+1)-r} \alpha^{r} = k^{p+1} + (p+1)\alpha k^{p} + \sum_{r=2}^{p+1} {}_{p+1}C_{r} k^{p-r+1} \alpha^{r}$$

$$(k+\beta)^{p+1} = \sum_{r=0}^{p+1} {}_{p+1}C_{r} k^{(p+1)-r} \beta^{r} = k^{p+1} + (p+1)\beta k^{p} + \sum_{r=2}^{p+1} {}_{p+1}C_{r} k^{p-r+1} \beta^{r}$$

二式を辺々引くと，

$$(k+\alpha)^{p+1}-(k+\beta)^{p+1}=(p+1)(\alpha-\beta)k^p+\sum_{r=2}^{p+1}{}_{p+1}C_r k^{p-r+1}(\alpha^r-\beta^r) \quad \cdots①$$

ここで,

$\alpha-\beta=1$（すなわち, $\beta=\alpha-1$）$\cdots②$

$\alpha^r=\beta^r$（$r=2,3,4,\cdots p+1$）$\cdots③$

とすると, 2式より,

$\alpha^r=(\alpha-1)^r \quad (r=2,3,4,\cdots\cdots,p+1) \quad \cdots(*)$

②, ③より①は次のようになります。

$$(p+1)k^p=(k+\alpha)^{p+1}-(k+\alpha-1)^{p+1}$$

これから,

$$\sum_{k=1}^{n}(p+1)k^p=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+\alpha)^{p+1}-(k+\alpha-1)^{p+1}\right\}$$
$$=(n+\alpha)^{p+1}-\alpha^{p+1}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{(n+\alpha)^{p+1}-\alpha^{p+1}}{p+1} \quad \cdots(**)$$

べき乗和を与えるこの性質をファウル・ハーバーの公式といいます。

ファウル・ハーバーは, 17世紀ドイツの数学者であり, 著書「Academiae Algebrae(1631)」でこの公式を発表しています。ここで, (*)の右辺のαはどのように定めるかということになります。

(*)より,

$r=2$のとき,

$$\alpha^2=(\alpha-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{1}{2}$$

$r=3$のとき,

$\alpha^3=(\alpha-1)^3$より, $3\alpha^2-3\alpha+1=0$

ここで, αの2次方程式を解けば, αの値は求められますが, もちろんその値は$\alpha=\frac{1}{2}$ではありません。

ではどうみるかですが, この発想がユニークでエレガントなのです。

α, α^2, α^3, α^4はαのべき乗ではなく, それぞれ$\alpha^r=(\alpha-1)^r$をみたす変数と考えます。たとえば,

$3\alpha^2-3a+1=0$ は, 2つの変数α, α^2を満たす方程式であり, $\alpha=\frac{1}{2}$より,

$$3\alpha^2-\frac{3}{2}+1=0$$

$$\therefore \quad \alpha^2=\frac{1}{6}$$

同様に考えると,

$\alpha^4=(\alpha-1)^4$ から, $4\alpha^3-6\alpha^2+4\alpha-1=0$

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha^2=\frac{1}{6}$より,

$$4\alpha^3-6\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{2}-1=0$$

$$\therefore \quad \alpha^3=0$$

$\alpha^5=(\alpha-1)^5$ より, $5\alpha^4-10\alpha^3+10\alpha^2-5\alpha+1=0$

$$5\alpha^4-10\times0+10\times\frac{1}{6}-5\times\frac{1}{2}+1=0$$

$$\therefore \quad \alpha^4=-\frac{1}{30}$$

$\alpha^6 = (\alpha - 1)^6$ より，$6\alpha^5 - 15\alpha^4 + 20\alpha^3 - 15\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0$

$$6\alpha^5 - 15\times\left(-\frac{1}{30}\right) + 20\times 0 - 15\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{2} - 1 = 0$$

$\therefore\quad \alpha^5 = 0$

以下，同様に続けると，次のような数列が生成されます。

$$1\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad 0\quad -\frac{1}{30}\quad 0\quad \frac{1}{42}\quad 0\quad -\frac{1}{30}\quad 0\quad \frac{5}{66}\quad 0\quad -\frac{691}{2730}\quad 0\quad \cdots\cdots$$

この数列の項の値をベルヌーイ数といいます。

この項の並びは，先ほどのマトリックス表の$(p,1)$に対応する係数$a_{p,1}$ $(p = 0,1,2,3,\cdots)$の値でもあります。

なお，ベルヌーイ数は，

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

をマクローリン展開したときの各項の係数としても与えられます。

では，(**)のファウルハーバーの公式によりべき乗和を求めてみましょう。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+\alpha)^2 - \alpha^2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 2\alpha n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+\alpha)^3 - \alpha^3}{3}$$
$$= \frac{n^3 + 3\alpha n^2 + 3\alpha^2 n}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{6}n\right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+\alpha)^4 - \alpha^4}{4}$$
$$= \frac{n^4 + 4\alpha n^3 + 6\alpha^2 n^2 + 6\alpha^3 n}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(n^4 + \frac{4}{2}n^3 + \frac{6}{6}n^2 + 6\times 0\times n\right) = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

このようにべき乗和はファウルハーバーの公式により簡単に求めることができますが，そのため前述のように，$f(x) = x^p$ を x 軸，y 軸に平行な直線でスキャンして間接的に求めることの実用性は薄れてしまいます。

格子点の個数Tを表す2つのスキャンニングの式を変形してみましょう。

$$T = \sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^p - k^p\right\}k = \sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^p k - k^{p+1}\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^{p+1} - (k+1)^p - k^{p+1}\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right\} - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^p$$
$$= (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^p$$

$$\therefore\quad T = n(n+1)^p - \sum_{k=1}^{n}k^p = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}(k+1)^p$$

これから，

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^p - \sum_{k=1}^{n}k^p = (n+1)^{p+1} - n(n+1)^p - 1 = (n+1)^p - 1$$

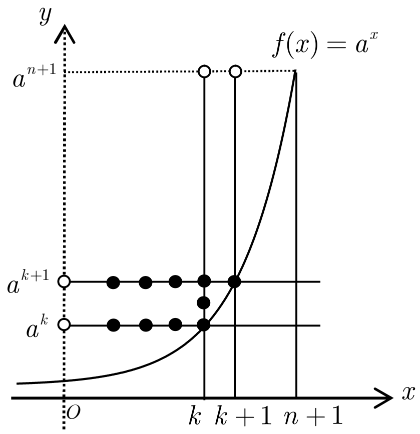
以上より，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^p - k^p\right\} = (n+1)^p - 1$$

このように，自然数のべき乗和を求めるときに通常使われる関係式になってしまいます。
よって，スキャンニングで求めることの価値を考えるのであれば，代数的にべき乗和を導くのではなく，べき乗和に幾何学的なイメージを与えるべきなのでしょう。
さらに格子点のスキャンニングは応用的な活用ができるのです。
なぜなら，スキャンする関数はべき乗の関数$f(x)=x^p$に限定しているわけではなく，$y=f(x)$が$x≧0$で単調増加するときにも同様にスキャンは可能なのです。
次の関係式が成立することはいままでの説明から容易に理解することができるでしょう。

> $y=f(x)$は$x≧0$で単調増加であり，$f(0)=m$（mは0以上の整数)のとき，
> 曲線$y=f(x)$，直線$x=0$および$y=f(n+1)$で囲まれた図形の周および内部の格子点で，
> $x=0$，$y=f(n+1)$上の格子点を除いた格子点の個数Tは，次の式で与えられる。
>
> $$T=nf(n+1)-\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=m}^{n}\Big\{f(k+1)-f(k)\Big\}k$$

単調増加関数である指数関数 $f(x)=a^x \quad (a>1)$ を例に考えてみましょう。



$f(0)=1$ であることから，

$$T=na^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}a^k=\sum_{k=1}^{n}\Big(a^{k+1}-a^k\Big)k$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a(a^n-1)}{a-1}$$

すなわち，格子点Tの個数は，

$$T=na^{n+1}-\frac{a(a^n-1)}{a-1}=\frac{(an-n-1)a^{n+1}+a}{a-1}$$

一方，もう一つの式を変形すると次のようになります。

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(a^{k+1}-a^k\Big)k=(a-1)\sum_{k=1}^{n}ka^k$$

これから，

$$\frac{(an-n-1)a^{n+1}+a}{a-1}=(a-1)\sum_{k=1}^{n}ka^k$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}ka^k=\frac{(an-n-1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$$

すなわち，各項が等差数列と等比数列の積で与えられている次の数列の和が求められました。

$$S=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots+na^n$$

ひとつの分野の学習を反復しながら積み重ね培う論理力は虫瞰的思考によるものでしょう。対して，ひとつの分野の学習成果物を発展的かつ応用的に他の分野とリンクし養う論理力は鳥瞰的な思考によるものではないでしょうか。それは，知識と知恵のように単純に２つの言葉で二分されるものではありません。
過去，センター試験の問題では「図形の性質」において「図形の計量」で学ぶ三角比を用いて解く場面がよく見受けられました。図形の性質なんだから，方べきの定理やメネラウスの定理などを駆使して解かなければならない，そう四角四面に考えるべきではないのです。もちろん解こうとすればできます。三角比は図形の相似比から得られた成果物であり元を辿ることで求められるからです。でも，三角比は図形の論理のバイパスであり思考をラクすることができ，敢えて回り道をする必要はないでしょう。
逆に，図形の計量の問題をメネラウスやチェバの定理を用いて解くことは共通テスト(センター試験)ではありません。「図形の計量」はコア分野，「図形の性質」はオプション分野だからです。数学Ⅰ・A，数学Ⅱ・Bのように，数学が必修と選択の分野に区分けされたことによりずいぶん論理は不自由になりました。多面的思考を養うのであれば図形の問題は「図形の性質と計量」のような１つの分野であればいいと思うのです。次の教育課程では，オプションである「統計的推測」は，ほぼコアの分野になっています。統計分析がこれからは大事と考えるであればコアにすべきであり，受験の仕組み上強制的に履修するものではなく，そのことで選択分野に齟齬が生じています。学ぶべき分野，学ぶに必要な単位数を提示し，その上で「思考・判断・表現」は養うべきであり，オプションは必要なのでしょうか。多様性は現代のkey-wordとして重要であると理解しますが，多様性は押し付けられるものではなく種々の可能性から自らが探究し得るべきものです。「まねる，まねぶ，まなぶ」は理解のプロセスであり，思考・判断・表現は「まねぶ」ことですが，どうもそれがしっくりこないのです。