集合の要素の個数の小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○カルノー的分類法

<先　生> 今日は集合を図で表現する面白い方法を紹介しよう．
<かず子> 先生が以前，授業で説明したベン図とは違うのですか．
<まなぶ> そうだ，そうだ．確か，ジョン・ベン(Jhon-Venn)って人が考えた，トイレにいきたくなるような図のことだよね．
<アリス> 意味分かりません．
<かず子> 分からないほうがいいの．無視して．
<よしお> ベン図を用いると，集合の包含関係とか，交わり，結びが視覚的に読み取れるのでしたよね．
<まなぶ> 集合を表すのにベンリな図だからベン図ということだな．
<アリス> ……
<かず子> 無視，無視，虫と思いましょう．
<先　生> ちょっと感化されているよ．今日みんなに説明する図はベン図以上に視覚効果がある図なんだ．
その名も，「カルノー図」という．
<アリス> カルノーってベンと同じように人の名前ですか．
<先　生> そう，モーリス・カルノー(Maurice Karnaugh)という人が考案したといわれている．もともとは，論理式計算を簡単に視覚化するための図なのだけど，集合としても利用することができる．
<よしお> 事象を集合として扱うことは多いですものね．
<先　生> さて，その図だけど，まずベン図と同様に全体集合Uを長方形で表す．この中にベン図は，円のような閉曲線で集合を書き込んでいくわけだ．これに対して，カルノー図は，区画で仕切っていく．横に仕切りをいれて，上部を集合Aとし，下部の補集合$\overline{A}$とする．次に集合Aと共通部分がある集合Bを，長方形の縦に仕切りをいれて，左側をB，右側を$\overline{B}$とする．そうするとこんな図ができるね．

U	B	$\overline{B}$
A	①	②
$\overline{A}$	③	④

<かず子> 全体集合Uが4つのパーテーションで仕切られたってわけね．
<先　生> その通り．では，その4つはそれぞれどんな部分集合になっているかみてみよう．
たとえば，①は，集合Aと集合Bの共通部分だから，$A\cap B$だね．
<よしお> そうすると，②は集合Aと集合$\overline{B}$の共通部分より，$A\cap\overline{B}$．
同様に，③，④はそれぞれ，$\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$となります．

U	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	$A\cap\overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\cap B$	$\overline{A}\cap\overline{B}$

<まなぶ> パーテーションがすべて集合の交わりで表現できるってことか．
<かず子> 確か②はベン図では，集合Aの中のBの部分を除いた三日月の形になる集合の部分よね．それに比べてすっきりして見やすい分け方だわ．
<先　生> カルノー図がどれだけ便利か，集合の問題で確認してみよう．

> Ex) 全体集合をUとするとき，その部分集合A, Bに対して，
>
> $n(U)=100,\ n(A\cup B)=75,\ n(A\cap B)=15,\ n\left(A\cap\overline{B}\right)=40$
>
> である．次の個数を求めよ．
>
> (1) $n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$　(2) $n\left(\overline{A}\cap B\right)$　(3) $n(A)$　(4) $n(B)$

U	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$ 15	$A\cap\overline{B}$ 40
$\overline{A}$	$\overline{A}\cap B$ 20	$\overline{A}\cap\overline{B}$ 25

<かず子> わたし，これ大嫌い．補集合をどう扱っていいかだんだん混乱してくる．
<アリス> 確か，ド－モルガンの法則を使って解くんだったわ．
<よしお> でも，与えられている集合をみると，カルノー図のパーテーションが随分含まれていますね．
<まなぶ> 本当だ．ということは，図の中に集合の要素の個数を入れられるってことだな．例えば，
$A\cap B,\ A\cap\overline{B}$はすぐ入る．
<かず子> また，まなぶったら簡単なところばっかり先にやっちゃうんだから．
<アリス> でも，ほかの部分も難しくないわ．$\overline{A}\cap B$の個数は，$A\cup B$の個数からまなぶが埋めた2つの集合を除いた部分だから，　$n\left(\overline{A}\cap B\right)=75-(15+40)=20$

$n(U)=100$ だから，残ったパーテーションの$\overline{A}\cap\overline{B}$の個数は，

$$n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=100-(15+40+20)=25$$

簡単に，パーテーションの個数が埋まったわ．

<まなぶ> そうすると，あれっ，もうみんなできていない． (1),(2)は終っているし，残りの(3),(4)は，

$n(A)=15+40=55$， $n(B)=15+20=35$

てことだよな．

<よしお> そうですね．式だけ見ると，

$$A\cup B=(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$$

$$A=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$$

といった式を全然意識しないで，求められていますね．

<まなぶ> よしおがいまいった式って普通は意識できないものだと思うけどな．

<先　生> なんかいつの間にかみんなで解決してしまったようだけど，ではもう一題だそう．

Ex) 1 から 200 までの整数で，次の数は何個あるか．
(1) 4 の倍数でない数　　(2) 6 の倍数でない数
(3) 4 の倍数であるが，6 の倍数でない数
(4) 4 の倍数でないか，または 6 の倍数でない数

<アリス> これは私もだめ．日本語はただでさえ分かり難いのに，この(4)の表現ったらどうかしてるわ．

<先　生> ごもっとも．否定的な表現は，婉曲的な会話を嗜む日本人好みではあるけど，確かに分かり難い．
そこで，カルノー図でこれを整理してみよう．
まず，全体集合をU，4 の倍数の集合，6 の倍数の集合をそれぞれA,Bとしよう．
$n(A)$, $n(B)$ を求めてごらん．

<かず子> $A=\{4\times1,\ 4\times2,\ 4\times3,\cdots\cdots,4\times50\}$ だから，$n(A)=50$ です．

<アリス> 同様に，$B=\{6\times1,\ 6\times2,\ 6\times3,\ \cdots\cdots,6\times33\}$ だから，$n(B)=33$ です．

<先　生> では，$A\cap B$の個数はどうなるだろう．

<よしお> $A\cap B$は，4 かつ 6 の倍数だから，4 と 6 の最小公倍数である 12 の倍数の集合ですね．

<まなぶ> ということは，

$A\cap B=\{12\times1,\ 12\times2,\ \cdots\cdots12\times16\}$

だから，$n(A\cap B)=16$ だな．

U	B	$\overline{B}$	
A	16	34	(50)
$\overline{A}$	17	133	(150)
	(33)	(167)	(200)

<先　生> これで準備終了．ではカルノー図を書いてごらん．

<かず子> えーっと，A,Bの要素の個数は分かったし，$n(U)=200$ だから，
それぞれの補集合の要素の個数を枠外に書き込んで……，できたわ．

<まなぶ> あとは簡単だな．ちょちょいのちょい……，終了．

<かず子> また，横取りする．

<アリス> これなんか，ナンバーズクロスとかナンバープレイスのようなパズルみたいで面白いわ．

<先　生> このカルノー図が完成した段階で，すべての問題の答えが導かれる．(1),(2)はもういいね．(3)は集合としては，
$A\cap\overline{B}$ だから，A と $\overline{B}$ の交わったところをみると 34 個となる．

<まなぶ> なるほど，そうすると(4)は$\overline{A}\cup\overline{B}$のことだから，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ の要素をあわせて，$17+34+133=184$ ということか．

<先　生> 要求している個数を集合として表せばカルノー図から簡単に求められることが分かるね．それでは，最後によくあるアンケート調査問題を考えてみよう．

Ex) 海外旅行をしたことのある 100 人に聞いたところ，イギリスに行ったことのある人は 48 人，フランスに行ったことのある人は 64 人であった．次の人数を求めよ．
(1) イギリスに行ったことがあり，フランスに行ったことがない人が 21 人であるとき，イギリスにもフランスにも行ったことのない人は何人か．
(2) イギリスとフランスの両方に行ったことがある人は，何人以上何人以下か．
(3) イギリスとフランスのどちらにも行ったことがない人は何人以下か．

<アリス> フランスですか．懐かしいわ．

<まなぶ> 僕と一緒にいけば，もっと懐かしい思い出作れるよ．

<かず子> アホ！！

<先　生> まず，イギリス，フランスのそれぞれにいったことのある人の集合をE,Fとしてカルノー図を書いてみよう．

<よしお> これは，簡単ですね．そして(1)で与えられている $E\cap\overline{F}$ のところに21人をいれます．
<アリス> あとは，ナンバーズクロスね．……はいっ，完成．
<かず子> そうすると，イギリスにもフランスにもいったことがないのは $\overline{E}\cap\overline{F}$ の部分だから，15人ですね．

U	F	$\overline{F}$	
E	27	21	(48)
$\overline{E}$	37	15	(52)
	(64)	(36)	(100)

<先　生> では，(2)はどうだろう．
<まなぶ> E と F の人数がそれぞれ48,64なんだから，その共通集合は当然，この人数より少ないはずだから48人以下だよな．だから0人以上48人以下が正解だと思うけど．
<よしお> 48人はいいと思うけど，0人を最少人数とすると，E と $\overline{F}$ の共通部分は48人になり，$\overline{F}$ の人数36人を超えてしまうよ．
<先　生> その通りだね．考え方としてはそのように各パーテーションの人数を比較しながら調べていくと求められる．これをオートメーションで求めてみよう．求める集合 $E\cap F$ の人数を n 人とする．残りのパーテーションの人数を n で表してごらん．
<アリス> はい，ナンバークロスは私に任せて．和が枠外の人数になるようにして，埋めていけばいいわ．……完成です．

U	F	$\overline{F}$	
E	n	$48-n$	(48)
$\overline{E}$	$64-n$	$n-12$	(52)
	(64)	(36)	(100)

<先　生> OK！．さて，どのパーテーションも，その中の数字は人数を表しているわけだから，0以上になる．
<かず子>　そうか．$n\geqq 0,\ 48-n\geqq 0,\ 64-n\geqq 0,\ n-12\geqq 0$　ということですね．
<まなぶ> なんだ．あとはこれから n の範囲を求めるだけじゃん．だから，

$12\leqq n\leqq 48$

が答え．
<よしお> (3)も簡単ですね．n は12以上48以下だから，$n-12$ の取りうる範囲は，0以上36以下．だから，36人以下ですね．
<まなぶ> ほんと，カルノー図を使うとすぐできてしまうんだ．カルノーさんは偉い．よくワカルノー，なんてね．
<かず子> あほらし，つくづくあなたは，軽い脳，カルノーね．

<あとがき>

ベン図に対してカルノー図が優位に立つのは，集合とその補集合が同位にあるからである．
ベン図は，集合を閉曲線で表すため集合と補集合は閉曲線の内と外に分けられてしまい見づらい．
比してカルノー図は，2つの集合 A, B の場合には全体集合を，4分割したパーテーションの部分集合に集合とその補集合が整然と並ぶ．具体的には，

共通部分である $A\cap B$，補集合の共通部分 $\overline{A}\cap\overline{B}$，差集合である $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$

の4つの部分集合が，2つの集合の交わりとして，同列に配置される．$A\supset B$ のような包含関係には適さないが，多くの集合問題においては便利な図といえるのである．
集合とその補集合が同位にあることで，ド−モルガンの法則も容易に理解できる．

I　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
II　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	
$\overline{A}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$	

	B	$\overline{B}$
A	$A\cup B$	
$\overline{A}$		$\overline{A}\cap\overline{B}$

どちらの性質も，1つのパーテーションと残り3つのパーテーションの関係をみると，一目瞭然であろう．法則が明らかなこととして図の中に示されるということは，カルノー図を用いての解法の過程では，ド−モルガンの法則は必要ないということになる．実際，本文の問題ではまったく利用していない．さらに，集合の要素の個数の性質

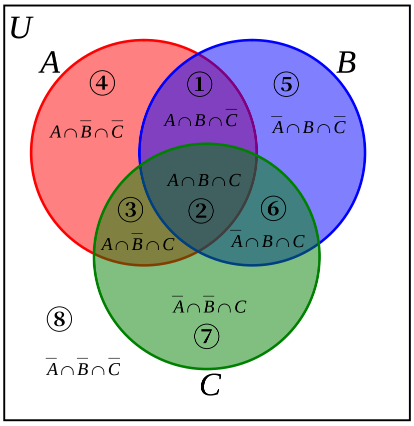
I　$n\left(\overline{A}\right)=n(U)-n(A)$
II　$n\left(A\cup B\right)=n(A)+n(B)-n\left(A\cap B\right)$

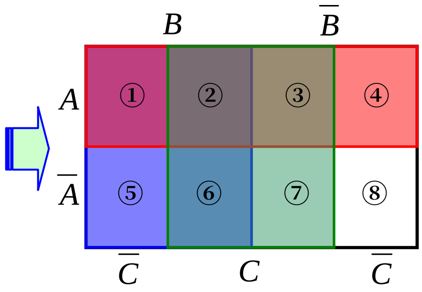
についても，4つのパーテーションの個数をカウントするだけの作業であるから意識することもない．
カルノー図は，集合の性質をビジュアルイメージ化できる効果的な図なのである．
ところで，本文中の最後の問題は，部分集合の個数の最大・最小数を求めるものであるが，この解法については以前，「集合による人数計算の小手技」の中で，スケールをつけたカードで示したことがある．視覚的に要素の個数の範囲を求めるものであるが，カードを動かしアニメーション化することで思考法をアナログ的に誘導することができる．これに比べ，カル

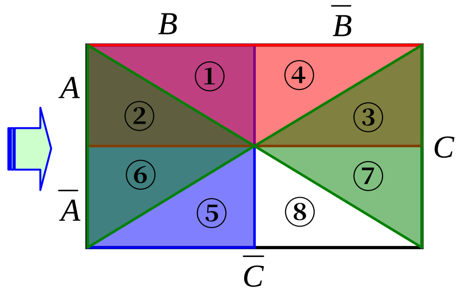
ノー図は，機械的に数値を埋め込むだけのデジタル的な解法であり，法則や性質をきちんと理解させるという点でいえば，使用法については留意すべきであろう．

カルノー図は，３つの集合 A,B,C についても表現することができる．

まず，水平方向に 2 分割し，上を集合 A，下を補集合 $\overline{A}$ とする．次に縦方向に 4 分割し，左 2 つを集合 B，残りを補集合 $\overline{B}$ とし，左端と右端を集合 C，残りを補集合 $\overline{C}$ とすればよい．下左図のベン図の①～⑧の部分集合が，カルノー図では，下中央図の番号に対応する．しかし，この分け方では集合とその補集合の配置のバランスはあまりよくない．そこで，改良したものを下右図として提示する．全体集合を２本の対角線で分割した４領域の三角形のうち，左右にある２つを集合 C，上下にある部分を補集合 $\overline{C}$ とする．番号の配置をみてもバランスがとれていることが分かるだろう．







Ex) 100 人のうち，A 市に行ったことのある人は 50 名，B 市に行ったことのある人は 13 名，C 市に行ったことのある人は 30 名であった．A 市と B 市に行ったことのある人は x 名，A 市と C 市に行ったことのある人は 9 名，B 市と C 市に行ったことのある人は 10 名であった．A 市と B 市と C 市にいったことのある人は 3 名，A 市にも B 市にも C 市にも行ったことのない人は 28 名であった．このとき，x の値を求めよ．（小樽商大）

解) A 市，B 市，C 市に行ったことのある人の集合をそれぞれ A,B,C とする．

まず，A,B,C およびその補集合の人数をカルノー図の枠外に記入する．

次に，3 つの部分集合の交わりとして与えられている

$$A\cap B\cap C,\ \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

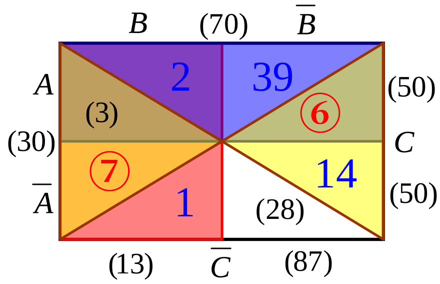
の人数を該当するパーテーションに記入する(図の括弧内の数字)．次に，2 つの部分集合の交わりとして与えられている

$$A\cap C, B\cap C$$

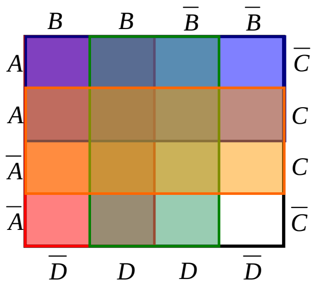
から求められるパーテーションの人数を記入する(図の丸数字)．

最後は，アリス曰く，ナンバーズクロスのように，縦横の合計が一致するように，パーテーションを埋めていく．これから，A 市と B 市に行ったことのある人の人数は

$$x=3+2=5\ (人)$$

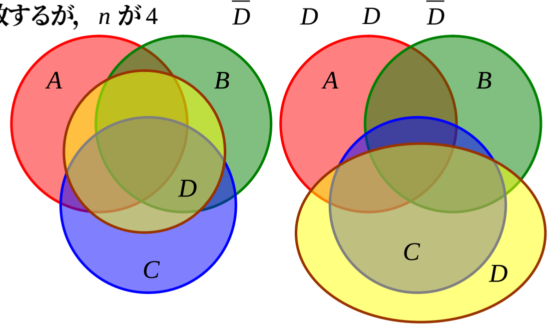


となる．さらに，このカルノー図の各パーテーション数をみると，どのような条件の集合の人数に対しても容易に求めることが可能である．例えば，A 市と B 市には行ったことがあるが C 市には行ったことがない人は 2 名．C 市だけに行ったことがある人は 14 名である．この問題はベン図では，8 つの領域の人数を a～h 人として連立 8 元 1 次方程式を解く方法が知られているが，カルノー図は解法をパズル感覚に換えてしまうのである．



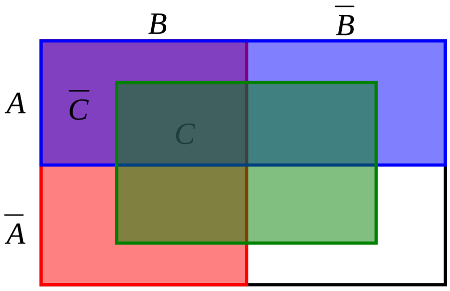
では 4 つの集合のカルノー図はというと，右図のように，縦横 4 分割し，全体を 16 分割することで得られる．しかし，これをベン図で表現すると，分割される部分は 14 領域となる．右下図をみると分かるように，３つの集合 A,B,C に対して４つめの集合 D を加えた場合，分割領域は同じではない．一般に平面に n 個の円を，どの円も他の円と異なる 2 点で交わるように加えていくと，平面全体は n^2-n+2 の領域に分割される．これに対して n 個の集合とその補集合の交わりの組み合わせは 2^n 通りであり，これがカルノー図の分割法の元になっている．この２つの分割は $n=1,2,3$ の場合はそれぞれ $2,4,8$ 通りで一致するが，n が 4 以上の場合は異なってくる．したがって，カルノー図で 4 つの集合とその補集合の交わりを調べる場合，２つのパーテーションは空白(0)となる．

もっとも，4 つの集合に関する問題となると，ナンバーズクロス的なゲーム感覚であってもカルノー図を用いても解きたいとは思わないが．



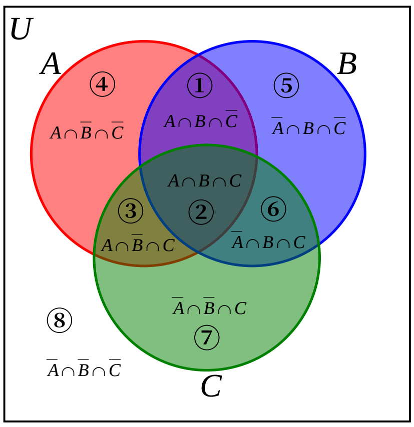
【キャロル図について】

脱稿後、ベン図、カルノー図の他に、集合の図示法として、「キャロル図」の存在を知りました。
考案者は、「不思議の国のアリス」の作者であるルイス・キャロル(*Lewis Carroll*:1832〜1896)。ルイス･キャロルは、作家としてのペンネームで、本業はオックスフォード大学の数学者・論理学者であり、本名はチャールズ・ラトウィッジ・ドジスン(*Charles Lutwidge Dodgson*)といいます。チャールズおよびラトウィッジの名前をラテン語に読み替えさらに英語化した言葉遊びにより、ルイス・キャロルという大児童作家が生まれました。「不思議の国のアリス」や「鏡の国のアリス」は、ストーリーの面白さだけでなく、言葉遊びに散りばめられたロジックを追っていくと、数学書にもなります。彼の名前と同様に、二面性を持っている書物ともいえます。

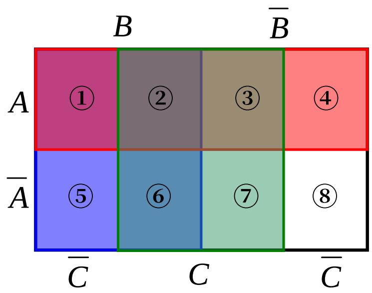


さて、論理学者であるルイス・キャロルが発案したキャロル図は、変形のカルノー図ともいえるものです。2つの集合 A, B をカルノー図のように4つのパーテーションに分けたあと、集合 C を集合 A, B のパーテーションを含むようにその内部に閉曲線で作ります。右図は長方形で集合 C を表現していますが、円で表すと、ベン図ともいえるでしょう。ベン図とカルノー図の「いいとこどり」をしたのがキャロル図であるわけです。
3つの集合図のパーテーションの配置関係を見るとそれぞれに特色がありますが、集合の細分化という点ではキャロル図が最も優れているかもしれません。

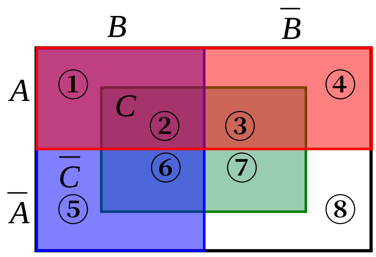
ベン図



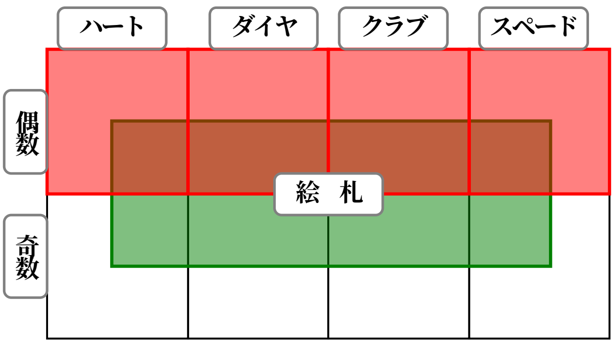
カルノー図



キャロル図



例えば、トランプのカードには、いくつもの要素が隠されています。
数字(1〜13)、絵札(J,Q,K)、
種類(ハート、ダイヤ、スペード、クラブ)、色(赤、黒)
その組合せによって、何十というカードゲームが作られることになり、複雑さも増すわけです。
だから、
「絵札かあるかないか、数字は偶数か奇数か、種類は何か」
といった情報を図で表すとしたら、キャロル図は適しているといえるでしょう。



ところで、キャロル図は、もともと論理ゲームとして考案されたものです。ボードを縦横4つに区切り、内部に長方形を置きます。長方形によって、内部・外部の領域に分けられますが、キャロルは命題の対象となる事象を「……たちの宇宙」と名づけました。この宇宙が真理集合の全集合になります。縦横で分けている線は軸であり、座標平面が作られるわけです。そして、それぞれの領域がもつ属性を考えながら、ボードの領域に、Yes を表す赤いピース、No を表すグレーのピースを命題の条件を考えながら配します。その配置の状態をみて、三段論法のような命題の真偽を求めました。
キャロルはこの論理ゲームを幼稚園の児童用に作ったようで、友人の女性に頼み、ためしてもらったとのことです。女性は子どもと一緒にゲームを始めましたが、そのうち訳が分からなくなり、大学院の学生でもこのゲームを楽しむことは無理であるという結論にいたったようです。ルイス・キャロルらしい逸話といえるでしょう。
ゲームの内容は、次の本で紹介されています。

キャロル大魔法館　ジョン･フィッシャー(高山宏 訳) 河出書房新社