円の接線と極線の小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○災い転じて福となす

<先　生> まず，接線の方程式の確認問題で前時の復習をしよう．

> Ex)次の円の点 P における接線の方程式を求めよ．
> (1)　$x^2+y^2=8$　$P(2,-2)$　　　(2)　$x^2+y^2=5$　$P(3,1)$

<かず子> あの接線をあっという間に求める公式を利用する問題ですね．
(1)は，x と y をひとつずつをそれぞれ 2，－2 に換えて，

$$2x-2y=8$$

両辺を 2 で割って，$x-y=4$　です．

<まなぶ> (2)はもっと簡単だ．

$$3x+y=5$$

いつになく易しい問題だね．先生．

<よしお> うーん．まなぶ，違うと思うよ．

<まなぶ> 突っ込まなくても分かるよ．問題がやさしいといったんで，先生が優しいといった訳ではないから．

<よしお> そうじゃないよ．まなぶが使った公式は，

> 円 $x^2+y^2=r^2$ の円周上の点 $P(a,b)$ における接線の方程式は，
> $$ax+by=r^2$$

だよね．

<アリス> 私も分かったわ．(2)の場合は，点 $P(3,1)$ は円周上の点でないわ．

<まなぶ> えっ？，あっそうか．点 P は円の外側だ．ひどいや，やっぱりやさしくないや．だいたい，これ全然確認の問題になってないでしょ．

<先　生> (2)は接線を求めるというよりは，学んだ公式の条件を的確に理解して使えるかどうかの確認なんだ．

<まなぶ> でもいつものひっかけでしょ．そして(2)の問題は，「ではどう解くのだろう」って先生はつなげるわけだから，結局，僕がダシに使われたことには変わりない．

<先　生> 相変わらずそういう読みだけは鋭いな．でどう解く．

<かず子> 接線は明らかに y 軸に平行でないですよね．とういことは，傾きを m とおけば，点 $P(3,1)$ を通るから接線の方程式は，

$$y=m(x-3)+1$$

となりますね．

<先　生> そのあとを続けてみよう．

<アリス> 判別式でしょうか．円の方程式に代入し，x の 2 次方程式を作って $D=0$ ですよね．

<よしお> あるいは点と直線の距離の公式を使ってもいいと思います．円の中心である原点と接線との距離は円の半径 $\sqrt{5}$ に等しいですよね．

<まなぶ> じゃあ，アリス法は僕が．接線の方程式を円の方程式に代入して

$$x^2+(mx-3m+1)^2=5$$

これを展開して整理すると……

$$(m^2+1)x^2+2m(-3m+1)x+(-3m+1)^2-5=0$$

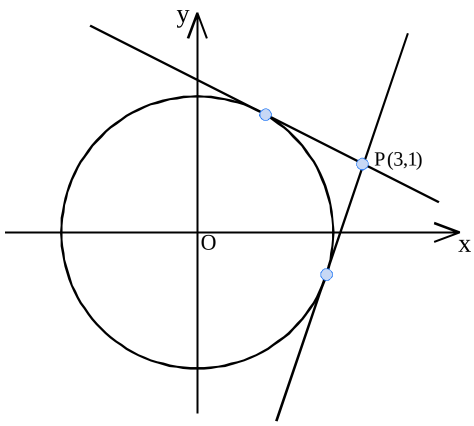
……，そういえば，以前，先生がこういう計算は全部展開しないで，ぐっと我慢するっていってたなよ．がまん，がまん．
判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=m^2(-3m+1)^2-(m^2+1)\{(-3m+1)^2-5\}\\&=-(-3m+1)^2+5(m^2+1)\\&=-4m^2+6m+4\end{aligned}$$

うまくいったぞ．ここで，$D=0$ だから，

$$2m^2-3m-2=0\qquad(2m+1)(m-2)=0$$

$$\therefore\quad m=-\frac{1}{2},2$$



できた．あとはmを元の式に代入して，$2x-y-5=0$，$x+2y-5=0$

そうか．この場合，接線は２つあるんだ．

<かず子>何一人で悦にいってるのよ．でも判別式での求め方だと計算の工夫しないとちょっと大変．よしおの方が計算はラクそうね．わたしやってみるわ．

接線の一般形$mx-y-3m+1=0$と原点との距離だから，

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

ね．両辺を平方してまとめると，

$$(-3m+1)^2=5(m^2+1)$$

これより，$2m^2-3m-2=0$

あとは，まなぶがやった計算と同じ．やっぱりこっちの方がラクだわ．

<先　生> どちらもいいね．ではそのときの接点も求めてごらん．

<かず子> 求めた接線と円の方程式の連立方程式の解の組を計算すればいいわ．

<よしお>かず子，もう少し簡単にできるよ．接点といったら，必ず「円の中心と結べ」だろ．その直線の方程式は，接線に垂直で原点を通るから，

$m=-\frac{1}{2}$のときは，$y=2x$　　$m=2$のときは，$y=-\frac{1}{2}x$

これと接線との連立方程式の解を求めた方がいいと思うよ．

<まなぶ> でもアリス法だともっとラクだよ．２次方程式

$$(m^2+1)x^2+2m(-3m+1)x+(-3m+1)^2-5=0$$

が重解をもつときの値が接点のx座標だから，

$$x=-\frac{m(-3m+1)}{m^2+1}$$

この式に，２つの傾きmの値を代入すれば終わりだ．

<先　生>テクニカルな解法だね．それはどちらの方法も計算でやっかいな部分があるからだ．これを，円周上の点の接線の公式を用いることでもっと簡略化できる．

<まなぶ> 円周外の点なのに，円周上の点で考えるのですか．

<先　生>そうではなく，接線を求めるには，接点，すなわち円周上の点を求め利用した方が組し易いということだ．例えば接点を(a,b)とおくと，これが分れば，接点も接線もたちどころに求められるだろ．

<よしお> 接点を(a,b)とするということは，とりあえず接線の方程式は，

$$ax+by=5 \qquad \cdots\cdots(*)$$

とおけるということですね．これからa,bの関係式を作るには……．

<かず子> 点$P(3,1)$は接線$ax+by=5$上の点ですね．ということは，点Pを代入すると

$$3a+b=5 \qquad \cdots\cdots①$$

これで，一つ関係式が見つかったわ．

<まなぶ> あとひとつ関係式があれば，連立方程式を解いて求められる．aとbの関係だから……．

うん，接点だから円周上の点でもある．だから円の方程式に同じように代入して，

$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots②$$

この２式から，求めればいいんだ．

<アリス> あとは簡単ね．bを消去して，

$$a^2+(5-3a)^2=5 \quad より，\quad a^2-3a+2=0 \quad \therefore \quad a=1,2$$

以上より接線の方程式は，(*)から

接点$(1,2)$のとき，$x+2y=5$

接点$(2,-1)$のとき，$2x-y=5$

ほんと．スムーズに求められたわ．

<先　生> 円の接線を求めには，円周上であろうと，円周外であろうと，いつも「接点」という key-Word を押さえておくとそこを出発点に道筋を立てれる．何事も基本が大切だってことだな．

<まなぶ> ちょっと先生，まとめに入らないでよ．気になっていることがあるんだけど．僕が計算した式って直線を表してるよね．これって，何かもともとの円に関係しているの．

<よしお> どういうこと．

<まなぶ> だって，円周上の点の場合が接線なら，円周外の点を代入した式だって何がしかの意味があってもいいだろ．

<先　生> みんなはどう思う．

<かず子> そういう疑問をもつのは大事だって先生はいつもいってるけど，この場合は，先生の落とし穴に引っかかったまなぶの腹いせのような気もするけど．

<アリス> わたしはまなぶがいってること，なんとなく気になるわ．

<先　生> ではちょっと調べてみようか．まずまなぶが間違えて求めた直線と円との位置関係を点と直線の距離を用いて計算してみよう．

<かず子> はい，円の中心とまなぶが間違えてだした直線との距離は， $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ です．

<よしお> そうすると，これは，円の半径 $\sqrt{5}$ より小さいから，まなぶが間違えてだした直線は円と２点で交わっている．

<先　生> ということだね．では，まなぶが間違えてだした直線と円との交点を求めてみようか．

<アリス>　円　$x^2+y^2=5$ と，まなぶが間違えてだした直線 $3x+y=5$ を連立させればいいから……．

<まなぶ> ちょっと待ってよ，みんな．その「まなぶが間違えて出した直線」って言い方止めてくれない．アリスまで同調しちゃうんだから．

<アリス> ごめんなさい．何となく雰囲気に乗ってしまいました．とにかく，連立方程式を解けばいいのね．

<まなぶ> 待って，待って．

<アリス> わたしまた何か気に触ることいった？

<まなぶ> 違うよ．今解こうとしている連立方程式，先ほど解いた a,b の連立方程式①，②と同じだよ．

<かず子> ほんとだ． a,b が x,y に変わっただけだ．ということは， $(x,y)=(1,2),(2,-1)$ ね．

<よしお> ということは，この２点は接点でもあるね．

<まなぶ> これって，偶然，それとも必然．

<先　生> 実は必然だ．円周外の点を公式に適用した場合に得られる直線は２接点を通る直線を表しているんだ．

理由はそれほど難しくはない．説明しよう．

先ほど円周外の点であっても，Key-Word は接点といったね．

円を $x^2+y^2=r^2$，円周外の点を $P(a,b)$ とし，点 P から円に引いた２接線の接点をそれぞれ，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

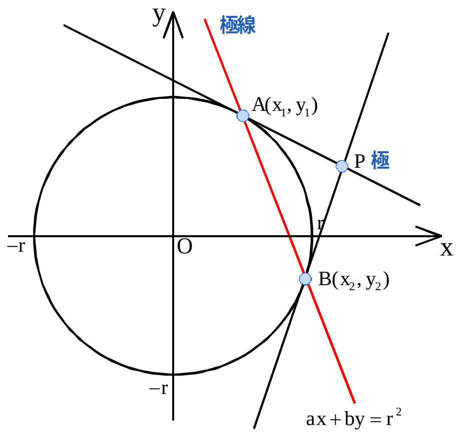
とする．この２接点 A,B における接線の方程式は，それぞれ，

$x_1x+y_1y=r^2$，$x_2x+y_2y=r^2$

だね．ところが，点 $P(a,b)$ は，接線上の点だから，代入して，

$ax_1+by_1=r^2,\ ax_2+by_2=r^2$

が成り立つ．ここで，この２つの式の違いをよーくみてごらん．



<よしお> ２つの式は， x_1 が x_2 に， y_1 が y_2 に代わっているだけです．

<先　生> そうだね．言い方を変えると，

$ax+by=r^2$　……(*)

の x,y の値を， x_1,y_1， x_2,y_2 に変えただけということ．

<かず子> あっ，(*)はまなぶが間違えて出した方程式だわ．

<まなぶ> しつこい．ということは，(*)は直線を表しているし，その直線が $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ を代入しても成り立っているわけだから，なるほど，２接点を通る直線になっている．

<先　生> 結論が得られたね．実は，このときの点 P を円の極といい，極から円に引いた２接線の接点を通る直線を極線というんだ．まとめてみようか．

> 円 $x^2+y^2=r^2$ と，点 $P(a,b)$ が与えられたとき，
>
> 方程式　$ax+by=r^2$　は，
>
> ① 点 P が円周上の点であるときは，接線
>
> ② 点 P が円周外の点であるときは，極線
>
> を表す．

接線も極が円周上にあるときの極線とみなせばもっとスッキリまとめられるね．どうやら，まなぶの怪我の功名だな．

<まなぶ> あのね．オレ，全然ケガしてないって．あれは陰謀だって．

ということは，先生．円周外から引いた接線の求め方は，もう一つ別の方法を考えることできるよね．

<かず子> また好からぬこと考えてない．

<まなぶ> 真面目だよ．だってね．先生は，点がどこにあろうと接点を求めることが Kew-Word っていってた．だったら，極線の性質を知っていれば，それと円との交点が接点ってことでしょ．

<先　生> まさにその通りだね．それは先生も気がつかなかった．

<まなぶ> やったー．解答は次のようになる．

点 $P(3,1)$ の極線の方程式

$3x+y=5$　…①

と，円

$x^2+y^2=5$　…②

との交点が接点である．あとは，これを解いて終わり．

どうだい．接点も接線もいっぺんに求められるだろ．

<アリス> 本当だ．凄く簡単で分かりやすいわ．先生，私もひとつ発見したわ．私が最初考えた傾きを m とした求めた方法なんですけど，接線の方程式は，

$$y=m(x-3)+1$$

となりますよね．ということは，これを変形して，

$$mx-y=3m-1$$

ここで接線と円の位置関係から $3m-1\neq 0$ だから，式を変形して，

$$\frac{5m}{3m-1}x-\frac{5}{3m-1}y=5$$

このときの x, y の係数をみると，

$$\left(\frac{5m}{3m-1},\frac{5}{3m-1}\right)$$

これは，円の接点ですよね．

<よしお> 僕もそう考えてもいいと思います．これから，この点は円周上の点でもあるから，

$$\left(\frac{5m}{3m-1}\right)^2+\left(\frac{5}{3m-1}\right)^2=5$$

整理して，

$$5m^2+5=(3m-1)^2$$

あとはこれを解く．確かにこれでも，傾きも接点もでてしまう．

<かず子> あっ，この方法，点と直線の距離でやった後半にも使えるわ．

２接線が，

$$2x-y-5=0\text{，}\quad x+2y-5=0$$

とでたら，

$$2x-y=5,\ \ x+2y=5$$

とみてやる．そしたら，接点はそれぞれ $(2,-1),(1,2)$ だわ．

<先　生> どうやら，ばらばらに思えたそれぞれの解法が，極線を糸口につながったみたいだね．今回は本当に，まなぶのケガの巧妙だな．

<まなぶ>違うって．ケガしてないって．それをいうなら「災い転じて福となす」だよ．いつも死神のような先生からの災いに僕がどんなに苦労して対処しているか分かって欲しいな．

<アリス> 私，今回は何となく，それ分かる気がします．

あとがき

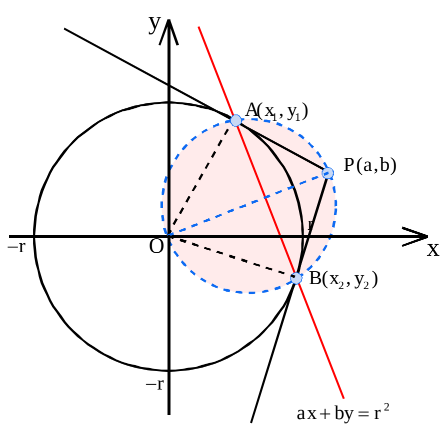
円周上の接線の確認に，本文のような進め方は常套手段といっていいでしょう．

心理誘導のひとつに「ミスディレクション」というのがあります．マジシャンなどが「観客の視線や思考などを間違った方向に誘導」することで，よりマジックの仕掛けの驚きを大きくする演出法です．この誤認誘導は授業でも指導法として用いられます．ワザと生徒が間違えるような問題を提示し，それを指摘しインパクトを強めることで，理解を深めるわけです．

円周上の点の接線の公式を確認する場合，簡単な問題を何題か与えておいて，その思考に慣らしていき，やおら円周外の点をそれとなく入れてやると，多くの生徒はこの時点で引っかかります．そこで「違っているだろう！」と注意を促すと，それ以降は，生徒は点が円周上にあるかどうか確認するようになるのです．

本文ではさらにその後，「では間違えて求めてしまった直線は何なのだろう」というところまでシミュレート的に授業を展開しています．極線の問題は教科書では触れていませんが，２曲線(円，直線)の交点を通る曲線群は，発展問題としてとり上げられるのが常です．その説明に用いる手法は本文での極線の説明と同じであり，こちらの方が生徒にとっては分り易いともいえるのです．であれば，極線を説明し，接線の考えを統一した後に，２曲線の交点を通る曲線群の話題に扱った方が効果的・効率的であると思うのですが，どうでしょうか．

極線が２接点を結ぶ直線であることの別証明を述べておきましょう．



証明1) ２接点を A, B とすると，接線の性質から，

$$OA\perp AP\text{，}\ OB\perp BP$$

である．よって，４点 O, A, B, P は OP を直径とする同一円周上の点であるから，

円の中心は $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$，半径は $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$

である．これから，円の方程式は，

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

これを整理すると，　$x^2+y^2-ax-by=0$

※　線分 OP に対して，OQ⊥QP となる点 Q の軌跡が，OP を直径とする円とみると

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{QP}=0$ より，$(x,y)\cdot(x-a,y-b)=0$ より，$x^2+y^2-ax-ay=0$

この円と，円 $x^2+y^2=r^2$ との交線を求めて，

$$ax+by=r^2$$

証明2)　接点の一つを $A(x_1,y_1)$ とし，直線上の点を $Q(x,y)$ とおく．

$AQ\perp OP$

より，$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

∴　$(x-x_1,y-y_1)\cdot(a,b)=0$

これから，$ax+by=ax_1+by_1$

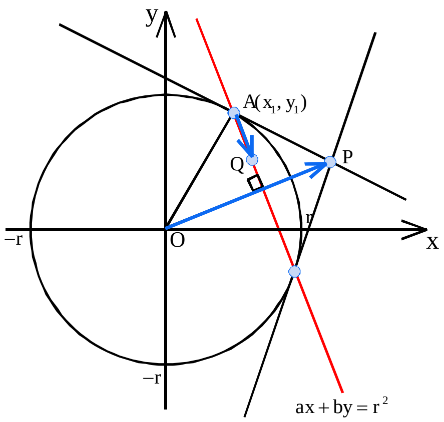
ここで，三角形 OPA において，

$\angle OAP=90°$

であるから，内積の性質より，

$$ax_1+by_1=(a,b)\cdot(x_1,y_1)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=r^2$$

$$\therefore\quad ax+by=r^2$$



どちらも，その解法の過程は重要なものといえるでしょう．

なお，「円周外の点を代入した直線は何を意味するか」という誘導をするのであれば，当然，「円内の点は何を意味する」という疑問をぶつける生徒がでてくるかも知れません．

この場合は，

$OP=\sqrt{a^2+b^2}<r$

であることより，原点と直線 $ax+by=r^2$ との距離を求めると，

$$\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{r^2}{r}=r$$

より，極線は円と交わらず，円外にあることになります．

さらに，$ax+by=(a,b)\cdot(x,y)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}$ より，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}=r^2$

よって，直線上の2点を，X_1,X_2 とすると，

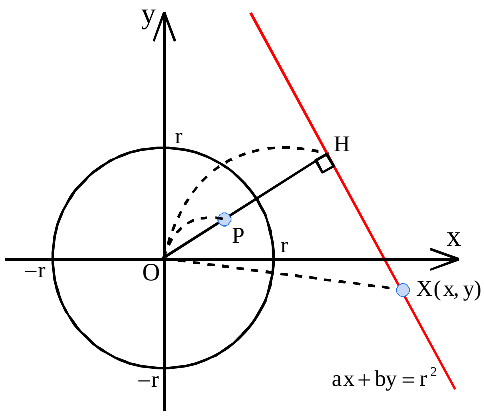
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX_2}=r^2$

より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}=0$

これより，極線は，OP に垂直な直線であることが分ります．

また，原点から極線に下ろした垂線の足を H とすれば，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}=OP\cdot OH$



すなわち，

$OP\cdot OH=r^2$　　……(*)

なる関係式が得られます．(*)を用いることで，極の位置から極線の存在を調べることが可能になるわけです．

一般に，点 O を中心とする半径 r の円があり，O と異なる点 P に対して，O を端点とする半直線 OP 上の点 P′ が

$OP\cdot OP'=r^2$

を満たすとき，点 P から点 P′ に写す変換を

中心 O，半径 r の円による反転(反形)

といいます．極と極線の関係も反転を用いると面白い性質が見えてきます．

ところで，本文の後半に，極線から接線の接点を求めるくだりがありますが，極線に対して極が一意に決定する説明がなくては不十分であるかもしれません．確認しましょう．

円を $C:x^2+y^2=r^2$，直線を $\ell:ax+by+c=0$ とします．

直線 ℓ を円 C の接線とします．

このとき円の中心 O と接線との距離から，

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r\qquad\cdots\cdots(*)$$

なる関係が成り立ちます．

この条件で，接点を求めてみましょう．

円 C の中心と接点を結ぶ直線は，

$$bx-ay=0$$

これから，直線ℓとの交点を求めると，

$$x=-\frac{ac}{a^2+b^2}=-\frac{a}{c}\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}=-\frac{a}{c}r^2$$

同様に，$y=-\frac{b}{c}r^2$

接点は$\left(-\frac{a}{c}r^2,-\frac{b}{c}r^2\right)$となります．

これは，条件(*)が成立するとき，

$ax+by+c=0$　から

$$-\frac{a}{c}r^2x-\frac{b}{c}r^2y=r^2$$

と変形することにより，x,yの係数に一致しており，接点が求められることになります．

また，円Cと直線ℓが異なる2点で交わるときの条件は，

$$0<\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$$

であり，このとき直線と円の2交点におけるそれぞれの接線は，1点Pで交わります．

この点Pが極，直線ℓが極線であることは明らかであり，このときも極の座標は，$P\left(-\frac{a}{c}r^2,-\frac{b}{c}r^2\right)$で与えられます．

最後にこのことを用いた問題を1題，解いてみましょう．

円$x^2+y^2=1$をCとし，点$A(2,0)$を通り，傾きaの直線をℓとする．直線ℓが円Cと交わるとき，次の問いに答えよ．ただし，$a<0$とする．

(1) 直線ℓが円Cに接するとき，aの値と接点を求めよ．

(2) 直線ℓが円Cと異なる2点B,Cで交わるとき，B,Cにおけるそれぞれの接線が交わる点をPとするとき，点Pの軌跡を求めよ．　<センターテスト改題>

解)

(1) 直線ℓの方程式は，

$y=a(x-2)$　より　$ax-y-2a=0$

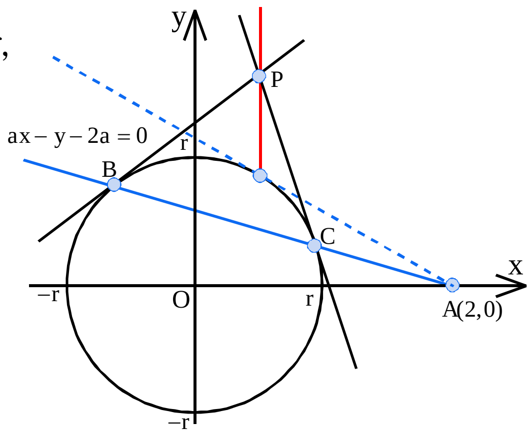
これを変形して，

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2a}y=1\qquad\cdots\cdots(*)$$

接するときの接点の座標は$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2a}\right)$である．これを円$C$に代入して，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4a^2}=1\quad a<0\quad \text{より，}\quad a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

このとき接点は$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



(2) 直線ℓと円Cは異なる2点で交わるから，

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<a<0$$

(1)の(*)より，交点(極)の座標は$P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2a}\right)$である．

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{1}{2a}$$

これより　点Pの軌跡は，直線$x=\frac{1}{2}$　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}<y\right)$である．

今回，4人の相関図は，

まなぶ ⇔ アリス VS よしお ⇔ かず子

という様相を呈してきました．ちょっとは楽しみな展開です．