斜交座標系のちょっとした小手技Ⅲ

札幌旭丘高等学校　中村文則

虫と鳥、どちらがお好み

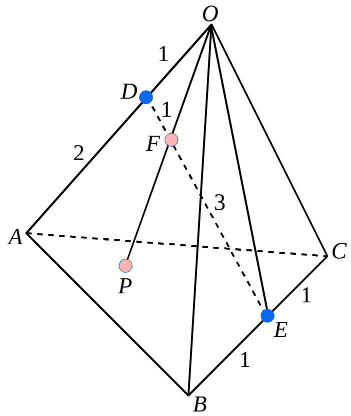
<アリス>　バランスメソッドって空間内でも使えるんでしょうか。

<まなぶ>　そのこと、僕も気になっていたんだ。気が合うね。斜交座標が空間で張れるなら、その座標上の点に重みを乗せるのが加重平均なんだからバランスメソッドもできるんじゃないだろうか。

<かず子>　それ、私も考えたことある。気があうかどうかは別にして。でも平面上では四角形に点の乗せた場合はバランスはうまくとれなかったら無理かなあと思ったんだけど。

<よしお>　ノートに書いた四角形は空間図形と思い込めば四面体に見えるものね。先生、どうなんでしょうか。

<先　生> では、今日はこの話題について考えてみよう。まずは、いつものように空間ベクトルの一般的な問題からアプローチしてみよう。



> 四面体$OABC$ において、辺OA を 1:2 の比に内分する点をD 、辺BC の中点をE 、線分DE を 1:3 の比に内分する点をF とする。直線OF が三角形ABC を含め平面と交わる点をP とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

<かず子> 典型的な斜交座標の問題だわ。

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ がそれぞれx, y, z 軸に対応しているということですよね。

<先　生> うん。だから、

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とおいておこうか。まず何をする。

<アリス> 平面と同様に考え、斜交座標上での各点の座標を求めます。

点D は、OA を 1:2 の比に内分する点だから、$\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{3}\vec{a}$

イメージとしては、点D の座標は、$\left(\dfrac{1}{3}, 0, 0\right)$ ということです。

<まなぶ> 点E はBC の中点だから、$\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ で、座標は$\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$。

<よしお> 最後に点F は、DE を 1:3 の比に内分するから、

$$\overrightarrow{OF} = \frac{3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{1+3} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OE} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$$

点F の座標のイメージ$\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$ が求まりました。

<先　生> ここまでできればもうあと一歩だ。最後はかず子がまとめてごらん。

<かず子> 点P を２つの図形上の点として表現します。まず点P は直線OF 上の点より、

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OF} = \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{8}\vec{b} + \frac{k}{8}\vec{c} \quad \cdots\cdots(*)$$

また、点P は三角形ABC を含む平面上の点より、

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \qquad (r+s+t=1)$$

つまり、(*)の$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数(座標成分)の和が 1 ということだから、

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{8} + \frac{k}{8} = 1 \quad \therefore \quad \frac{k}{2} = 1 \quad \text{より、} k = 2$$

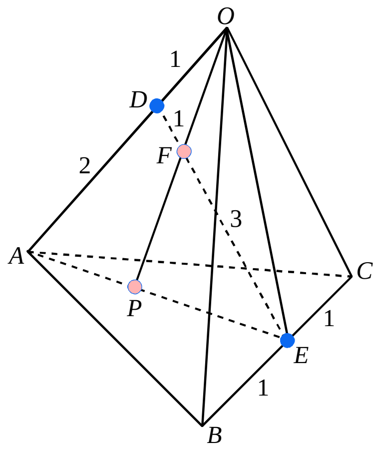
(*)に代入して、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

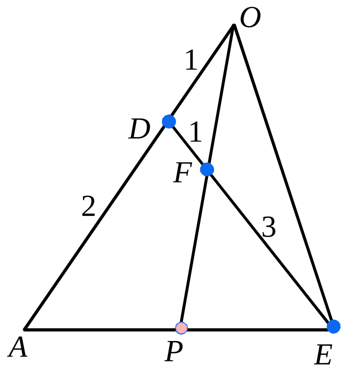
できました。

<先　生> これが授業で説明した解法だったね。空間内では、点は、「直線と直線の交点」とみる以外に、「平面と直線」の交点とみることもできる。点O から三角形ABC を見下ろして、OF という直線の矢がどこの場所に突き刺さるかを考えるようなものだったね。いわゆる空間的な思考法で導いたわけだけど、これをもっと別の視点から眺めてみよう。そのためにはまず求める点P の位置を正確に図に記入してみよう。

<まなぶ> 正確？にですか。でもだいたい、ノートや黒板という平面の上に四面体という立体図形を書くこと自体がもう正



確ではないでしょ。
<先　生> まあ、そうだな。ここでいう「正確に」の意味は点 P の位置に限定して考えてみよう。
<アリス> あっ、私わかった。点 A と E を結ぶのね。
<かず子> どういうこと。
<まなぶ> アリスのいってること僕は分るよ。点 P は線分 AE 上の点ってことだ。やっぱり気が合うみたい。
<よしお> そうか。点 D は OA 上の点だから、線分 DE 上にある点 F は、三角形 OAE を含む平面上の点ってことだ。ということは、点 P も同じ平面上にあることになる。
<かず子> なるほど、そういうことね。
<先　生> 点 P は、三角形 ABC を含む平面上の点であると同時に、三角形 OAE を含む平面上の点でもあるわけだ。すなわち、点 P は 2 つの平面の交線 AE 上の点ということになる。
<まなぶ> あれ？、そしたらこの問題、平面ベクトルの考え方で解けるということですね。
<先　生> そういうことだね。四面体から三角形 OAE を切り出すと、右図のようになる。これから点 P の位置ベクトルはどう表現できる。



<よしお> まず点 F は $DF:FE=1:3$ より

$$\overrightarrow{OF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$$

次に、点 P は直線 OF 上の点だから、

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}=\frac{3k}{4}\overrightarrow{OD}+\frac{k}{4}\overrightarrow{OE}=\frac{3k}{4}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{4}\overrightarrow{OE}=\frac{k}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{4}\overrightarrow{OE}$$

ここで、点 P は直線 AE 上の点でもあるから、

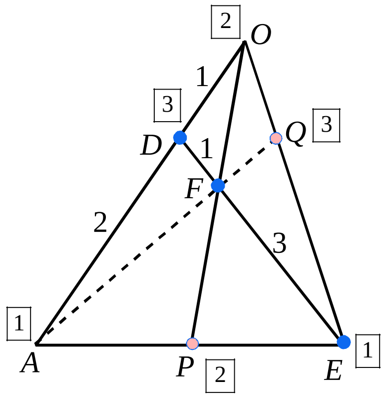
$$\frac{k}{4}+\frac{k}{4}=1 \qquad \therefore\quad k=2$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$

点 P は、辺 AE の中点ですね。そして最後に $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{b},\vec{c}$ で表します。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

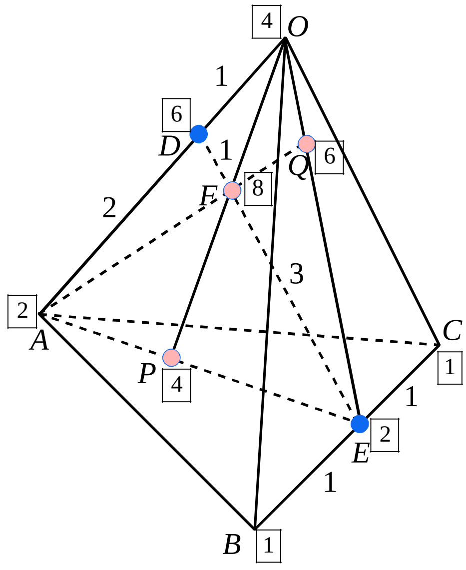
<まなぶ> 何か僕はこっちの解答の方がしっくりするな。
<アリス> 私もです。この解答だと三角形 ABC の上の点 P の位置もはっきりと分るし。
<まなぶ> でしょ、でしょ。やっぱりアリスと気が……
<かず子> 私は空間内で考えた方がいいと思うわ。四面体を見下ろすことにより、全体の中での点の位置関係がとっても見やすいでしょ。
<まなぶ> 見やすさでいえば、平面では実際に歩くように点の位置を追っていけるだろ。建物の中でいろんな階を歩くようにさ。あっ、ということはこの問題は平面で考えればバランスメソッドで分点を求められるということですよね。
<先　生> そのことに実は気がついて欲しかった。



<アリス> 私やってみるわ……、できました。バランスメソッドだと、直線 AF と辺 OE との交点 Q の位置も求められるわ。

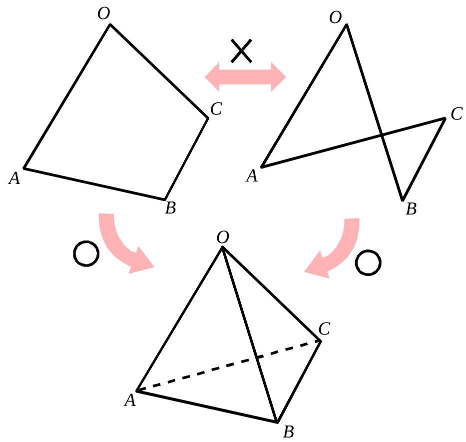
$OQ:QE=1:2$

となります。
<よしお> 点 Q は三角形 OBC 上の点だから、この点の位置も三角形 OBC にバランスメソッドを使えばもっとはっきりと求められることになりますね。
<先　生> その通り。だからまなぶがいっていたように、面を移動していき、それぞれでバランスメソッドを考えれば、その位置が把握できるんだ。



<まなぶ> そら、みろ。やっぱり僕とアリスの考え方の方がいいってことだ。
<かず子> でもそうしたらそれを合わせると空間内の斜交座標上にいっぺんにバランスをとることだってできるのてばないでしょうか。
私やってみようかしら。
まず、三角形 OAE はさきほどアリスが示したように重みを乗せることができる。次に、三角形 OBC で考えれば、点 E に重み 1 が乗っていて、E は BC の中点だから、あれっ、困ったわ。B,C の重みが分数 $\frac{1}{2}$ になってしまうわ。
<よしお> 大丈夫だよ。三角形 OAE の各点の重みを 2 倍にしておけば。
<かず子> そうか。そうすれば、点 B,C には 1 の重みを乗せられる……できたわ。どう？、きれいに重みが配置されてない。

<よしお> 四面体の頂点O,A,B,Cに乗っている重みの和は、点Fの重み８に一致している。これは三角形で考えたときの質量中心と同じだ。



<アリス> ということは、点Fは四面体の質量中心ということかしら。

<先　生> そういうことになるね。平面上の四角形$OABC$では、頂点の結び方により$OABC$と$OACB$では異なる図形を現す。でも、空間内では４点O,A,B,Cを結んでできる四面体は唯一つ定まるから四面体についてはバランスメソッドを用いることが可能なんだ。

<かず子> そうしたら、平面上の斜交座標で考えたように、各点の重みから点Pの位置ベクトルが求められるのではないでしょうか。

例えば、点Pの重みは４で、頂点A,B,Cにはそれぞれ２，１，１が乗っているから、４で割ると、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

やったわ、ばっち、ぐー。

<まなぶ> なに？、その「ばっち、ぐー」って。でも。空間でも重みを乗せることができるって面白いな。例えば、点Fの位置ベクトルは、Fの重みが８だから、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で表すと、

$$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$$

確かになっている。

<先　生> 四面体を構成している面である三角形のバランスを調べ、その面をつないでいくことで、四面体全体を巡りバランスを取ることが可能になる。ところで地面の上を歩き、草花などの自然の機微や人間生活の営みを間近に視るような視点を虫瞰というんだ。対して、空の上を自由に飛び回り、高みから生命すべてを俯瞰しのぞき込むような鳥の視点を鳥瞰という。空間図形に対する視点をどう取るかによって解法のアプローチが決まってくるんだ。

<まなぶ> 僕やアリスの視点は虫瞰ということですね。地道に頂点を巡って重みを乗っけていく。うーん、人生の生き方に通じるものがある。だいたい鳥瞰ってのは本質に触れようともしないで遥か上の方から見下(みくだ)しているような見方だよな。

<かず子>地道であればいいけど、どうもコソコソ這いずり回っているような虫けらのように思えてしまうのね。地道な生き方ってもっともアンチまなぶ的スタンスでしょ。

<よしお> 今日のかず子はおもろ言葉の連発だね。

<アリス> 何かよしおも変。でも私はまなぶ、かず子どちらのスタンスも大事だと思うの。今回だって、三角形の辺を伝い性質を調べてから、飛んで空間内の斜交座標の性質を導いたんでしょ。鳥は地面だって歩けるし、蜂のように飛べる虫だっているわ。視点を自由に変えられることが大切なのではないでしょうか。

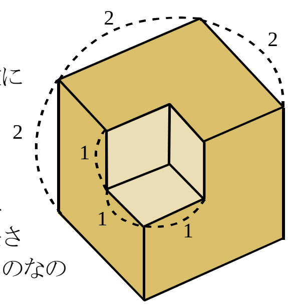
<先　生> 参りました。今回は、アリスの一人勝ちだね。

あとがき

鳥瞰、虫瞰的な視点はそれぞれパスカル的、デカルト的な思考法に通じる視点といえるだろう。ただこれらの視点・思考法は独立したものと捉えるべきではなく、視点でいえば「鳥瞰的に大局を見、虫瞰的に細かく論ずる」姿勢が望まれる。

人間は不自由な生き物で、三次元内にわがもの顔で生息していながら、実は空間を認識できていない。恋人同士が向かい合い、彼の両手が後ろに回っているとき、その両手に握り締められているのは花束なのかそれとも〇〇であるのかは彼女は知るすべはないのだ。結局お互いが認識できるのはつきあわせている顔のツラという平面だけなのである。内面どころか外面すら本当は見えていないわけで、まあ、だからこそお互いのミステリアスな部分に惹かれるのであろうが。小説「多次元平面国～ペチャンコ世界の住人たち」(エドウィンＡアボット著)は、一つ下の次元しか認識できない平面国の住人たちの日々の出来事を面白可笑しく語る。彼らが直線、三角形、円をどう認識しているかは大変興味深い。一読をお薦めする。

さて、不自由でスーパーマンのように飛ぶことなど到底できない我々は、鳥や虫にも劣るわけで、空間を認識するためには止む終えずイマジネーションの世界に飛ぶことになる。だから黒板の中に空間図形を書き込み理解することは、豊かな想像力がなければ無理な話なのである。



例えば「右図の立体図形の体積を求めよ」という問題は錯視の例としてよく出題される。

１辺の長さが２の立方体から　１辺の長さが１の立方体をくり抜いて７としてしまうと落とし穴に落ちる。小さな立方体は、果たしてくり抜かれているものなのだろうか？。そうでないと考えればその体積は$\frac{26}{3}$である。また、大きな立方体にしてもよくみると天井の隅に奥まっており、そこに小さな立方体が張りついているように見えないこともない(分らなければ、立体を逆さにしてみてみよう。部屋の隅に小さな立方体が置かれている状態になる)。この場合の立体の体積は１辺の長さが１の小さな立方体のみであるから１である。このようにかくも人間のイマジネーションは脆いものなのである。

さて、どの３点も一直線上にない４点を結ぶとき、平面図形としてみると３つの図形が考えられるから、空間内で図形は安定しない。３本足の椅子は絶対にぐらつかないが、４本足の椅子はぐらつきやすいのはそのためである(ちょっとした長さの狂いであるため、４本足の椅子に座り、床の上を少しずつ椅子と一緒に回転していくと、ピタッと床に合う箇所がでてく

る。床も完全なる平面ではないからこんな現象が起きる)。しかし、４点を結んで空間図形を作ると１つの四面体が確定し、この図形に関しては、平面の種々の性質が継承されるのである。

メネラウスの定理も然り。本文で述べているように、四面体を４つの三角形に展開し、それぞれの三角形の頂点を巡っていけば平面上のメネラウスの定理の性質が利用でき、三角形をジョイントしている点から他の三角形に移ることで空間内でも同様に成立することが分るのである。さらに、別に三角形を巡らなくても空間内のある点を出発点として分点を通り頂点を周遊し、戻ってきても同じ関係が成立する。

すなわち、右図のような四面体$OABC$をある平面で切り各辺OA, AB, BC, COとの交点をそれぞれK, L, M, Nをとると、次式が成立する。

$$\frac{OK}{KA}\cdot\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NO}=1$$

これより、

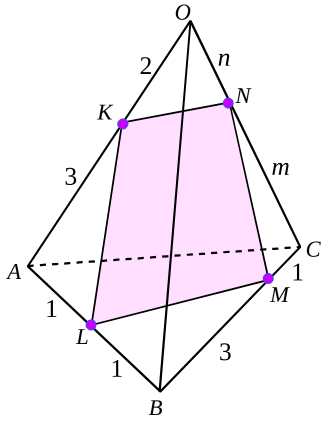
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{m}{n}=1 \quad \text{より、} \quad m:n=2:1$$

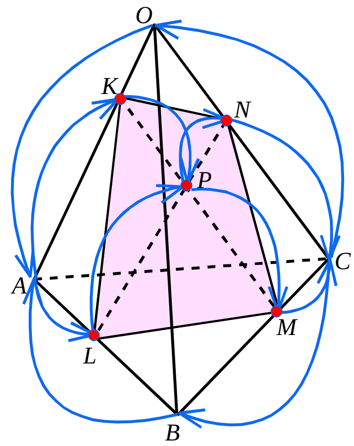
が得られる。この性質を「カルノーの定理」というが、これは点の巡り方の一例に過ぎず実際はどんな巡り方をしても成立する。

例えば、四角形$KLMN$の対角線の交点をPとし、点Kを出発点にして巡ると、

$$\frac{KP}{PM}\cdot\frac{MC}{CB}\cdot\frac{BA}{AL}\cdot\frac{LP}{PN}\cdot\frac{NC}{CO}\cdot\frac{OA}{AK}=1$$

その比の積は１になりバランスをとって閉じる。





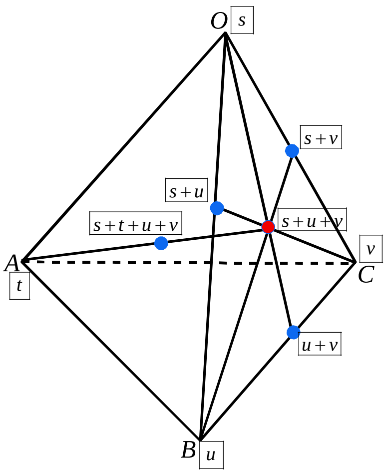
このような空間内の点の周遊は、メネラウスの定理とチェバの定理の垣根を取っ払ってしまい、空間内ではひとつの性質として成立するのである。(詳しいことは、拙著「メネラウスで三角形を巡る」を参照されたい)。

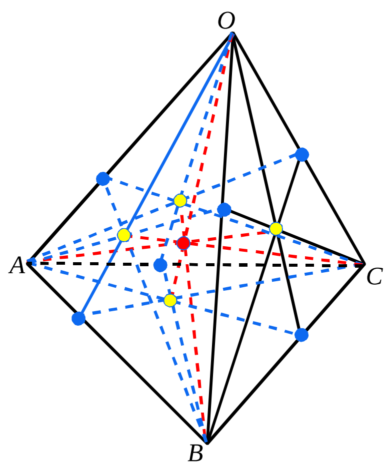
また、メネラウス(あるいはチェバ)の定理の成立は、四面体の頂点でのバランスメソッドを保障する。

四面体の４つの頂点に乗せた重みは、その内部の質量中心で釣り合う。質量中心の重みは４頂点の重みの和である。これは、３頂点を結ぶ三角形の質量中心の重みと残りの１頂点の重みを結ぶ線分の釣り合う点が四面体の質量中心とみることもできる。４組の点と面の加重平均がみな四面体の質量中心に一致するのである。

ここで、四面体の頂点の一つを原点とし、この点を始点とする３つの辺を空間内の斜交座標軸とみて基底ベクトルを張ると、四面体内の各点の位置ベクトルを基底ベクトルの終点の重みを用いて表現することが可能となってくるのである。

一つ例を示そう。





> 四面体$OABC$において、辺OAの中点をMとし、三角形MBCの重心をGとする。このとき、直線OGと三角形ABCとの交点をPとするとき、$\overrightarrow{OP}$を、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$を用いて表せ。

辺BCの中点をNとすると、MNを2:1の比に内分する点が三角形MBCの重心Gである。点Gは、三角形OAN上の点でもあるから、この三角形にバランスメソッドを用いると点Pは得られる。これを空間内で各点の重みをとることで求めてみよう。

三角形MBCの各頂点の重みを２とすると、重心Gの重みはその和６である。点MはOAの中点であるから、O, Aの重みはともに１である。また、線分OPは点Gで釣り合うから点Pの重みは５である。この重みで点A, B, Cのそれぞれの重み１，２，２を割ると、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

となる。