三次式で割った余りの小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○数学語の意訳と直訳のタイミング

〈先　生〉今日は、次の問題について考えてみよう。

> x の整式 $P(x)$ は、$x-1$ で割ると 2 余り、$(x-2)^2$ で割ると $2x+1$ 余る。
> $P(x)$ を $(x-1)(x-2)^2$ で割った余りを求めよ。

〈かず子〉　これ、私、解いたことあるんだけどよく分からなかったの。確か問題の解説では余りをある形にすると簡単に求められると書いていたと思うんだけど、どうしてそうなるのか理解できない。
〈よしお〉僕も同感。普通に解いていくと行き詰ってしまう。
〈先　生〉この問題は日本語をどのタイミングで立式化するかが解法のポイントになっているんだ。いってみれば日本語から数学語への翻訳の仕方がカギということになる。そのことを考えながら問題を解いていこう。
〈アリス〉日本語に訳すだけども難しいのにそれをまた数学語に訳さなければいけないんですか。
〈まなぶ〉そんな難しいこと考えなくてもフツーは、言葉の壁は相手を思う気持ちがあれば理解できるものだよ、アリス。
〈かず子〉まなぶの気持ちは理解不能だけどね。
〈先　生〉話が、ややこしくなりそうだから、問題にとりかかろう。まず、条件の部分の日本語を式で表現してごらん。
〈よしお〉$x-1$ で割ると 2 余るから、剰余の定理より $P(1)=2$ です。
〈まなぶ〉そうそう、確か、$P(1)$ は余りだから「ピーチは甘い」とかそんなオヤジギャグを先生はいってたよな。
〈先　生〉そういったことはしっかり覚えているんだな。では、後半の条件はどうなる。
〈かず子〉$(x-2)^2$ で割る場合は、剰余の定理を使えないから、商を $Q(x)$ として直接表現してみます。

$$P(x)=(x-2)^2Q(x)+2x+1$$

となるわ。
〈先　生〉剰余の定理、因数定理は 1 次式で割った場合にその余りを求めるものだったね。
一般に整式 A を整式 B で割るとき、商を Q 、余りを R とすると、

$$A=BQ+R$$　（R の次数は割る式の B の次数より低い）

という関係になる。これは日本語を数学語に直訳したものといえる。これに対して剰余の定理は割る式が $x-\alpha$ であるときだから、まず直訳して、

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

さらにこの式に $x=\alpha$ を代入して表した式だ。すなわち先ほどの直訳した式をさらに読み替えたわけで、意訳した式ということになる。
〈まなぶ〉$A=BQ+R$ も早口で喋れば「えーっ、びっくり」と先生は嬉しそうに連発していた。直訳が「えーっ、びっくり」、意訳が「ピーチ、甘い」ってことだな。
〈アリス〉何か、だんだん分からなくなってきたんですけど。
〈かず子〉オヤジギャグもまなぶも、全然気にしなくていいから。
〈先　生〉先生までまなぶと一緒にされるのは心外だな。では、最後に求めるものを翻訳してみよう。
〈アリス〉三次式で割るのだから、これは直訳ですね。商を $Q_1(x)$ で、余りの次数は 2 次以下なんだから、1 次や定数のときもあるわけで……、
〈よしお〉ax^2+bx+c としていいと思うよ。a や b の値が 0 のときも考えると 2 次以下になる。
〈アリス〉そうね。そうすると、

$$P(x)=(x-1)(x-2)^2Q_1(x)+ax^2+bx+c$$

と表せます。
〈先　生〉では、数学語に翻訳したものをまとめてみよう。

> $P(1)=2$　…①
> $P(x)=(x-2)^2Q(x)+2x+1$　…②
> $\Rightarrow$　$P(x)=(x-1)(x-2)^2Q_1(x)+ax^2+bx+c$　…(*)

これらの式から余りを求めていこう。まず②をさらに意訳してみようか。
〈まなぶ〉$x=2$ が代入できるから、

$$P(2)=5$$　……③

が導ける。でも問題はこの後だよな。

〈かず子〉 そう、$x=1,2$ を(*)に代入すると、①と③の値から、

$$a+b+c=2 、4a+2b+c=5$$

この２式が得られるけど、求める変数が a,b,c の３つあるわけだから、ここから先が進まなくなってしまう。

〈先　生〉 式の数より変数が多い場合は、変数の１つを定数とみるんだったね。a を定数として解いてごらん。

〈アリス〉 はい、計算をすると……、$b=3-3a$ 、$c=2a-1$ になります。これで余りは、

$$ax^2+(3-3a)x+(2a-1)$$

と表現できますね。でも a はどう求めればいいのでしょう。

〈先　生〉 まず、いま求めた余りを表す式を a について整理してごらん。

〈まなぶ〉 「えーっ」ですか。えーっと、

$$(x^2-3x+2)a+(3x-1)$$

〈かず子〉 いちいち先生レベルのダジャレ言わないでよ。あれ、この a の係数である x の２次式は因数分解できるわね。

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

〈よしお〉 そういうことか。どうやら僕たちは全然見当違いの方向に進んでいたようだ。

〈かず子〉 どういうこと。

〈よしお〉 (*)の式から、

$$P(x)=(x-1)(x-2)^2Q_1(x)+a(x-1)(x-2)+(3x-1)$$
$$=(x-1)(x-2)\{(x-2)Q_1(x)+a\}+3x-1$$

これは、日本語に翻訳すると、$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りが $3x-1$ ということだよね。

意訳した $P(2)=5$ は「$P(x)$ を $x-2$ で割った余りが５」のことだから、いつの間にか、

「$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが２、$x-2$ で割った余りが５であるとき、$(x-1)(x-2)$ で割った余り」

を求めていたことになるだろ。

〈先　生〉 その通りだ。直訳した②を③に意訳したときに、言葉の意味が変わってしまっているんだ。だから解き方の方向性を見失ってしまう。

〈アリス〉 思いをそのまま伝えるには直訳するのが一番いいのですね。まなぶのいっている日本語の意味がときどき分からないのは意訳のセイかしら。

〈かず子〉 違うわよ、日本語を話していると思うことが間違いなのよ。

〈まなぶ〉 ひどい。でもそうするとこの方向性では解けないということになるのかな。

〈先　生〉 ②はこの段階でさらに意訳すべきではないんだ。だから、この式と(*)の関係が分かるように式変形をすればいい。

〈まなぶ〉 それをごちゃごちゃと考えているくらいなら、ax^2+bx+c の方を $(x-2)^2$ で直接割って②の形にしちゃえば。

〈かず子〉 本当に発想が大雑把で乱暴なんだから。

〈よしお〉 でもアリかな。計算もそれほど面倒なことではないよ。平方完成の要領で変形すると、

$$ax^2+bx+c=\{a(x-2)^2-(-4ax+4a)\}+bx+c$$
$$=a(x-2)^2+(4a+b)x+(-4a+c)$$

これから、

$$P(x)=(x-1)(x-2)^2Q_1(x)+a(x-2)^2+(4a+b)x+(-4a+c)$$

さらに、$(x-2)^2$ で括ると、

$$P(x)=(x-2)^2\{(x-1)Q_1(x)+a\}+(4a+b)x+(-4a+c) \qquad \cdots\cdots(**)$$

となる。だから、$P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは、

$$(4a+b)x+(-4a+c)$$

ということですね。

〈アリス〉 これが②の余り $2x+1$ に等しくなるのね。２つの一次式の係数を比較して、

$$4a+b=2 、-4a+c=1 \quad より、$$
$$b=2-4a 、c=4a+1$$

これを、①から得られた $a+b+c=2$ に代入すると、$a=-1$ になるわ。

〈まなぶ〉 ということは、$b=6$ 、$c=-3$ も分かるから、結局、余りは、$-x^2+6x-3$ ということか。

一応、求められるたけど、計算がずいぶん面倒だな。

〈かず子〉 面倒な部分は人にやらせておいてその言い分はないでしょ。でもこの方法しかないのかしら。

〈先　生〉 では、いまの乱暴なまなぶの方法で求められたものをもう一度よくみてみよう。

(**)の $(4a+b)x+(-4a+c)$ は、②と比較すると、$2x+1$ に一致するということだった。

それなら、最初から $2x+1$ にしておいてもいいということになる。

〈まなぶ〉 「乱暴なまなぶ」という部分が引っかかるんですけど。ということは、(**)は、

$$P(x)=(x-1)(x-2)^2Q_1(x)+a(x-2)^2+2x+1$$

とおけるということか。

〈かず子〉 わぁっ、でた、これよ。たしかに言われてみればそうなんだけど、余りがこの形になるのを最初から示そうとするとわけが分からなくなるんです。
〈先　生〉 ではもう少し考えてみよう。ポイントは②の意訳をしようとすると、条件の一部しか表現できなくなることにある。であれば、②は翻訳すべきではなく、これから(*)へどう導くかを考えれば良い。そこで②と(*)を比較してみると、似たような形になっている。違いは、2 次式の$(x-2)^2$で割っているか、3 次式の$(x-2)^2(x-1)$で割っているかということだね。そこで②の$(x-2)^2Q(x)$を変形して(*)の$(x-2)^2(x-1)Q_1(x)$の形にするにはどうすればよいか考えてごらん。
〈アリス〉 ②の$Q(x)$の部分が、$(x-1)Q_1(x)$になればいいから、$Q(x)=(x-1)Q_1(x)$です。
〈先　生〉 ではそれを日本語に翻訳するとどうなる。
〈かず子〉 $Q(x)$を$(x-1)$で割ると商が$Q_1(x)$で余りは…割り切れるということだわ、でも…。
〈まなぶ〉 そんな都合よく割り切れるわけないよな。
〈よしお〉 そうだね。1 次式で割っているのだから、余りは定数になる。
〈先　生〉 ではその余りをaとして、直訳するとどんな式が得られるだろう。
〈アリス〉

$$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+a$$

となります。
〈先　生〉 それを②に代入してみよう。
〈かず子〉 はい。

$$P(x)=(x-2)^2\{(x-1)Q_1(x)+a\}+2x+1$$
$$=(x-2)^2(x-1)Q_1(x)+a(x-2)^2+2x+1$$

あっ、これが、先ほどの(**)なのね。
〈先　生〉 この余りの形がみつけられたら、あとはaを求めるだけだから、①を使えばお終いだ。a,b,cの 3 つの変数を求めなければならない最初の解法と比較するとずいぶん楽になっているだろ。
〈かず子〉 少しは分かりやすくなったけど、やっぱりちょっと変形が強引な感じがする。
〈まなぶ〉 なんだ。かず子も強引と思っていたんじゃないか。
〈先　生〉 それでは、さらにもう少し翻訳した式を分析してみようか。先程は、
「$Q(x)$を$(x-1)$で割ると、商が$Q_1(x)$で余りはa」
を直訳したわけだけど、これは剰余の定理を用いて意訳もできるわけだろ。
〈アリス〉 はい、$Q(1)=a$です。
〈先　生〉 うん、それがこの問題の最終解法だ。
〈かず子〉 えっ?、aは(**)の余り$a(x-1)^2+2x+1$の変数だから、そのaが$Q(1)$の値ということは……。
〈よしお〉 そうか。その値は②の式に$x=1$を代入すると 求められますね。
〈まなぶ〉 $x=1$を代入?。まず、やってみようか。

$$P(1)=(1-2)^2Q(1)+2\times1+1$$

だから、$Q(1)=P(1)-3$
分かった。①から、$P(1)=2$なんだから、$Q(1)=-1$だ。
なにっ、ということは、これで終わりってこと。
〈先　生〉 その通り。もう一度、解法を整理してみよう。
②の式は翻訳するのではなく、この式に$x=1$を代入してみる。
そうすると、

$$Q(1)=-1$$

が得られるね。これを日本語で表すとどうなる。
〈かず子〉 $Q(x)$を$x-1$で割ると、余りが-1ということです。
〈先　生〉 ではそのときの商を$Q_1(x)$として、今度は数学語に直訳してみよう。
〈アリス〉 $Q(x)=(x-1)Q_1(x)-1$です。
この式は先程の式でaがわかった場合だわ。
ということは、②に代入すると、

$$P(x)=(x-2)^2Q(x)+2x+1$$
$$=(x-2)^2\{(x-1)Q(x)-1\}+2x+1$$
$$=(x-2)^2x-1)Q(x)-(x-2)^2+2x+1$$

だから余りは、

$$-(x-2)^2+2x+1=-x^2+6x-3$$

ということですね。何にも変数を置かなくても余りが求められてしまうのですね。

〈かず子〉なんかあっという間ですね。
〈先　生〉もうひとつ、例題を用いてこの解法をおさらいしてみようか。

> Ex) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余り 1、x^2+x+1 で割ると余り $3x+4$ であるとき、
> 　　$P(x)$ を x^3-1 で割った余りを求めよ。

〈アリス〉最初の条件は意訳をして、$P(1)=1$ 　……①
　　2 つめの条件は直訳して、$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+3x+4$ 　……②
　　そして、$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ で割った余りが求めるものですね。
　　この問題では②は代入できる値がないからもう直訳はできないのですね。
〈かず子〉先程の翻訳法ではその必要がないわ。
　　②に $x=1$ を代入すると、
$$P(1)=3Q(1)+7$$
　　①の $P(1)=1$ を用いて計算すると、$Q(1)=-2$
〈まなぶ〉はい、バトンタッチ。その式を今度は直訳すると、
$$Q(x)=(x-1)Q_1(x)-2$$
　　だから、
$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2+x+1)\{(x-1)Q_1(x)-2\}+3x+4 \\ &=(x^3-1)Q(x)-2(x^2+x+1)+3x+4 \end{aligned}$$
　　以上より余りは、$-2x^2+x+2$ です。
〈かず子〉横取りしないでよ。でも、まなぶの存在を差し引いても不思議とすっきり。
〈先　生〉この問題の解法のポイントは、直訳、意訳のタイミングにある。日本語、数学語の翻訳をうまく読み替えていくと、自然と求めるべきものに無理なく到達できる。相手の気持ちをどう読み、汲み取るか。人の付き合いと同じだな。
〈かず子〉そうか。私がいままでこの問題の解法に乱暴さ、強引さといった、しっくりこない妙な腹立たしさを感じていたのは、まなぶ的な発想の訳し方で接していたからなのね。
〈まなぶ〉　なにそれ!!!!

あとがき

今回の小手技は、「翻訳のタイミング」をテーマにしています。この分野に限らず、条件文の定式化は、どの段階で、どの部分まで、どのように翻訳するかで大きく解法の方針が異なってきます。

> Ex) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余り 2、$x-3$ で割ると余り 4 であるとき、
> 　　$P(x)$ を $(x-1)(x-3)$ で割った余りを求めよ。

この解答を翻訳法で求めると、条件については、
　　意訳して、$P(1)=2$
　　直訳して、$P(x)=(x-3)Q(x)+4$
となります。次に第 2 式に $x=1$ を代入すると、
$$P(1)=-2Q(1)+4 \quad \text{より、} \quad Q(1)=-\frac{P(1)-4}{2}=1$$
次にこれを直訳すると、
$$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+1$$
そして、第 2 式に代入すると、
$$P(x)=(x-3)\{(x-1)Q_1(x)+1\}+4=(x-3)(x-1)Q_1(x)+x+1$$
これから余り $x+1$ が求まりましたが、かえって読み替えが複雑になってしまった印象を受けます。この場合は，余りを $ax+b$ として立式した方がいいのです。

「意を伝える」ことがちょっとした表現の違いでずいぶん方向性が変わってしまうものなのです。本文中 ex1 では、条件式②の誤った意訳から $P(2)=5$ を導出し、結果として、$(x-1)(x-2)$ で割った余りを表す式
$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+3x-1 \qquad \cdots\cdots(\flat)$$
を導いていますが、実はここから結論へ誘導することは可能です。

商の $Q_1(x)$ をさらに $(x-2)$ で割った余りを $Q_2(x)$、余りを a とすると、
$$Q_1(x)=(x-2)Q_2(x)+a$$
ですから、($\flat$)に代入すると、

$$P(x)=(x-1)(x-2)\{(x-2)Q_2(x)+a\}+3x-1$$
$$=(x-1)(x-2)^2Q_2(x)+a(x-1)(x-2)+3x-1$$

となります。ここで、余りの部分をみると、

$$a(x-1)(x-2)+3x-1=a(x-2+1)(x-2)+3x-1=a(x-2)^2+a(x-2)+3x-1$$

よって、$P(x)=(x-2)^2\{(x-1)Q_2(x)+a\}+(a+3)x-2a-1$

$P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは、$2x+1$ だから、余りの係数を比較して、

$a+3=2$、$-2a-1=1$

これから、どちらの式からも $a=-1$ であり、求める変数 1 つに対して 2 つの式が得られてしまいます。
間違った翻訳により、もつれた糸をほぐすことの難しさがこの式から読み取れます。タイミングと的確な翻訳がいかに大事かということが分かるでしょう。

さて、この翻訳法をもう少し整理してまとめてみましょう。

$P(x)$ を $B_1(x)$ で割った商を $Q_1(x)$、余りを $R_1(x)$

$P(x)$ を $B_2(x)$ で割った商を $Q_2(x)$、余りを $R_2(x)$

とします。それぞれを直訳しましょう。

$P(x)=B_1(x)Q_1(x)+R_1(x)$ ……①　　$P(x)=B_2(x)Q_2(x)+R_2(x)$ ……②

ここで、$B_1(\alpha)=0$、$B_2(\alpha)\neq 0$ とすると、①、②より、

$P(\alpha)=R_1(\alpha)$ ……③　　$P(\alpha)=B_2(\alpha)Q_2(\alpha)+R_2(\alpha)$ ……④

③を④に代入すると、

$R_1(\alpha)=B_2(\alpha)Q_2(\alpha)+R_2(\alpha)$　より、$Q_2(\alpha)=\dfrac{R_1(\alpha)-R_2(\alpha)}{B_2(\alpha)}$

この左辺を直訳すると、

$Q_2(x)=(x-\alpha)Q(x)+Q_2(\alpha)$

であることより、

$$P(x)=B_2(x)\{(x-\alpha)Q(x)+Q_2(\alpha)\}+R_2(x)$$
$$=B_2(x)(x-\alpha)Q(x)+Q_2(\alpha)B_2(x)+R_2(x)$$

すなわち、$P(x)$ を $(x-\alpha)B_2(x)$ で割った余りは、

$Q_2(\alpha)B_2(x)+R_2(x)$

であり、これは、②の $P(x)=B_2(x)Q_2(x)+R_2(x)$ において、

$Q_2(x)$ を $Q_2(\alpha)$ に置き換えた式

であることが分かり、余りが容易に求められます。

ただ、この翻訳法も、ベースは意訳ができる剰余の定理の利用が背景にあります。だから、意訳ができない場合は使えないことになります。例えば、次の問題。

Ex) $P(x)$ を x^2+2x+2 で割ると余り $x+3$、x^2-2x+2 で割ると余り $3x-1$ であるとき、
$P(x)$ を x^4+4 で割った余りを求めよ。

この問題では、2 つの条件式はどちらも直訳しかできません。

$P(x)=(x^2+2x+2)Q_1(x)+x+3$ ……①　$P(x)=(x^2-2x+2)Q_2(x)+3x-1$ ……②

$x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ ですから、求めるものは①と②の割る式の積で割った余りになります。

ここで、①の $Q_1(x)$ を (x^2-2x+2) で割った商を $Q_3(x)$、余りを $ax+b$ とすると、

$$P(x)=(x^2+2x+2)\{(x^2-2x+2)Q_3(x)+ax+b\}+x+3=(x^4+4)Q_3(x)+(ax+b)(x^2+2x+2)+x+3$$

同様に、②の $Q_2(x)$ を (x^2+2x+2) で割った商を $Q_4(x)$、余りを $cx+d$ とすると、

$$P(x)=(x^2-2x+2)\{(x^2+2x+2)Q_4(x)+cx+d\}+3x-1=(x^4+4)Q_4(x)+(cx+d)(x^2-2x+2)+3x-1$$

この 2 式は等しいことより、商を比較して、$Q_3(x)=Q_4(x)$ であり、余りを比較して、

$$(ax+b)(x^2+2x+2)+x+3=(cx+d)(x^2-2x+2)+3x-1$$

両辺の各項の係数を比較すると、$a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{2},\ d=\dfrac{3}{2}$

以上より余りは、$\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+2$ となります。

ほんのちょっとのタイミングと、「意の伝え方」でその後の展開は大きく変わってしまうのです。数学も、そして人生も。