三角形の解法の小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○三角比の三角関係

〈先　生〉 今日は、三角形の解法を辺と角の関係からまとめてみよう。

ex1) 三角形 ABC において、$a=\sqrt{2}, b=2,\ B=45°$ のとき、三角形を解け。

〈かず子〉先生、三角形の関係だから、三角関係なんていまどき死語となったオヤジギャグは言わないですよね。
〈先　生〉 えっ、それって死語なの。
〈まなぶ〉あっ、本当に言おうとしていたんだ。これに解法するんだから、三角関係をひも解くなんて言ったもんだったら、ドン引きだよな。
〈先　生〉 ……、みんなには相手の気持ちを推し量って対応する大人の姿勢というものが欠けている。三角関係の解き方っていって何が悪い。先生は少しでもみんなに分り易ように身近な話題で説明してやろうとしているんだ。
〈まなぶ〉わぁー、開き直ってる。先生こそ大人げないと思うけどな。
〈よしお〉そろそろ、その三角関係、先生、話してもらえませんか。
〈アリス〉 一番大人なのはやっぱりよしおね。
〈先　生〉 三角形の要素である辺と角は、それぞれ３つずつあるね。ところで角 A に対してその対辺 BC の長さを a と表すのは、A と a はカップル(パートナー)の関係にあることを示している。与えられた辺や角から残りを求めることを「三角形を解く」というわけだから、三角形の解法は、カップル探しのようなものだろ。
〈かず子〉 分かりやすい喩えですね。
〈まなぶ〉 そこまで落としていいのかなとも思うケド。
〈先　生〉 続けるよ。このように考えると、正弦定理は、辺とその対角の大きさが与えられたときの辺と正弦の比を表すから、カップル成立の定理とみることができる。カップルになれたら嬉しくてついVサイン(sin)をするだろ。
〈まなぶ〉 いまどきVサインなんてする人いないよ。
〈先　生〉恋愛経験があるとは思えないまなぶにはワカランと思う。さて、正弦定理に対して余弦定理は、カップル成立をアプローチするための定理ということになるな。
〈まなぶ〉 ちなみに先生、角と辺ではどっちが男なの。
〈先　生〉 どっちでもいい、好きにしなさい。大体、カップルを異性同士と考えるような時代ではもうないだろ。
〈アリス〉 どういうことでしょう。
〈先　生〉 気にしなくていい。さあ、問題をみてみよう。まずカップルの相関図を調べてみると、次のようになる。

$$\boxed{a=\sqrt{2}, b=2,\ B=45°} \Rightarrow \boxed{A, C, c}$$

b と B の１組のカップル成立だから、正弦定理を用いることになる。a は分かっているので相手の A を求める。

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ より、$\sin A=\dfrac{a}{b}\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 45°=\dfrac{1}{2}$

これから $A=30°, 150°$ だけど、どちらも答えだろうか。

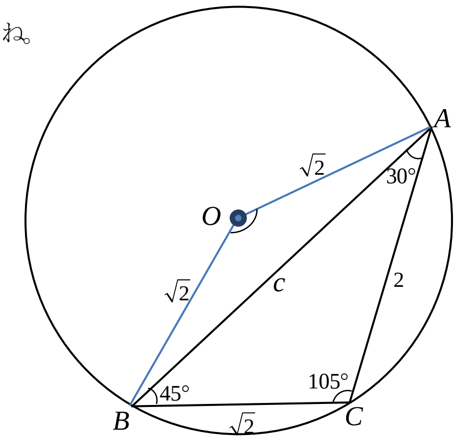
〈まなぶ〉二股をかけるかどうかということですね。$B=45°$ で、三角形の内角の和は $180°$ だから、$A=150°$ だとオーバーしてしまう。だから、$A=30°$ です。
〈よしお〉 あるいは、$a<b$ だから、$A<B$。これから、B の大きさよりも小さい方の角度ですね。
〈先　生〉 よしおの考え方は大事だね。カップルは似たもの同士になるものだ。小さいものは小さい者同士、身分不相応ってことがないようにしたいな、まなぶ。
〈まなぶ〉 何言ってるんでしょう。
〈かず子〉 これで、a と A もカップルになったってことね。そうするとあとは、C と c。

$$\boxed{a=\sqrt{2}, b=2,\ B=45°} \Rightarrow \boxed{A=30°, C, c}$$

〈アリス〉これはどちらも分からないけど…あっ、でも A と B から、$C=180°-A-B=105°$ 。ということはこれも正弦定理ってことかな。
〈かず子〉でも、$105°$ の正弦の値が分からないと……。
〈先　生〉そうだね。だけど正弦定理で求められるものは、辺や角以外にもあったよね。
〈まなぶ〉外接円の半径だ。

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\sqrt{2}$$

となる。



〈先　生〉では外接円の中に今の三角形を描いてみよう。三角形がすごく見やすくなるだろ。さて、いま角 C の正弦は分からないけど、その中心角は $2\times 105°=210°$ 。劣弧の方の角度は、$150°$ だ。外接円の中心を O とすると、三角形 OAB から $AB=c$ は求められないだろうか。
〈よしお〉余弦定理が使えそうです。

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=4+2\sqrt{3}$$

これから、$AB=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$

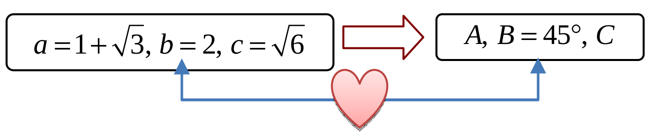
〈先　生〉三角形は外接円を補うと描きやすいし、いろいろな性質も見えてくるんだ。この場合もまあるく収まっただろ。……、あれ、みんな反応がないな。
〈まなぶ〉反応すると先生はエスカレートするでしょ。僕達の大人としての対応です。
〈先　生〉数学には子供のような純真な好奇心も大切なんだぞ。ところで、先ほどよしおは、余弦定理を使ったわけだけど、三角形 OAB では、辺と角のカップルは一組もない。このような場合は、余弦定理を使うとよい。余弦定理は、決まっていない相手を求めるための定理、分り易くいうと、相手を予言する定理ってことだ。
〈生　徒〉………
〈先　生〉まったく反応しなくなったね。次いこうか。

ex2) 三角形 ABC において、$a=1+\sqrt{3},\ b=2,\ c=\sqrt{6}$ のとき、三角形を解け。

3 つの辺の長さが与えられたとき、そのパートナーを求める問題だ。
〈かず子〉カップルがないから、ヨゲン、うーん、この言葉がなんかトラウマになっている。コサインの定理を使えばいいわ。
〈先　生〉では、どのパートナーを探せばいいだろう。
〈まなぶ〉A かな。
〈アリス〉どうして A なの。
〈まなぶ〉角度を求める第 3 ヨゲン定理を用いると、その式の分母には $a=1+\sqrt{3}$ がこないわけだから、分母の有理化は必要なくなるだろ。ラクができそうじゃん。
〈先　生〉まなぶらしい打算的というか、安直というか、まあそういう部類の発想だな。分母の有理化の必要がないといってもその値の角度が求められるものになっているという保証はないだろ。
〈まなぶ〉そういう部類って悪いものを十把一絡げしているような表現、凄い気になるけど。でも、まあ確かに求められないかもしれない。
〈アリス〉十把一絡げの意味はワタシはよく分からないけど、「そういう部類」で集めるっていうのはいい方法だと思うんですけど。先生が、似たもの同士っていっていたでしょ。$a=1+\sqrt{3}$ は面倒な値だからその対角だってすっきりした角度ではないと思うの。だからこの場合、$b=2$ の対角がいいのではないでしょうか。
〈先　生〉正解。そう考えると、その次の候補は、$c=\sqrt{6}$ だね。$a=1+\sqrt{3}$ は、一番面倒そうな顔をしているだろ。同類相憐れむなんてことをやっちゃいけない。選ぶんならすっきり顔のイケメンだ。
〈生　徒〉……
〈まなぶ〉どう対応しようと先生は懲りないみたいだな。求めるよ。

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{6+(4+2\sqrt{3})-4}{2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから $B=45°$ です。
〈先　生〉残りは 2 つの角度だ。当然この場合は c のパートナーを求めることになるけど、すでに 1 カップルが成立した訳だから、正弦定理を用いればいいことになるね。



〈よしお〉 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より、$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

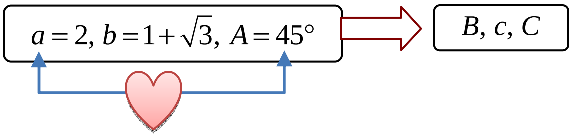
ここで、$b<c$ より、$45^\circ=B<C$　だから、$C=120^\circ$ です。

〈まなぶ〉 そうすると、残りの C の大きさは、$A=180^\circ-B-C=15^\circ$ だね。確かに直接は求められない角度だ。

〈先　生〉 だいぶ理解してきたようだね。それでは最後の問題に取り組んでみよう。

ex3）三角形 ABC において、$a=2,\ b=1+\sqrt{3},\ A=45^\circ$ のとき、三角形を解け。

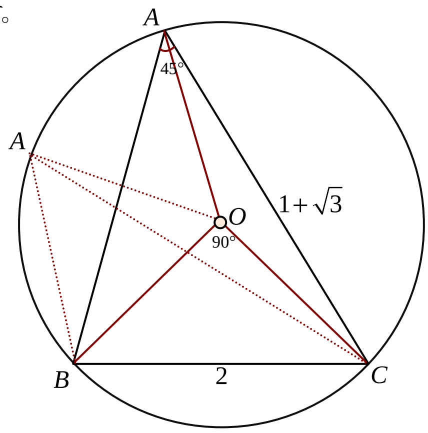
〈まなぶ〉 まず位置関係を確認してみると…



〈アリス〉 a と A のカップルが成立しているから、正弦定理で、b のパートナーを求めることになるわ。
でも b は嫌な顔だから、対角の B は綺麗にでそうにないわ。

〈よしお〉 とりあえず、三角形の形状を調べるために外接円の半径を求めてみます。

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\sqrt{2}$$



〈かず子〉 外接円の中に三角形を描くと図のようになる。
でもやっぱり b は、いけ好かない値よね。

〈よしお〉 でもそれは、三角形 ABC で考えたときで、三角形 OAC では値がまあるくなると思う。

〈まなぶ〉 よしお、先生に感化されていない?。でも他に糸口がなさそうだから余弦定理で $\angle AOC$ の余弦を求めてみるか。

$$\cos\angle AOC=\frac{R^2+R^2-b^2}{2R^2}=\frac{4-\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

おっ、いいぞ。$\angle AOC=150^\circ$

したがって円周角 B の大きさは、$B=\dfrac{1}{2}\angle AOC=75^\circ$

そして、$C=180^\circ-A-B=60^\circ$

〈アリス〉 C は綺麗な角度ね。だからこれは正弦定理を用いて、

$$c=2R\sin C=2\sqrt{2}\sin 60^\circ=\sqrt{6}$$

すべてのカップルが決定しました。

〈先　生〉 安心するのは早い。まなぶが求めた $\angle AOC$ の大きさは 1 つだろうか。

〈かず子〉 何か問題でもあるの。三角形の内角の和は 180° だからその範囲で考えればいいのでしょ……あっ。

〈まなぶ〉 そうか、僕が求めたのは内角を表す円周角ではなく中心角だ。だからその範囲は 360° まである。ということは、$\angle AOC=210^\circ$ の場合もある。でも、どうして 2 つでてくるのだろう。

〈よしお〉 問題の条件が緩いのですね。この問題では、辺の長さである c、角の大きさである C のどちらも与えられていない。ということは、三角形の形状が決定していないことになるんだ。

〈かず子〉 でも、ex1 だって、同じような条件設定よ。

〈アリス〉 ちょっと違う気がする。ex1 で求めたのは、カップルで与えられている鋭角 B より小さい角の A。でも ex3 は、カップルで与えられている鋭角 A より大きい角の B。だからその範囲が鋭角だけでなく鈍角にも広がると思う。

〈先　生〉 そうだね。一般に三角形の形状決定は、3 組のすべてにおいてカップルとなるもののどちらかが与えられていなければいけない。ex3 は、外接円を補ってみると自然、もうひとつの形が浮かびあがってくることがわかるだろ。

〈まなぶ〉 なるほどね。それじゃ、もうひとつの場合の答えも求めます。

$\angle AOC=210^\circ$ より $B=105^\circ$。

で、このとき $C=180^\circ-A-B=30^\circ$

よって、$c=2R\sin 30^\circ=\sqrt{2}$

ということですね。

〈先　生〉 結局、分り易く言えば三角形の解法は、外接円という円卓にお互いに見つめ合って座っているカップルがこれからどうアプローチして仲が進展していくかを想像することから始めればいい。そのためにもエン(円)って大事だろ。

〈かず子〉 どうしてもその喩えで話を進めたいんですね。ひょっとしたらそのエンも何かに掛けているでしょ。この中にいる想像逞しい誰かと先生がだんだん同類にみえてきたわ。

あとがき

三角形を解くことができる形状は、2 つの直角定規の組み合わせで得られる三角形にある程度限定されている。だから三角形に補助線を 1 本引いて直角三角形に切り分けることで自然に解答は見いだせてしまうことになる。あるいは、辺の長さの比は対角の正弦の比に等しいわけであるから、ex2 のように、 $a=1+\sqrt{3}, b=2, c=\sqrt{6}$ であれば、

$$a:b:c=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることから、 $B=45°, C=60°$ であることが容易に予想することができる。結局、三角形を 2 つの直角三角形に裁断するか、比の値から正弦の性質を用いて角の大きさ・辺の長さを読み取り形状を調べるかで直感的に要素を見つけられてしまう。そう考えれば本問の解法は意味を為さなくなるが、本問は解法の工夫というより、向かい合う辺と角の組を最良のカップルと見て残りのパートナー探しを試みる極めて俗っぽいアプローチの提示ではある。対辺・対角を意識しながら三角形の解法に臨むという方針設定の小手技なのである。また、すべての三角形に潜む外接円にもスポットを当てている。円を描き円周上の 3 点を結んで三角形を描くか、あるいは三角形を描いてから外接円は描くか、いずれにしろ外接円という補助円は、三角形の見えない部分の性質を浮かび上がらせる。正弦定理のもっとも簡単な証明は外接円の中心角と円周角の関係から得ることができるのはその好例であろう。本問の問題も外接円を利用して求めるようにしている。

一般的には、ex1) の問題の後半の AB の長さは、第 1 余弦定理を用いて

$$c=a\cos B+b\cos A=\sqrt{2}\cos 45°+2\cos 30°=1+\sqrt{3}$$

と求められるし、あるいは、すでに成立している 1 組の間に余弦定理を用いて、

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　から

$2=4+c^2-4c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore$ $c^2-2\sqrt{3}c+2=0$　これから、 $c=\sqrt{3}+1$　（c は最大辺より）

こうするのが定石ではあるし、ex3 についても然り。ただ、正弦定理に比べて余弦定理は「機械的な計算の匂い」が強く、本来の図形の性質認識を損なう嫌いがある。ex2 では余弦定理より 1 つの角度を求めた場合、残りの 1 つの角の大きさも余弦定理を用いることがある。余弦はその値の正負より鋭角、鈍角の区別ができ単純計算で求められることに拠るが、これは「辺の長さの大小は対角の大きさの大小に一致する」という重要の性質の理解を避けていることにもなる。

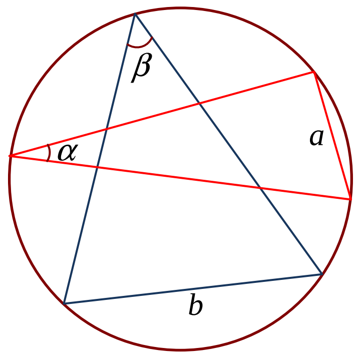
外接円を描き、辺を弦や弧の長さに対応させると、その大小関係は、

弧の長さは、円周角(中心角)の大きさに比例

弦の長さは、円周角の正弦の値に比例

と明確になる。弦の長さは弧の長さの大小関係に一致することより、

「弦の長さは円周角の大きさに比例はしないが大小関係は一致する」



ことになる。正弦定理は、三角形の辺と角の間に成立する定理であるだけではなく、円における弦と円周角の間に成立する定理であることは、補助円である外接円を描いて分かることである。余弦定理が三平方の定理の拡張として、直角三角形を基準に辺の長さで三角形の大まかな形状決定をするのに対して、正弦定理の方は対辺、対角の長さや大きさを変化させながら三角形の形状を微調整していく感覚が強いような気がする。

さて、三角形の解法は、その形状が直角定規の組み合わせであるから、重ね方により、$15°$, $75°$ といった角度が出現するが、これもまた、

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}、\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を覚えておくことで事足りてしまうから、暗記や公式の多用をすれば図を描くことなく三角形の解法処理ができてしまい、味気ない解答となる。代数的オートメンション解法はベクトルに任せればよいわけで、三角比での解法は図形の概形をしっかりとイメージし、さらには、頂点を円周上の 3 点と捉え、辺とその対角の関係を、弦と円周角の関係に読み替えてみる。本文中にもでてくるあたかも円卓で向かい合うフィーリングカップルのように、弦と円周角の親密さが見えてくるのである。そしてこのようなイメージ化は円周上に 4 点をとることで、円に内接する四角形の性質につながっていく。

※三角形を解くことができる直角定規の組み合わせの図形は、下図のように中心から円弧を等間隔に分割していくと現れてくる。図中、$\theta=15°$ であり、$6\theta=90°$。$1/4$ 円を 6 等分している。各線分の長さは、角の二等分線の性質と三平方の定理により得られる。