ランダムウォークの確率の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

酔歩の道筋を追え!!!

<先　生>今回は数直線上を動く点の確率を考えてみよう.

> 左右へ延びた直線上を動く点があって，硬貨を投げて表がでたら右へ２だけ進み、裏が出たら左へ１だけ進むものとする. 硬貨を６回投げるとき，次のそれぞれの確率を求めよ.
> (1) 点が出発点にもどる確率
> (2) ６回投げて，はじめて出発点にもどる確率

<よしお> ランダムウォーク(random walk)の問題ですね．出発点を数直線の原点と考えて，右へ進む回数を n 回とすると動点の座標 P(x) は,

$$x = 2n - (6 - n) = 3n - 6$$

$x = 0$ のとき， $n = 2$ だから，右に２回，左に４回進めば原点，すなわち出発点に戻れます.

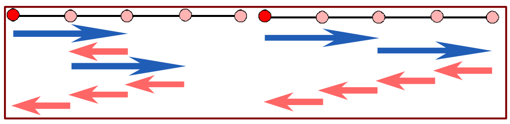
<まなぶ> あとは硬貨の表裏のでる順番を考えるだけだな.

１枚の硬貨の表と裏のでる確率はどちらも $\frac{1}{2}$ だから，反復試行の確率を考えると，(1)は,

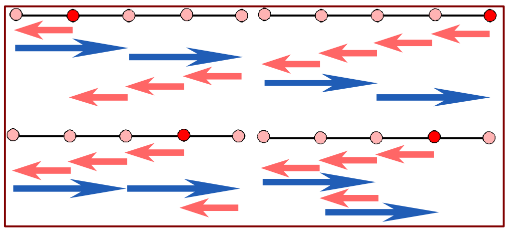
$${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

はい，おしまい.

<アリス> 次は(2)ですね.「はじめて」ということは……. うーん, どうしよう.



<かず子> 確率問題で分からなくなったときの対処法は場合の数をひたすら書き抜くことよね. まず，最初に右に進む場合で書き抜いてみると，図のように右に１回だけと，２回連続して進む場合で以後の動きが確定するから２通りね.



<アリス> なるほど. では私は最初に左に進む場合について書き抜いてみるわ. 左に１つだけ進むときと，左に連続して４回進むときは，自然にそれ以降の進み方は確定するわ．左に連続して２回進むことは次に右に進んだとき原点を通るからありえないから，あとは左に連続して３回進む場合ね. これはさらに２つのケースが考えられるわ．以上より４通りとなるから，右に進む場合と合せて６通りね. したがって,

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{32}$$

<まなぶ> あのね，二人が書き抜いているのを見て気がついたのだけど，「原点を通らない」ように場合分けしていたけれど，それなら途中で原点を通る場合はどんなときか考えてみたらどうだろう.

<よしお> 余事象を考えるってことだね. 右１回に対して左２回で原点の位置に来るから，原点を通るまでの全体の回数は３の倍数になっていればいいってことだね.

<かず子> ということは, ６回以外で原点の位置に戻るのは３回のときだわ. そのあとまた３回で再び原点に戻ればいいってことね. だからその確率は,

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{64}$$

(1)の結果から,

$$\frac{15}{64} - \frac{9}{64} = \frac{3}{32}$$

<先　生> できたね. とりあえず場合の数を書き抜いて，そこから論理的によりベターな求め方を推論する．常套手段だね. ではね. もっと回数を増やして，例えば１２回の試行で初めて原点に戻る確率を求めるにはどうすればいいだろうか.

<アリス> 原点の位置に来る場合は，３回，６回，９回，１２回だから，わーっ，パニック！！

<先　生> 左右の動きしか見えない数直線上の運動は，動きが重なってしまうから見えにくくなってしまい，ちょっと複雑な条件になると対応することができない．そこで，この動きを視覚的に捉えることを考えてみよう.

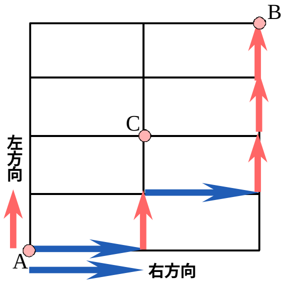
<よしお> 一次元の運動だと重なってしまうから，重ならないようにするってことは……，二次元にするってことですか.

<先　生> 正解だ.

さて，どうすればいいかということだけど，簡単だ．左方向の移動を上方向の移動に移してやる．どういう動き方になっていくだろう.

<まなぶ> 単に直線が原点で90° に曲がっているだけだと思うけど…，右と上に動いていくと，あっ，最短経路の問題になる.

<かず子> わたしも分かったわ．右方向と左方向に動いた点を格子点に対応させるのですね．
例えば，(右 左 右 左 左 左) の進み方は図のような経路になります．



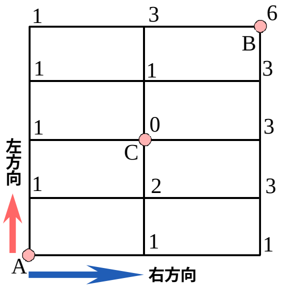
<まなぶ> ということは，図の A 点から B 点までの経路が(1)の場合の数になるな．では(2)はというと，点 B 以外で原点に戻るのは右 1 回左 2 回の場合だったから，図の C 点ということだよね．なあんだ，結局 C を通らないで点 A から点 B へ進む最短経路を考えればいいんだ．
<アリス> ほんとうに凄く見やすくなったわ．こう考えると最短経路の基本問題ですよね．点 C を通る場合の数を求めて，

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 9 \quad \text{(通り)}$$

これを，全体の経路

$${}_6C_2 = 15 \quad \text{(通り)}$$

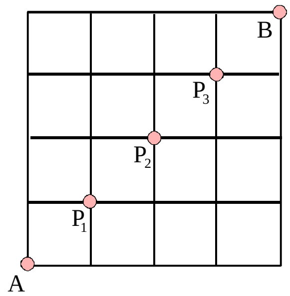
から引けばいい．すなわち 6 通りが点 C を通らない最短経路だわ．
<かず子> あるいは，直接格子点に集まる経路数を数え上げてもいいわ．図の中に場合の数を書き込んでいって……，完成，6 通りになったわ．



<先　生> いまかず子が書き込んだのは先ほど，数直線上の場合の数を数え上げたことと同じことだ．でもこちらの方が，スムーズに数えることができることが分かるね．
<よしお> なるほど，こうやって平面的に捉えてしまうと硬貨を投げる回数が増えても同じようにできてしまいますね．
<先　生> そうだね．それでは回数を増やした問題で考えてみよう．

> 数直線上を動く点 P がある．P が原点を出発点として，さいころを振って偶数の目がでたら右に 1 進み，奇数の目がでたら左に 1 進むとする．さいころを 8 回振るとき，8 回目にはじめて原点の位置に P が止まる確率を求めよ．

<まなぶ> まず経路図を作ってみます．左右の移動幅はどちらも 1 だから，原点に戻るには右と左に同じ回数だけ動けばから，右 4 回，左 4 回ですね．したがって，図の経路ができます．
この中で，原点に止まるのは，2 回，4 回，6 回めで図の P_1, P_2, P_3 の位置になるから，結局この 3 点を通らないで，A から B へ進む最短経路の場合の数が求めるものですね．



<先　生> では求めてごらん．
<かず子> まず，全体の最短経路数は

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \quad \text{(通り)}$$

ですね．この中から，途中で原点を通っている場合を抜けばいい．でもこれって大変ですよね．
<先　生> こういう場合は，数理論理的に考えてごらん．
P_1, P_2, P_3 のそれぞれを通る場合の事象を同じように P_1, P_2, P_3 とすると，「P_1, P_2, P_3 を通らない」ことはどう表わされるだろう．
<アリス> えーっと，「P_1 も P_2 も P_3 も通らない」ってことだから，

$$\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}$$

ということですね．
<よしお> ということは，ド・モルガンの法則を使えば，

$$n\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right) = n\left(\overline{P_1 \cup P_2 \cup P_3}\right) = n(U) - n(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \qquad (U: \text{全事象})$$

ここで，

$$n(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$$
$$= n(P_1) + n(P_2) + n(P_3) - n(P_1 \cap P_2) - n(P_2 \cap P_3) - n(P_3 \cap P_1) + n(P_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

<まなぶ> この計算は大変だけど，僕が求めてあげよう．

$$n(P_1) = {}_2C_1 \times {}_6C_3 = 40, \quad n(P_2) = {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36, \quad n(P_3) = {}_6C_3 \times {}_2C_1 = 40$$
$$n(P_1 \cap P_2) = {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_2 = 24$$
$$n(P_2 \cap P_3) = {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 24$$
$$n(P_3 \cap P_1) = {}_2C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 24$$
$$n(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 16$$

よって，

$$n(P_1 \cup P_2 \cup P_3) = (40 + 36 + 40) - (24 + 24 + 24) + 16 = 60$$

したがって，

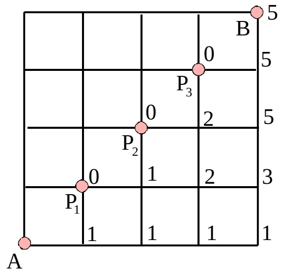
$$n\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right) = n(U) - n(P_1 \cup P_2 \cup P_3) = 10$$

<アリス> これで場合の数が求まりましたね．あとは確率ですが，さいころを振ったとき偶数，奇数の目がでる確率はどちらも $\frac{1}{2}$ で

あることより，ひとつの最短経路に対して$\left(\frac{1}{2}\right)^8$の確率になるから，

$$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{5}{128}$$

できました.

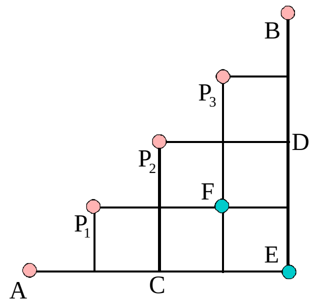


<かず子> ふう，大変．わたしはやっぱり図の格子点に集まる経路数を直接書き込むのが一番手っ取り早いと思うな.
まず，線分 AB の右下の経路を数えると図のようになるわ．あとは同様に左上の経路を数えて…….

<よしお> ちょっと待って，図の右下と左上の部分は直線 AB に関して対称だから，同じ経路数になると思うよ.

<かず子> そうよね．なんだ，そうしたら２倍するだけで求められるわ．だから１０通り．先ほどの解答よりずっと簡単にでちゃったわ.

<先　生> いま，よしおは重要なことをいっていた．経路問題は「対称性」を考えれば場合分けが楽に求められることがある．この場合は線分 AB の右下だけを求めれば対称性から全体も求められた．ではこの右下の部分もさらに対称性を利用して求めるとどうなるだろうか.

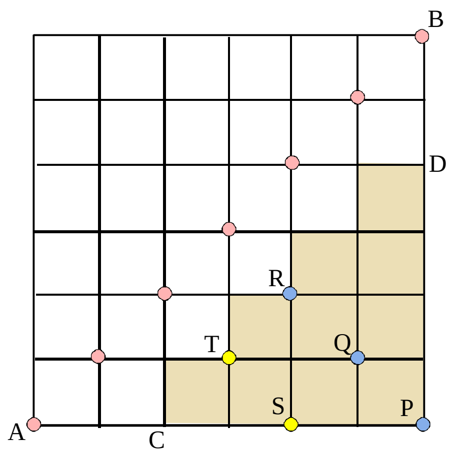


<まなぶ> 対称な図形をみつけろってことですよね. 図形は直角二等辺三角形だから, 線分 AB の垂直二等分線に関して対称ですね.

<先　生>　そう，その通り．垂直二等分線と交わる格子点を図のように，E, F としてみよう.
そうすると，$A\to E$ と $E\to B$，$A\to F$ と $F\to B$ の経路数は対称性から等しいことが分かるね．さらに点 A を出発すると，必ず図の点 C へ進み，点 D も点 B に進むから，結局 C から図の D への最短経路を求めればいいことも分かるね.

<よしお> やってみます.
まず，$C\to E\to D$ は，$1\times1=1$
$C\to F\to D$ は，${}_2C_1\times{}_2C_1=4$
合せて 5 通りだから，全体は 10 通り.
本当に簡単に出来てしまいました.

<先　生> この方法でさらに１２回の場合を考えてみようか.



<かず子> まず図のように始点を C，終点 D とし， AB の垂直二等分線上に P, Q, R を考えます．あとは C から D への最短経路を P, Q, R で場合分けすればいいのですね.

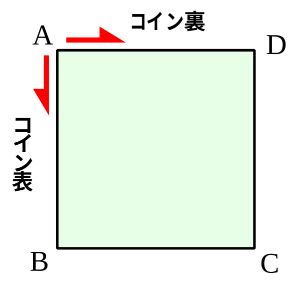
<アリス> $C\to P\to D$ は１通り.
$C\to Q\to D$ は ${}_4C_1\times{}_4C_1=16$ (通り)
$C\to R\to D$ は…，困ったわ．矩形の左上の端点が通れないわ．この点はあとから除かなくては．だから，
${}_4C_2-1=5$ (通り)

<よしお> それでもいいけど，対称性を考えるなら，$C\to R$ の道筋は線分 CR の垂直二等分線上の格子点 S, T で場合分けもできると思う.
$C\to S\to R$ は１通り.
$C\to T\to R$ は，${}_2C_1\times{}_2C_1=4$ (通り)
だから合せて５通り.
よって，$C\to R\to D$ は $5\times5=25$ (通り)
以上より，
$C\to D$ は $1+16+25=42$ (通り)
だから確率は，

$$2\times42\times\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{21}{1024}$$

となります.

<先　生> そうだね．よしおのように考えると，回数が増えても一般化ができそうだね.
それでは，最後にもう１題



正方形 ABCD の頂点にある点 P がコインを投げ，表がでたら反時計回り，裏がでたら時計回りに次の頂点に移るものとする.
最初に点 P が頂点 A にあるとし，コインを８回投げるとき，次の確率を求めよ.
(1) 点 P が頂点 A にある確率.
(2) 点 P が頂点 C にある確率.
(3) 点 P が８回目に初めて A にある確率.

<かず子> 数直線上の運動と違って一周してまた頂点Aに戻る場合もあるから面倒ですね．でも(1)は簡単だわ．
一周しないで最初にAにあるときは，時計回り，反時計回りをそれぞれ4回ずつ動けばいいから，その場合の数は

$${}_8C_4 = 70 \quad (通り)$$

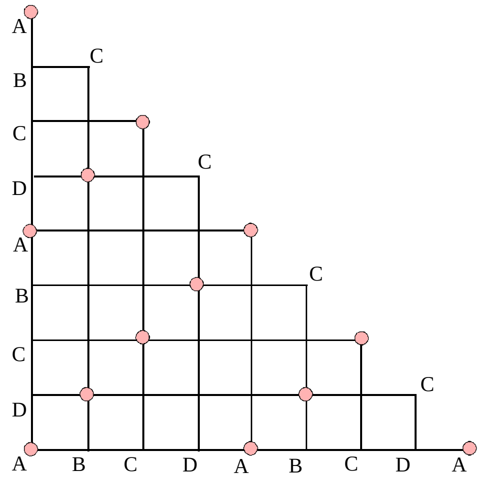
一周したときにAにある場合は，時計回り6回，反時計回り2回か，時計回り2回，反時計回り6回だから，

$${}_8C_2 + {}_8C_6 = 56 \quad (通り)$$

最後に二周したときにAにある場合は，半時計回り8回，時計回り8回の場合だから2通り．
よって，その確率は，

$$(70+56+2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2}$$

できました．



<よしお> (2)もかず子が解いたようにできそうですね．でも(3)になると…….
<まなぶ> やっぱり経路図を書くしかないか．反時計回りを右方向，時計回りを左方向にとって，ではちょっと頑張って……，完成．
<アリス> この経路図の場合, かず子がいっていたように一周, 二周する場合も頂点Aにくる場合があるから長方形ではなく直角三角形の経路ができるのね．頂点Aにくるときの格子点は，直線 $y = x$ だけでなく，

$$y = x \pm 4n \ (n = 0, 1, 2)$$

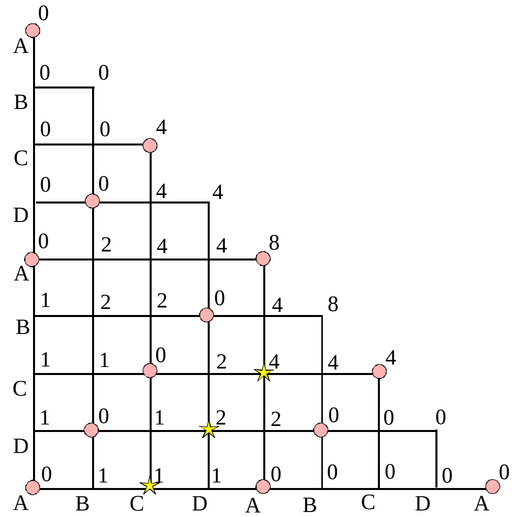
上にもあるわ．同じように考えると頂点Cにくる場合は，直線

$$y = x \pm 4n + 2 \ (n = 0, 1)$$

ずいぶんたくさんあるのね．
<よしお> ということはその確率は，対称性を考えて直線 $y = x$ の右下の経路を考えればいいから，

$$2\left({}_8C_1 + {}_8C_3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2}$$

<まなぶ> いいと思うけど，でもこの経路図をみると，8回目にくる頂点はAとCしかないよな．
ということは，Aにくる確率は $\frac{1}{2}$ だったんだから，Cにくる確率も $\frac{1}{2}$ になるのは当たり前だよな．
<先　生> その通り．経路を書いてみると，8回目には B, D に P がくることがないことも明らかだね．(3)についても，図のように途中で止まる頂点Aをチェックしてみると，あとは簡単だね．
<かず子> はい，直接経路の格子点に集まる場合の数を書き込んでいくと，総数16通りになります．



<よしお> あるいは，対称性を利用するとこれも $y = x$ の右下部分を数えればいい．
図の☆印のついた格子点は必ず通ることより，その場合の数は，

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4$$

これから総数は，

$$4 \times 4 = 16 \quad (通り)$$

ですね．
したがって確率は，

$$16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{16}$$

です．
<先 生> よくできたね．今回はお互いに心情的なトラブルもなくいいチームワークだったね．
一般に数直線上を動く点が n 回目(n は偶数)にはじめて出発点に戻るようなランダムウォークの確率は酔歩の確率といい，電子運動の研究なんかにも利用されているんだ．
<まなぶ> 酔歩って酔っ払いの千鳥足の歩き方のことですよね，酔っ払いと電子運動が一緒とは．
<アリス> とくに多角形や円周上の点が何周かして戻る場合は，ずいぶんリアルな酔歩ですね．
<よしお> どういうこと．
<アリス> 家でお酒を飲んで酔っ払った男の人が，お酒がなくなってコンビニに買いにいったはいいけど自分の家が分からなくなって町内をぐるぐる回っている，そんな風に感じない．
<まなぶ> 凄いリアル．日本人の心情をリアルに表現できるアリスも凄い．
<かず子> 私には近くにいる人の未来がハイパーリアルに見えてしまったわ．

あとがき

酔歩の確率はカタラン数と密接な関係がある．

カタラン数とは，

$(n+1)$ 個の文字の括弧の付け方の場合の数

で表わされる n に関する数列 C_n のことである．詳しく述べると，

異なる $(n+1)$ 個の数の積を２つの数の積の計算の繰り返しと考えたときの積の組合せの場合の数

となる．

$n=1$ ときは　(ab)　より　$C_1=1$

$n=2$ のとき　$(ab)c,\ a(bc)$ より　$C_2=2$

$n=3$ のとき　$((ab)c)d,\ (a(bc))d,\ a((bc)d),\ a(b(cd)),\ (ab)(cd)$　より　$C_3=5$

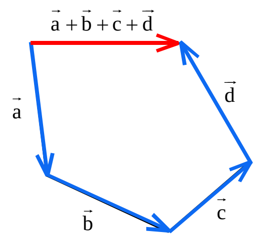
以下，

$C_4=14,\ C_5=42,\ C_6=132,\ C_7=429,\ \cdots\cdots$

と続く．カタラン数(Catalan number) は，ベルギーの数学者 E.C.Catalan (1814－1894) の命名による．

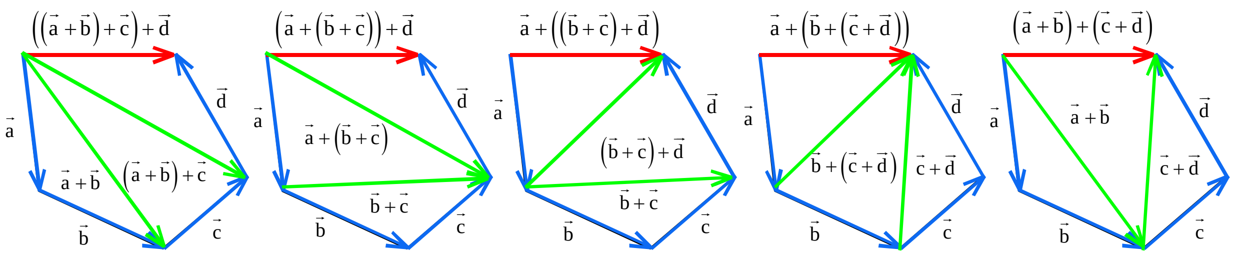
その原典は，オイラー(L.Euler 1707－1783) がゴールドバッハ(C.Goldbach 1690－1764) へ宛てた「三角形の分割」に関する書簡にみることが出来る．

> 三角形の分割問題
> 平面上の凸多角形を互いに交わらない対角線によって三角形により分割する方法は何通りか．



三角形の分割とカタラン数との関係をみるためには，カタラン数の定義である２数の積を「２数の和」とし，スカラー $a,b,c,d,\cdots$ をベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\cdots\cdots$ に置き換え，それぞれのベクトルを右図のようにおく．２つのベクトルの和の優先順位を変えると下図のようになり，２つのベクトルの和を表わす対角線により，五角形は三角形に分割され，カタラン数 C_3 に対応する．

このことより凸 n 角形の分割方法はカタラン数 C_{n-2} $(n\geqq3)$ となるのである．



このように，２数の和とみることで，カタラン数とランダムウォークの確率を関連付けることもできる．

対応を見やすくするために式全体を括弧で括る．

$n=3$ の場合について考えると，

$(((a+b)+c)+d),\ ((a+(b+c))+d),\ (a+((b+c)+d)),\ (a+(b+(c+d))),\ ((a+b)+(c+d))$

ここで，文字 a,b,c,d を省略しても演算順序を読み取ることはできる．

$(((+)+)+),\ ((+(+))+),\ (+((+)+)),\ (+(+(+))),\ ((+)+(+))$

さらに括りの）についても，省略できる．

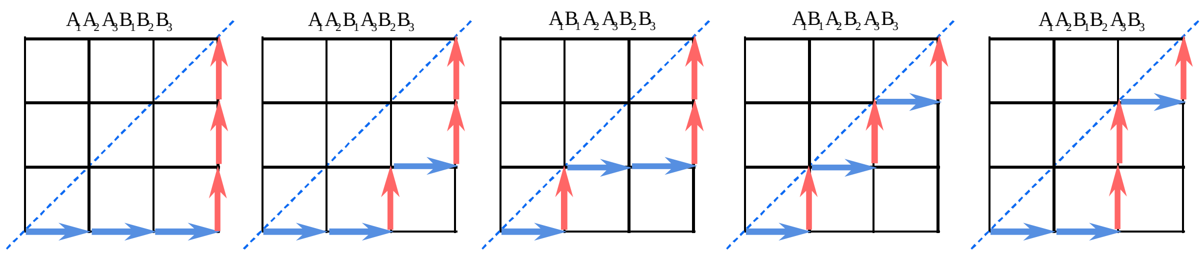
$(((+++,\ \ ((+(++,\ \ (+((++,\ \ (+(+(+,\ \ ((++(+$

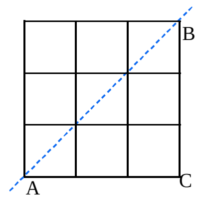
ここで，左から r 番目に現れる「括弧（」と「＋」をそれぞれ A_k, B_k $(k=1,2,3)$ に変えると，

$A_1A_2A_3B_1B_2B_3,\ A_1A_2B_1A_3B_2B_3,\ A_1B_1A_2A_3B_2B_3,\ A_1B_1A_2B_2A_3B_3,\ A_1A_2B_1B_2A_3B_3$

この文字の並びをみると，n $(1\leqq n\leqq6)$ までに現れる A の個数はそれまでに現れる B の個数以上であることが分かる．

そこで，A の個数を右方向，B の個数を上方向にとり，経路図を作ると，それぞれ下のようになる．





A, B の並びは図の斜線の右下部分に現れることが分かる．

したがって，右図の直角三角形 ACB の点 A から点 B への最短経路数がカタラン数である．

このことを用いてカタラン数により作られる自然数列 $\{C_n\}$ の一般項を求めてみよう．

線分 AB 上の格子点で A 以外の点を A の近いほうから順に

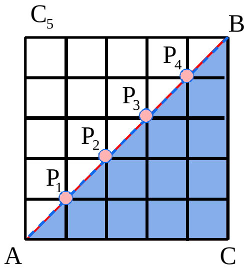
$P_k\ (k=1,2,3,\cdots,n)$

とする．ただし，　$A_n=B$ である．

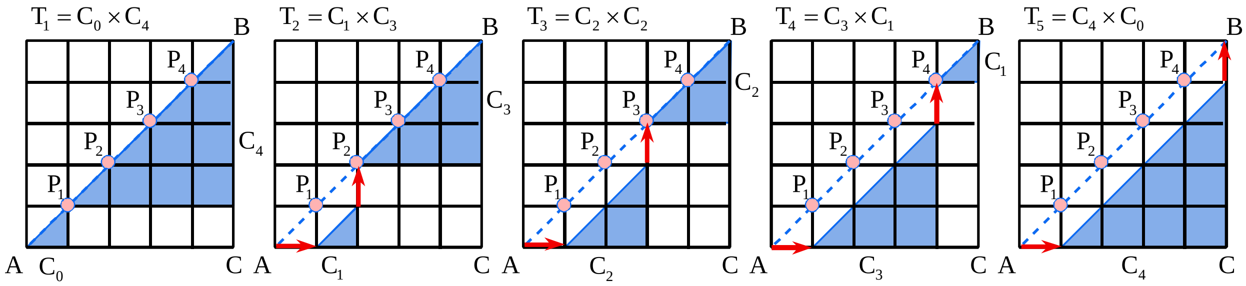
点 A から B までの最短経路で，はじめて AB 上の点を通るときの格子点が $P_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ であるものの場合の数を T_k とすると，

$$C_n=T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n$$

である．



ここで $C_0=1$ とすると，　T_k はカタラン数の和として，例えば C_5 の場合は次のように表わすことができる．



すなわち，

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}\cdot C_{n-k}$$

この漸化式より一般項を求めればよい．

カタラン数の母関数(生成関数)を

$$c=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$$

とおく．

$$\begin{aligned}
c^2&=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k\\
&=(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots)(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots)\\
&=C_0C_0+(C_0C_1+C_1C_0)x+(C_0C_2+C_1C_1+C_2C_0)x^2+(C_0C_3+C_1C_2+C_2C_1+C_3C_0)x^3+\cdots\cdots\\
&=C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots
\end{aligned}$$

$$c^2x=C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k-1=c-1$$

$$xc^2-c+1=0$$

c の二次方程式の解を求めて，

$$c=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{2}{1\mp\sqrt{1-4x}}$$

ここで，　$x\to 0$ のとき，　$c\to 1$ であることより，

$$c=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\qquad\cdots\cdots(*)$$

である．

$g(x)=\sqrt{1-4x}$ とおくと，

$g(x)$ のマクローリン展開より，

$$g(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

であるから，(*)の式から，項 x^n の係数を考えると，

$$C_n=-\frac{1}{2}\times\frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

である．

ここで，

$$g'(x)=-\frac{1}{2}\times4\times(1-4x)^{-\frac{1}{2}},\quad g''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4^2\times(1-4x)^{-\frac{3}{2}},\quad g'''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times4^3\times(1-4x)^{-\frac{5}{2}},\quad\cdots\cdots$$

$$g^{(n)}(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\frac{2n-3}{2}\times4^n\times(1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}}$$

これより，

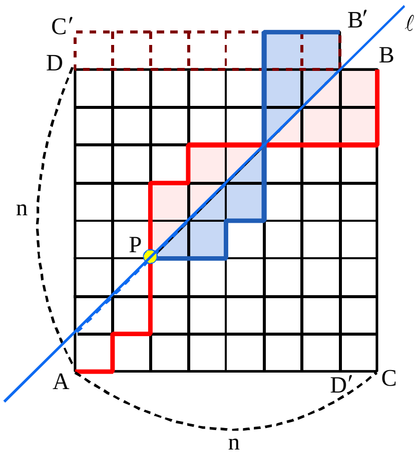
$$g^{(n+1)}(0)=-\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}}\times4^{n+1}$$
$$=-\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(2n-1)\times2n}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}\times2^{n+1}$$
$$=-\frac{(2n)!}{1\times2\times3\times\cdots\times n\times2^{n}}\times2^{n+1}$$
$$=-\frac{(2n)!}{n!}\times2$$

よって，$C_n=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n+1)!}\times\left(-\frac{(2n)!}{n!}\times2\right)=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$

一般項が求められた.

ところで，カタラン数の一般項を求めるには最短経路を用いる鮮やかな方法が用意されている.

縦，横それぞれ長さ n の正方形 ACBD を区切って右図のように経路を作るとき，三角形 ACB において A から B までの最短経路が C_n であった．直線 AB に平行で上に 1 平行移動した直線を ℓ とし，直線 ℓ の線上または上方の格子点を通る最短経路の場合の数 T_n を考えると，正方形 ACBD の A から B までの最短経路 ${}_{2n}C_n$ から T_n を引いたものが求めるものとなる.



正方形 ACBD の A を出発点とする最短経路の 1 つが最初に直線 ℓ 上の格子点を通るとき，それ以降の経路を直線 ℓ に関して対称な最短経路に移していくことで，A から B までの最短経路は図の長方形 AD′B′C′ の A から B′ までの最短経路に 1 対 1 対応する.
(反射の原理)

これより，

$$T_n={}_{2n}C_{n-1}$$

以上より，

$$C_n={}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}={}_{2n}C_n-\frac{n}{n+1}{}_{2n}C_n=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

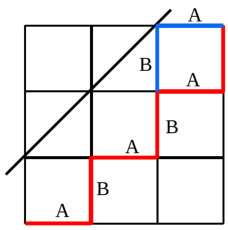
である.

直角三角形の最短経路として与えられるカタラン数は経路の上の移動数が右の移動数より大きくないことであるから「優位の問題」の解法においてしばしば顔を覗かす.

> ある学校祭の模擬店で, 生徒は A(gs)と B(gs)の 2 枚の通貨カードを渡され, 買い物をすることができる. ただし B(gs)は A(gs)の 2 倍の額である．あるクラスが 1 個 A(gs)の品物を売ることにした．販売当日、模擬店の前には A(gs)，B(gs)を持った客がそれぞれ n 人ずつ並んでいた．売り始めるときに 1 枚もおつりのカードを用意していないとすると，お釣りを貰うのを待つことなくすべての客に売ることができる確率はどれだけか.

$n=3$ の場合について，抜き出してみよう.

ABABAB は，A(gs)，B(gs)を持った客の並び方の順とする．このとき，偶数番目の B にはその直前の奇数番目の A をお釣りとして払えばよい．しかし，ABABBA では 5 番目の B のお釣りがなくなる.



このように，B で支払った生徒にお釣りを払うためにはそれまでに受け取った A をお釣りとして使わなければならないから，どの回においても，

(A で支払われた回数)≧(B で支払われた回数)

であればよいことになる．その場合の数はカタラン数 C_n である．したがって，確率は，

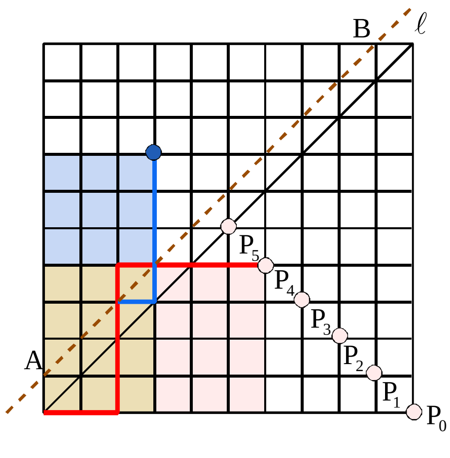
$$\frac{C_n}{{}_{2n}C_n}=\frac{{}_{2n}C_n}{(n+1){}_{2n}C_n}=\frac{1}{n+1}$$

である.

ところでこの問題では，A(gs)，B(gs)を持っている客が同人数である場合の確率であるが，その条件を，

「n 人の客が，A(gs)か B(gs)のいずれか 1 枚を持って並んでいる」

と変えてみるともう少し現実的な問題となる.



お釣りのカードを支払うためには，元の条件ではすべて無事売り終えたとき，収益のカードは A(gs), B(gs)ともに n 枚であるが, この場合はいろいろなケースが考えられる. ただ, どの回においても(A で支払われた回数)≧(B で支払われた回数)でなければならない．そこで，原点を出発点として A(gs)を受け取った場合は右方向に，B(gs)を受け取った場合は上方向に進めていくと，n 回のステップで図の線分 AB 右下部分で，線分 AB の垂直二等分線上の格子点に辿り着くようにすればよい.

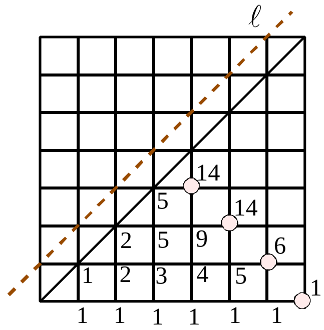
n を偶数とし，$n=2m$ とおいて，場合の数を求めてみよう.

反射の原理を用いて，線分 AB 上の格子点とはじめて交わった以降の経路は線分 AB に関して対称な経路に移していくと，P_k $(k=1,2,3,\cdots m)$ に辿り着く場合の数は，

$${}_{2m}C_k-{}_{2m}C_{k-1}\quad\text{(通り)}$$

P_0 は１通りであるから，求める最短経路の場合の数 G は，

$$G = 1 + \sum_{k=1}^{m} \left({}_{2m}C_k - {}_{2m}C_{k-1} \right)$$
$$= 1 + \left({}_{2m}C_1 - {}_{2m}C_0 \right) + \left({}_{2m}C_2 - {}_{2m}C_1 \right) + \cdots + \left({}_{2m}C_m - {}_{2m}C_{m-1} \right)$$
$$= {}_{2m}C_m$$



以上よりその確率は，$\dfrac{{}_nC_m}{2^n}$ である．

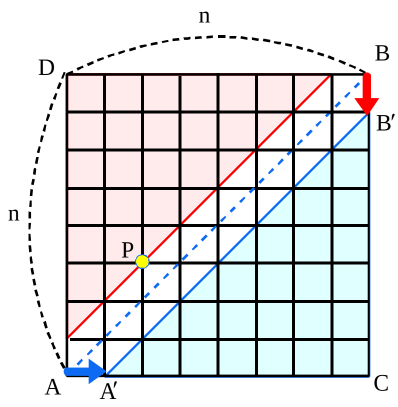
n が奇数の場合も同様に考えることができ，確率は，

$$\frac{{}_nC_m}{2^n} \quad \left(m = \left[\frac{n}{2} \right] \right)$$

である．例えば７人の場合は，右図のように，$\dfrac{{}_7C_3}{2^7} = \dfrac{35}{128}$ となる．

酔歩の確率に話を戻そう．

数直線上のランダムウォークは，左方向の移動を上方向に移すことにより，最短経路の問題に読み替えることができた．



$2n$ 回の試行では，縦，横 n の正方形 ACBD で作られる経路の問題となるが，$2n$ 回目にはじめて原点に戻るには，対角線 AB 上の格子点と交わらずに A から B まで移動すればよい．線分 AB の右下部分の経路を考えるとき，A は右に１移動した点 A′ を必ず通る．また，B に到着するには，下に１移動した点 B′ を必ず通る．したがって，線分 AB 上の格子点を通らない最短経路は，三角形 A′CB′ の A′ から B′ までの最短経路であるから，その場合の数はカタラン数 C_{n-1} である．線分 AB の左上の部分に関しても同じ場合の数である．したがって，原点にはじめて戻る確率は，１回の試行で左右に移動する確率が同じであれば，

$$2C_{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{C_{n-1}}{2^{2n-1}}$$

である．例えば 12 回目にはじめて戻る(本文の例)ときは，$n = 6$ であるから，

$$\frac{C_5}{2^{11}} = \frac{{}_{10}C_5}{6} \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{21}{1024}$$

となる．

これを用いて本文でアリスがいっていた酔っ払いが家にたどり着く確率はどうなるか調べてみよう．

右に一歩，左に一歩と進む場合，人には利き腕と同様利き足？があるだろうから，その確率は必ずしも同じとはいえぬ．利き足の方に多く進む傾向があるとし，その確率を $1 - p \left(0 \leqq p \leqq \dfrac{1}{2} \right)$ とする．このとき $2n$ 歩ではじめて自宅に戻る確率 w_n は，

$$w_n = 2C_{n-1}(1-p)^n p^n$$

である．したがって，いつかは自宅に戻れるであろう確率 w は，

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(1-p)^n p^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n (p - p^2)^{n+1}$$

ここでカタラン数 C_n の母関数より，

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

これから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+1} = 1 - \sqrt{1-4x}$$

$x = p(1-p)$ とおくと，

$$w = 1 - \sqrt{1 - 4(p - p^2)} = 1 - |1 - 2p| = 2p \qquad \left(\because \ 0 \leqq p \leqq \frac{1}{2} \right)$$

したがって，$p = \dfrac{1}{2}$ であれば，$w = 1$ となり酔っ払いはいつかは自宅に戻れることが分かる．

しかしながら，理性が麻痺した状態では本能が体の動きを支配するわけで，おのずと利き足にしたがい $2p$ の確率で自宅への長い道のりを彷徨い続けるのである．苦労して辿り着き，ベッドに横になり心地よい眠りに落ちる．やがて小鳥の囀りと暖かな日差しに揺り起こされ，公園のベンチで目覚めを迎えたことに気づく．その後のことは，神(カミサン)のみぞ知る．

【参考文献】

大学への数学　「マスター・オブ・場合の数」

数学ガール　(結城浩　著　ソフトバンククリエイティブ)

※数学ガールは Web で公開されていたものを書籍化したものです．カタラン数に関しては，次の URL より pdf ファイルをダウンロードできます．

http://www.hyuki.com/girl/convolution.html　(ミルカさんとコンボリューション)