漸化式の平衡値の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○項の値をshare しよう！

<アリス> 漸化式$a_{n+1}=pa_n+r^n$ の一般項の解法マニュアルって，

① 両辺を p^{n+1} で割る

② 両辺を r^{n+1} で割る

でしたよね。

<よしお> ①が階差数列型で，②が隣接二項漸化式の基本形$a_{n+1}=pa_n+q$ に帰着させるパターンだね。

<アリス> その②の基本形にも関係することなんだけど，この基本形はさらに，定数q を両辺にシェアして，等比数列型に変形しますよね。それなら最初からr^n を両辺にシェアして等比数列型にした方がいいと思いません。

<まなぶ> シェアか。いい表現だよね。僕もアリスといろいろなことをシェアしてみたいといつも思っているんだ。

<かず子> そのことは私が後でじっくりとあんたと話をシェアしてあげるから。

<先　生> シェアか，面白いね。それでは今回は漸化式の項のシェアできるかどうかをみんなで考えてみようか。さきほどのアリスのいっていた問題は次のようなものだ。

Ex）$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$ の一般項を求めよ。

まず，通常の隣接二項漸化式の基本形での解法で求めてみよう。

<よしお> 両辺を2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$　あとは，$\dfrac{1}{2}$ を両辺にシェアします。

<まなぶ> 特性方程式 $\alpha=\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}\cdots(*)$ を作って，二式を辺々引くんだよね。(*)より $\alpha=-1$ が得られるから，

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

これから，数列$\{b_n+1\}$ は公比$\dfrac{3}{2}$ の等比数列になる。

初項は，$b_1+1=\dfrac{a_1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

よって，$b_n+1=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　$\dfrac{a_n}{2^n}+1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

以上より，$a_n=3^n-2^n$

<よしお> でも，この式の途中にでてくる数列$\{b_n+1\}$ は，$\dfrac{a_n}{2^n}+1$ のことだから，2^n をシェアしたとはいえないですね。

<先　生> ではどうシェアしたら公平に分配できるか考えてごらん。

<まなぶ> 隣接二項漸化式の最終形態は等比数列型。だから，

$$a_{n+1}-○=3(a_{n+1}-○)$$

の形になるように2^n をシェアできればいいかもしれない。

<先　生> 「いいかもしれない」という表現，いいかもしれない。

<かず子> 先生，おだて過ぎは良くないかもしれない。

<先　生> まなぶの楽天的お調子者という性格はさておき，「いいかもいれない」とは，「適切に予想する」ということだ。数列だけに限らず，数学の問題は「こうすればいい結果が得られるかもしれない」と推測することは大切なことだ。「こうシャアするといいかもしれない」という観点で数列を眺めてみることは理にかなっている。

<まなぶ> さすが，先生，いいことおっしゃいます。

<かず子> ほら，舞い上がってしまった。
<アリス> とにかく，私がシェアしてみます。

$$a_{n+1}-\alpha 2^n=3(a_n-\alpha 2^n)$$

の形はどうでしょうか。
<よしお> 2^n は定数でないから，ちょっとまずいと思う。
$b_n=a_n-\alpha 2^n$ とおくと，左辺は b_{n+1} にならなければいけないから，
$b_{n+1}=a_{n+1}-\alpha 2^{n+1}$ とすべきです。だから，シェアする式は，

$$a_{n+1}-\alpha 2^{n+1}=3(a_n-\alpha 2^n)$$

<かず子> あとは，これを与式の漸化式と比較して α を求めればいいのね。
<まなぶ> それでいいとは思う。でも特性方程式による隣接二項漸化式の変形を参考にすると，

$$\alpha 2^{n+1}=3\times\alpha 2^n+2^n \quad \cdots(*)$$

この式と与式の漸化式を辺々引くと，2^n が消去されて，うまくまとまるよ。
<先　生> みんなで意見がシェアできたね。
では(*)から α の値を求めてみよう。
<アリス> (*)の両辺を 2^n で割ると，$2\alpha=3\alpha+1$ より，$\alpha=-1$ です。
漸化式と(*)を辺々引くと，

$$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$$

$\{a_n+2^n\}$ は公比 3 の等比数列ですね。わーっ，すっきりした形にまとまりました。
<まなぶ> そうすると，初項は $a_1+2^1=3$ だから，$a_n+2^n=3\cdot 3^{n-1}$
一般項は，　$a_n=3^n-2^n$
簡単に求められた。こうなるとなんかいろんな漸化式の項をシェアしたくなる。
<先　生> それでは次はどうだろう。

Ex) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2n+1$ の一般項を求めよ。

<アリス> 1 次式 $2n+1$ のシェアですね。
両辺にシェアしてもその式は 1 次式で変わらないから「$an+b$ としてシェアするといいかもしれない」ですね。
<先　生> では，今度はその式を $f(n)=an+b$ とおいてみよう。どんな関係式が作られるかな。
<よしお> 辺々引いて，$2n+1$ がなくなるようにすればいいので，

$$f(n+1)=3f(n)+(2n+1) \quad \cdots(*)$$

ですね。
<かず子> そうね。もとの漸化式との差は，

$$a_{n+1}-f(n+1)=3\left(a_n-f(n)\right)$$

うまくシェアできる。結局，公比 3 の等比数列ね。
<先　生> では(*)から a,b の値を求めてみよう。
<アリス> $f(n)=an+b$,
$f(n+1)=a(n+1)+b=an+(a+b)$
これから，

$$an+(a+b)=3(an+b)+2n+1$$

まとめると，$(2a+2)n+(-a+2b+1)=0$
でもこれをどうするのかしら。
<よしお> どんな n に対しても成立するから n の恒等式とみればいい。
<まなぶ> なるほどね。そうすると，

$$2a+2=0,\ -a+2b+1=0$$

これを解いて，

$$a=-1, b=-1 \qquad \text{だから，} \quad f(n)=-n-1$$

すなわち，$\{a_n+n+1\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は $a_1+2=3$
よって，$a_n+n+1=3\times 3^{n-1}$ より，

$$a_n=3^n-n-1$$

<先　生>　では，もう一問。

Ex）$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+(2n+1)2^n$ の一般項を求めよ。

<まなぶ> なんか問題を作るのを楽しんでませんか。
<かず子> どういうこと。
<まなぶ>　だって最初の問題が指数関数 2^n , 次が１次関数 $2n+1$ 。そして今度の問題は２つの積である $(2n+1)2^n$ だろ。
まあ，楽しんでいるというより，もう少し正確ない言い方をすれば，いつもの手抜き。
<先　生> そんなつもりはないんだけどね。とにかく，頑張って解いてみよう。
<かず子>　ええと，…，「$f(n)=(an+b)2^n$ としてシェアするといいかもしれない」，わっ，なんだか虫唾が走る。
<よしお>　では，バトンタッチ。$f(n+1)=f(n)+(2n+1)2^n$ …(*)
のように振り分ければ，辺々引いて，

$$a_{n+1}-f(n+1)=a_n-f(n)$$

となります。
<まなぶ>　だんだん計算が面倒になってきた。
<かず子>　先生のこと，とやかく言えないわね。そのいつもの「ぐうたら手抜きは」
<まなぶ>　いやいや，こういうときこそ，みんなで計算も含めてシェアしていこうよ。
<先　生>　まなぶのぐうたら症にちょっとつきあってやろう。(*)は n の恒等式だよね。恒等式はどんな等式だったろうか。
<アリス>　どんな値に対しても成立する等式ですよね。
<よしお> そうか，数値代入法ですね。そう考えると計算は楽だ。
<かず子>　詳しく説明して。
<よしお> (*)を n の恒等式とみれば，n は任意の実数で成立すればず。だから代入する値は自然数でなくてもいい。

$$f(0)=b,\ f(1)=2(a+b),\ f(2)=4(2a+b)$$

そうして，$f(n+1)-f(n)=(2n+1)2^n$
この式の両辺に $n=0,1$ を代入して関係式を求めるんだ。
<アリス> やってみます。

$$f(1)-f(0)=2a+b=1$$

$$f(2)-f(1)=6a+2b=6 \qquad \therefore 3a+b=3$$

これを解いて，$a=2, b=-3$
そうすると，数列 $\{a_n-(2n-3)2^n\}$ の一般項は,

$$a_n-(2n-3)2^n=a_1-(2-3)2^1=3$$

以上より，$a_n=(2n-3)2^n+3$
簡単に解けたわ。
<先　生> ところでいま解いた漸化式は何を意味しているか分かるだろうか。
<まなぶ> 先生の手抜きにつきあった以外のことって意味ですか。
<先　生> もう一度言うけどこれは手抜き問題ではない。$S_n=a_n$ としてみるとどうなる。
<よしお>　$S_{n+1}-S_n=(2n+1)2^n$ だから，右辺は $\{\mathrm{S}_n\}$ の階差数列ということですね。
<アリス> あっ，わたし，分かったわ。S_n は通常は数列の和を表していますよね。この場合は,

$S_1=1$ だから，$S_2=S_1+3\cdot 2^1=1+3\cdot 2^1$

$$S_3=S_2+5\cdot 2^2=1+3\cdot 2^1+5\cdot 2^2$$

これを続けていけば,

$$S_n=S_{n-1}+(2n-1)2^{n-1}=1\cdot 2^0+3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+\cdots\cdots+(2n-1)2^{n-1}$$

<かず子> これって，等差の項と等比の項の積で表されるマリッジ数列だわ。
<まなぶ> へーっ，珍しく先生はちゃんと考えていたんだ。
<先　生> 一言余計だ。このようにいろいろな数列の項を「こうシェアするといいかもしれない」とすると面白い結果が導き出せるかも知れない。そして今回は項をシェアするだけでなく，みんなで問題の考え方(answer)もシェアしたわけで，この協働学習をアンシェア(an-share)とでも名付けようか。
<まなぶ> 先生，なんかかっこよくまとめに入っていないですか。
<かず子> この場合のアンシェアはかっこよくはないでしょ。だってまなぶがいるんだから。与えるものがないまったくないまなぶの存在と介入は，さしずめアンシェア(un-share)ってことだわ。

あとがき

非同次式(非斉次式)の一般解は，その特殊解と同次式の一般解の和として得られる。

本文の内容は一言でこのように表現される。ここで非同次式の特殊解は特性方程式の解として得られる。また，同次式の多くは等比数列の一般項である。ただ，原理としてはそうであるが，本文はそんな大げさな性質を大上段に構えて論じているわけではない。いたって単純であり，「項の値をシェアする」操作で漸化式の一般項を求めてみようという内容である。

特性方程式は，漸化式の一般解の解法のキーワードとして自然に用いられようになった。しかし特性方程式や特殊解(特性根)という用語の定義がないまま，使えば求められるという極めてマニュアル的な説明で用いられる。何か「特性」は「特別」なものとして捉えられ，そういう特別なテクニックをかざせば解決できるという発想はどうなのだろう。

隣接２項漸化式$a_{n+1}=pa_n+q\ (q\neq 0)$の特性方程式は$a_n=a_{n+1}=\alpha$であるが，これを$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$だからとしてしまえば極限の概念の理解に大きなシコリを残してしまう。大体，特性方程式などという大げさなものではないだろう。そのことは 20 年ほど前の小手技の中でも触れ，値αは非同次式を同次式に変換するためのバランスをとる値，すなわち平衡値とした。定数qを両辺に振り分けてどうバランスをとればいいかと試行(思考)するだけのことであり，得られる式は，特性方程式というより平衡式である。

本文で扱っている漸化式は，$a_{n+1}=pa_n+q(n)\quad (q(n)\neq 0)$である。ここで$q(n)$は数列を示すわけではなく$n$の関数である。$q(n)$が定数関数の場合が上述の漸化式である。$q(n)=qr^{n-1}$，すなわち指数関数(等比数列ではない)の場合が，本文で最初に扱った漸化式である。このとき，

$$a_{n+1}=pa_n+qr^{n-1}\qquad \cdots①$$

ここで，qr^{n-1}を両辺にシェアできれば，等比数列型に変形できると考える。そのためには，$f(n)=\alpha(qr^{n-1})$として，

$$f(n+1)=pf(n)+qr^{n-1}\quad\cdots②$$

という関係を満たす式を作る。①と②を辺々引くことで公比pである等比数列$\{a_n-f(n)\}$が得られる。

②は，$\alpha(qr^n)=p(\alpha qr^{n-1})+qr^{n-1}$であるから，両辺を$qr^{n-1}$で割ると，

$$\alpha r=p\alpha+1\quad\cdots③$$

こうして得られた③が平衡式であり，その解が平衡値である。

同様にバランスが取れるように値をシェアしていくことで，隣接３項漸化式，分数漸化式，連立漸化式の平衡式を求めることができる。「漸化式の項を Share しよう」に示したのでご覧いただきたい。

さて，本文では，等差数列の項と等比数列の項の積で得られる数列もシェアすることで求めている。その方法を用いると，次のような数列の和を求めることもできる。

$$\boxed{S_n=1\cdot 1+2^2\cdot 2+3^2\cdot 2^2+\cdots\cdots+n^2 2^{n-1}}$$

解)

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)^2 2^n$$

$(n+1)^2 2^n$を両辺にシェアするために，$f(n)=(an^2+bn+c)2^n$とする。

$$f(n+1)=f(n)+(n+1)^2 2^n\quad\cdots\cdots(*)$$

これから，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(a-b+c),\ f(0)=c,\ f(1)=2(a+b+c),\ f(2)=4(4a+2b+c)$

(*)に，$n=-1,0,1$ を代入する。

$$f(0)-f(-1)=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0\qquad\therefore\quad a-b-c=0$$

$$f(1)-f(0)=2a+2b+c=1$$

$$f(2)-f(1)=14a+6b+2c=8\qquad\therefore\quad 7a+3b+c=4$$

これを解いて，$a=1,\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\quad f(n)=(n^2-2n+3)2^n$である。

よって，$S_n-f(n)=S_1-f(1)=1-(1-2+3)\times 2=-3$

以上より，$S_n=(n^2-2n+3)2^n-3$

本文では，最後にアンシェアなる造語を提示している(封切の邦画アン〇ェアからもじっちゃいました)。受け身の授業形態からアクティブラーニング，ジグソー学習といった協働学習の必要性が今の教育では問われている。数実研の発表は，アイデアや研究の相乗りを基本コンセプトにしているが，これもまた数学のシェアである。シェアするとはともに育てていくことといってもいい。「シェアしマス」，ダジャレだけど，大事なことである。