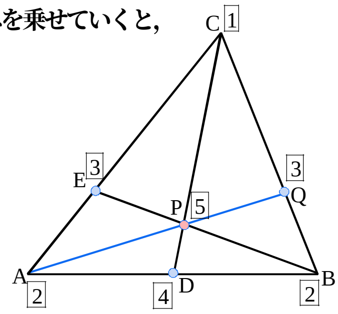
# 斜交座標系のちょっとした小手技II

札幌旭丘高等学校　中村文則

## *斜め読みの勧め*

<かず子>　先生，ねぇねぇ聞いて，わたし面白い発見したのよ．昨日の宿題のことなんですけど．

> $\triangle$ABC において，辺 AB の中点を D，辺 AC を1：2の比に内分する点を E，線分 CD と BE の交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ を使って表せ．




これを教えてもらったバランスメソッドでやってみたんです．図のように点に重みを乗せていくと，

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=3:2$　だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3+2}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

ここで，$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=1:2$　より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

これから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

となりますよね．で，解いた後にもう一度，図をよくみてみたんです．

点 B,C に乗っている重さはそれぞれ2，1ですよね．これを点 P に乗っている重さ5で割った $\frac{2}{5},\frac{1}{5}$ が $\vec{b},\vec{c}$ の係数になってるって気がついたの．

<よしお> 結局，どういう結論．

<かず子>　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表すとき，点 $\mathrm{P}\left(\vec{p}\right)$ に乗っている重みで $\mathrm{A}\left(\vec{a}\right),\mathrm{B}\left(\vec{b}\right)$ に乗っている重みを割ったものが，それぞれ $s,t$ の値だと思うの．

<アリス> 確かにさきほどの点 P ではそうなっているわね．

<まなぶ> でも，それってたまたま一致しただけじゃないの．

<かず子> そうかも知れないって思ったから，他の点でも調べてみたのよ．例えば，図の点 Q は3の重みが乗っているから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すとすると，点 B,C の重みの2，1を3で割って，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

これは，点 Q は線分 BC の分点だから当たり前の結果よね．で，さらにこれを $\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ で表すなら，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

であることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{3}\cdot3\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

この $\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の係数は，それぞれの点の重み4，3を，点 Q の重み3で割ったものよね．

<まなぶ> 本当だ．僕もやってみよう．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ で表すとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{5}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{5}\cdot3\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

で，点 P, D, E の重みはそれぞれ5，4，3だから……，本当だ，間違いないや．

<アリス> 先生，これって大発見ですよね．

<先　生> 面白い性質を見つけたね．せっかくだから，今回はこのヒミツを探ってみようか．

<まなぶ> 何だ，ということは先生，知っていたんだ．

<先　生> いや，知らなかった．でもその理由は説明できると思う．たぶん斜交座標系が関係している．

<かず子> あっ，先生が以前「天邪鬼に考えろ」っていって導入した斜めの座標ね．

<アリス> ナナメ，何のこと．

<よしお> そうか，アリスは聞いてなかったんだね．平面上に座標を張るには，必ずしも直交座標を考える必要はないってことなんだ．例えば，三角形を平面上に置くとき，頂点のひとつを原点として，2辺を x 軸，y 軸上に置ければ見通しがよくなるだろ．このように，x 軸と y 軸のなす角は必ずしも直交していなくてもいいんだ．

<先　生> そうだったね．宿題の問題は，「メネラウス型問題」といわれるけど，これをベクトルで解く場合には，2つの基

底ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ を用意したあとに，

$$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$$

という条件を書く．ところで，この条件がどういう意味なのか考えたことはあるかな．

<かず子> 求める点の位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ を用いて２種類の方法で表現した場合に，その係数を比較するときに必要なんですよね．

<先　生>この条件を満たす $\vec{a},\vec{b}$ を用いて平面上の任意のベクトルは，その定数倍の和としてただ一通りに表現することができることは話したよね．カタく言えばそういうことなんだけど，実はこの条件は平面上に斜交座標を構築するためのものなんだ．

まず，$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ については，$\vec{a},\vec{b}$ をそれぞれ x 軸，y 軸を表す基底ベクトルとして張れるかどうかということを示している．大きさが 0 では，軸の目盛りが振れないだろ．この条件は $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ を軸の目盛の基準に設定するということなんだ．次に，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ については，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を x 軸と y 軸に設定するということを表している．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であれば，重なるか $180^\circ$ に開いてしまうわけだから平面上で座標を張ることができないことになる．

<よしお> なるほど，そう考えるとこの条件は座標を設定するためにすごく重要だって分かりますね．

<まなぶ> 土台をしっかりして置かないと家は建てられないということか．

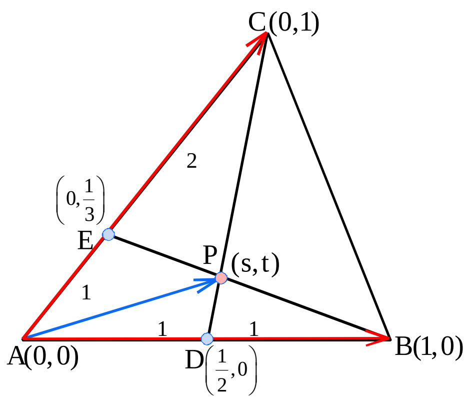
<先　生> うん，いいことというね．さて，基底ベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ とすると，この２つのベクトルで作られる斜交座標を用いて，平面上のすべての位置ベクトル $\vec{p}$ はその一次結合，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad (s,t\ は実数)\qquad \cdots\cdots(*)$$

で表されるんだったね．これは，直交座標では，$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$ とすると，

$$\vec{p}=s(1,0)+t(0,1)=(s,t)$$

であり，点 $P(\vec{p})$ は $(s,t)$ の軌跡ってことだ．




<まなぶ> ということは斜交座標上でも同じようにできるって先生はいいたいのかな．

<先　生> その通り．斜交座標上でも，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とするとき，

$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$ とイメージすれば，点 $P(\vec{p})$ は $(s,t)$ の軌跡と考えることができる．例えば宿題では，

$$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=(1,0)\ ,\quad \vec{c}=\overrightarrow{AC}=(0,1)$$

とイメージしてみる．そうすると，$D,E$ の座標はどう表現できるだろうか．

<よしお> D は AB の中点で，AB の長さを１と考えるわけだから，$D\left(\frac{1}{2},0\right)$ です．

<アリス> $AE:EC=1:2$ だから，$E\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ね．

<先　生> $D,E$ は斜交座標軸での x 切片，y 切片であることが分かるだろ．では，斜交座標上での直線 BC の方程式はどう表現されるだろう．

<かず子> ベクトル方程式だから，$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ だわ．

<先　生> そうだね．ところで先ほど，$\vec{p}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と置いたね．ここで $\vec{b}$ の係数を比較すると，s と t の関係は

$$s=1-t$$

すなわち，$s+t=1$ となるね．これを斜交座標上での直線の方程式とみなしてみよう．

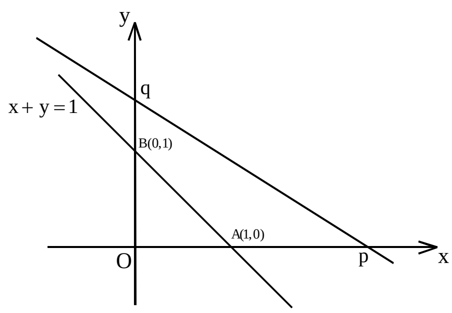
<アリス> うーん，よく分かりませんが…

<先　生> 例えば直交座標では，

$$\overrightarrow{OA}=(1,0),\overrightarrow{OB}=(0,1)$$

とすると，$\overrightarrow{OP}=(x,y)=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

となる．この動点 $P(x,y)$ の軌跡を考えたとき，$x+y=1$ は直線 AB を表していることになるだろ．斜交座標上でも，動点 $P(s,t)$ の軌跡の方程式として直線は表現できるんだ．直交座標の x 軸，y 軸に対して，この場合は，斜交座標上で s 軸，t 軸を考えていることになる．




<まなぶ> ぶっちゃけ，同じようにみてしまえってことですね．直交座標だって，座標を平面の真上からみるのではなく，ちょっとナナメ方向からみたら座標軸は直交してないようにみえるわけだから問題ないよな．それに，直線についてはナナメにみても直線に見えることに変わりはないわけだし．

<先　生> 乱暴ないいかただけど，まさにその通りだ．直交座標上では，２点 $M(m,0),N(0,n)$ を通る直線の切片方程式は，

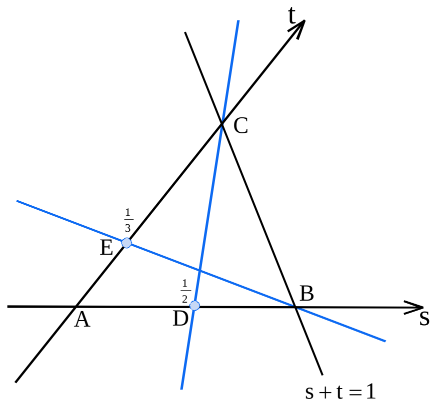
$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

で表されるけど，斜交座標上でも同じように表現できる．

例えば．斜交座標上で，$D\left(\frac{1}{2},0\right)$ とイメージすると，直線CD の方程式は，

$$\frac{s}{\frac{1}{2}}+\frac{t}{1}=1 \quad \text{より，} \quad 2s+t=1 \quad \cdots①$$

となる．では，直線BE の方程式はどうなる？




<かず子> 同じように考えれば，直線BE は，

$$\frac{s}{1}+\frac{t}{\frac{1}{3}}=1 \quad \text{より} \quad s+3t=1 \quad \cdots②$$

となります．

<先　生> ここで点P は2直線①と②の交点だから，$s,t$ の値を求めよう．

<まなぶ> 僕が求めます．えーっと，……$s=\frac{2}{5}, t=\frac{1}{5}$ 　ですね．

だから，$P\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ とイメージできるということか．

<先　生> これから点P の位置ベクトルはどうなる．

<かず子> $s$ と $t$ が求まったわけだから，

$$\vec{p}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

ということですね．あれっ？，なんかいつの間にか妙に簡単に求められてしまったような……．

<まなぶ> 確かに．ふつーは，$s:1-s$，$t:1-t$ のように直線の方程式を作りごちゃごちゃやるのだけれど……．でもこのことかず子が見つけた発見がどう関係するのだろう．

<よしお> たぶん，交点P の座標のイメージが$\vec{b},\vec{c}$ の係数ってことだと思うんだけど．

<先　生> いまは，基底となる2つのベクトル$\vec{b},\vec{c}$ をそれぞれ$(1,0),(0,1)$ に対応させてイメージしたんだよね．すなわちどちらのベクトルも，その大きさを1とみなしたってことだ．

<かず子> 直線BC の方程式で，$s+t=1$ という関係はそのことを表しているんですよね．

<先　生> では，バランスメソッドで重みをつけたいった場合には，$t$ 軸上にある $\overline{AC}$ の大きさは何だろう．

<アリス> $AE:EC=1:2$ だから……，3とみなしてるっていうことでしょうか．

<まなぶ> あっ，その3ってひょっとしたら点E の重み？．

<先　生> 正解，だから，点E の位置ベクトルを，点C の位置ベクトルで表す場合，点E の重み3で，点C の重み1を割ることで1に戻すと，

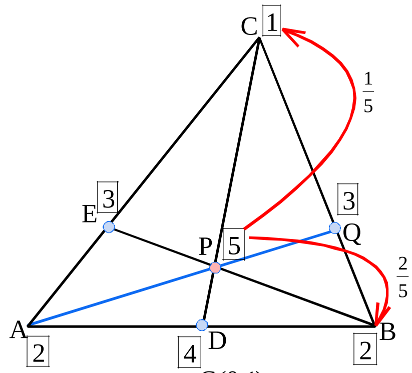
$$\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AC}$$

となるだろ．

<よしお> そうすると, 点D の重みが4ということは，$\overline{AB}$ を4の大きさと考えているわけだから, 点B の重み2を割ると,

$$\overline{AD}=\frac{2}{4}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

となるということですね．




<先　生> 同様に，点Q を$\vec{b},\vec{c}$ で表してごらん．

<アリス> 点Q には3の重さが乗っているから，　$\overline{BC}$ の大きさは3ということですね．

点B,C の重み2，1をこの3で割って，

$$\overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$$

あっ，ここから通常，公式で与えられる分点の位置ベクトルが得られるんですね．

<先　生> 次に，線分 AQ 上で考えれば，点Q に乗っている重み3を点P に乗っている重み5で割ると，

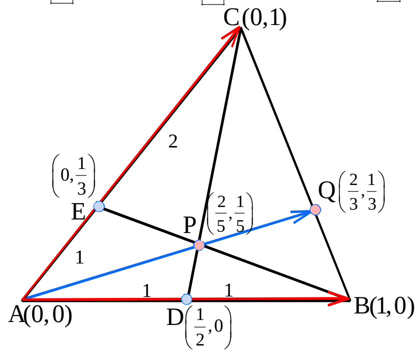
$$\overline{AP}=\frac{3}{5}\overline{AQ}=\frac{2}{5}\overline{AB}+\frac{1}{5}\overline{AC}$$

これで，点P の位置ベクトルが求められた．

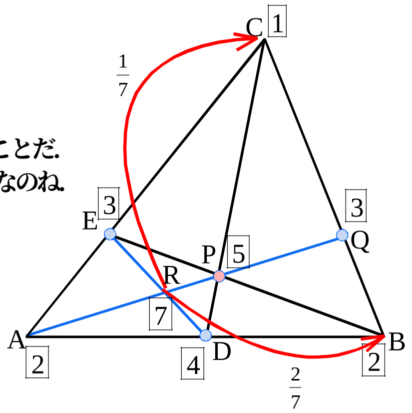
<かず子> なるほど，結局，基底ベクトルの大きさを1でイメージできるように，線分の大きさを表している各点の重みで割るということなのですね．

<先　生> だから，もともと基底を1として考えた右図の斜交座標系では，調整の必要がないから，座標をそのまま係数にすればいいことになる．

<かず子> 斜交座標が関係しているっていう先生のいっていたことは，このことだったんですね．



<先　生> ちょっと何点か位置ベクトルを求めてみようか．例えば，線分 DE と AQ の交点 R はどうなるだろう．




<よしお> 点 R の重みが分かればいいんだけど……．

<まなぶ> ……あっ，分かった，７だ！．

<アリス> えっ，どうして．

<まなぶ> 点 P の重みって，三角形 ABC の頂点の重みの合計だっただろ．
ということは点 R の重みは，三角形 ADC の頂点の重みの合計を考えればいいってことだ．

<アリス> A, D, C に乗っているそれぞれの重みが，２，４，１だから，その和７ということなのね．

<かず子> だからその重みで，B, C の重みを割って，

$$\overline{AR}=\frac{2}{7}\overline{AB}+\frac{1}{7}\overline{AC}$$

となります．

<先　生> いいですね．今度は，点 B の位置ベクトルを，$\overline{AC}$ と $\overline{AP}$ を用いて表してみよう．

<アリス> 点 B の重み２で，点 C, P のそれぞれの重み１，５を割って，

$$\overline{AB}=\frac{5}{2}\overline{AP}+\frac{1}{2}\overline{AC}$$

となります．

<よしお> あれっ，かず子，ちょっと変だよ．先ほど，点 P の位置ベクトルは，

$$\overline{AP}=\frac{2}{5}\overline{AB}+\frac{1}{5}\overline{AC}$$

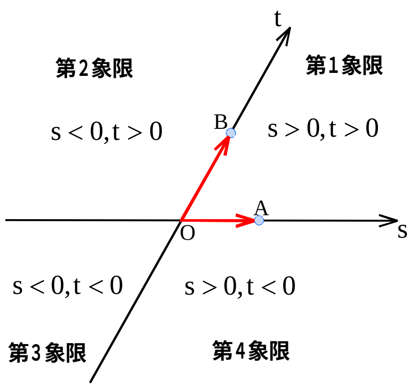
と求めたよね．これを変形すると，

$$\overline{AB}=\frac{5}{2}\overline{AP}-\frac{1}{2}\overline{AC}$$

となってしまう．

<アリス> あれ，本当だ．$\overline{AC}$ の係数が負になっている．どうしてだろ．

<先　生> このことも斜交座標を考えれば分かる．平面全体を直交座標と同じように，第１から第４の４つの象限に分けてみると図のようになるだろ．それでは今の問題の場合，２つの基底ベクトル $\overline{AP}, \overline{AC}$ に対して，点 B は第何象限の点になるだろうか．




<かず子> $\overline{AP}$ を s 軸上，$\overline{AC}$ を t 軸上のベクトルと考えれば，第４象限です．
そうすると，$s>0, t<0$ ですね．そうか，だから $\overline{AC}$ の係数が負になるのね．

<先　生> これは座標のイメージで考えれば，$B\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ になるということだったね．
では，$\overline{AD}, \overline{AQ}$ を用いて，$\overline{AE}$ を表現するとどうなる．

<まなぶ> $\overline{AD}, \overline{AQ}$ をそれぞれ s, t 軸とすると，点 E は第２象限の点になります．
だから，$s<0, t>0$ より，点 E の重み３で，点 D, Q のそれぞれの重み４，３を割って，

$$\overline{AE}=-\frac{4}{3}\overline{AD}+\overline{AQ}$$

<先　生> どんなケースでも求めることができるようになったね．
さあ，これでどうやらかず子の発見は位置ベクトルの簡便的な求め方として利用できそうだ．でもその背景には，まなぶ日く「座標をナナメに読む」という柔軟な発想がある．そう考えるとみんなが苦手なベクトルっていうのは図形問題などで，何とか思考のラクをしようとして考案されたツールとみなしてもよさそうだね．

<かず子> わたしの発見が認められたのは嬉しいけど，斜に構え図形を読んでラクするって部分は，何かべっとりまなぶがまとわりついているみたいチョー鬱陶しいのよね．

<アリス> それって，「憎まれっ子世にはばかる」って日本のことわざですか．

<まなぶ> ぜんぜん違う．何か最近アリスまで僕のことをナナメ方向からみてない？

## あとがき

ベクトルの導入は「向きと大きさできまる」幾何学的ベクトルの定義から進めるのが高校数学では一般的であるが，いつの間にか後半は，代数的に捉えて数の組である座標を用いた数ベクトル的なものに主流が転嫁していく．自由ベクトルが位置ベクトルという束縛ベクトルに結局は屈するのであるが，こういうスタンスの転換はベクトル的ではあるのかもしれないが，馴染めない．行列分野が数 C に移行してしまったり，複素数平面が消滅してしまったという影響が大きいのであろうが，そのアプローチは統一しておきたいと思う．

そのひとつの方法が斜交座標からの考察であろう．平面上でベクトルを動かすのではなく，平面を構築する座標系そのものを変換するとした方が組し易いのではないだろうか．

例えば，線形独立は，

$$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

のとき,

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow s = t = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

からベクトルの一意性が示される.

②の証明は

$$s = t = 0 \Rightarrow s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$$

は明らかである.その逆向きの証明は,

$s \neq 0$ と仮定すると, $\vec{a} = -\dfrac{t}{s}\vec{b}$

これから, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であることより, $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ となり,矛盾が生ずることから示される.

しかし,実は,①と②は同値な条件である.

②⇒①の証明は,①の否定による.

「$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ または $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ 」

とすると,

$\vec{a} = \vec{0}$ のときは, $s = 1, t = 0$

$\vec{b} = \vec{0}$ のときは, $s = 0, t = 1$

$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ のときは, $\vec{a} = k\vec{b}$ より, $s = 1, t = -k$ .

とおくと, $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ となるから,矛盾が生じるのである.

しかし,実際は同値である①,②の関係は,②のベクトルの表現一意性に重きが置かれるため,解法で①が条件として書かれる意図が希薄になってしまう.これを斜交座標として考えることにより,①は平面にベクトルを用いて座標を張るための条件設定として受け入れることができ,その方向性がしっかりと定まるのである.

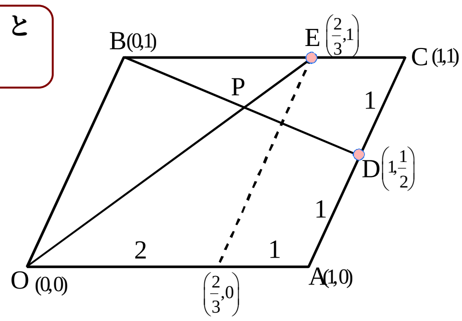
本文の宿題の解答をもう一度まとめてみよう.

> $A(\vec{0}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ とすると, $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \not\parallel \vec{c}$ であるから ……斜交座標が張られ……
>
> $$\overrightarrow{OP} = s\vec{b} + t\vec{c}$$
>
> と表される.
>
> 点 P は,直線 CD 上の点より, $2s + t = 1$ ,点 P は,直線 BE 上の点より, $s + 3t = 1$
>
> 2式より, $s = \dfrac{2}{5}, t = \dfrac{1}{5}$ であるから, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{1}{5}\vec{c}$

これは斜交座標上での2直線の交点を求めているに過ぎず,本文中でかず子が述べたように,「いつの間にか妙に簡単にできてしまった」印象を残すのである.

メネラウス型問題をベクトルで考察するとき,センターテスト的穴埋めの発想として,図形を特殊な形に置き換えて求めるという解法が知られている.例えば,三角形は直角二等辺三角形,平行四辺形は正方形に置き換えてから直交座標上での特殊な解を求めても一般的な図形でも通用すると考えるものである.しかし,平面に斜交座標を考えることは,図形ではなく座標そのものを特殊化してしまうわけで,斜交座標平面では,その解法は一般化されていることになり,上のような解答は通用するのである.もう一つ例を挙げよう.

> 平行四辺形 OACB において, AC の中点を D , BC を2:1の比に内分する点を E とする. BD と OE の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.




この場合も $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を s 軸, t 軸とみなして,各点の座標をイメージすると右のようになる.

$O(\vec{0}), A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とすれば,例えば, $E\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$ は, $\overrightarrow{OE} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$ であることを表している.ここで, $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とすると

直線 OE は, $t = \dfrac{3}{2}s$ ,直線 BD は $t = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{1 - 0}s + 1 = -\dfrac{1}{2}s + 1$

であるから,次の解答を得る.

> $O(\vec{0}), A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とすると, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから (斜交座標が張られ)
>
> $$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
>
> と表される.ここで,
>
> 点 P は,直線 OE 上の点より, $t = \dfrac{3}{2}s$ 　点 P は,直線 BD 上の点より, $t = -\dfrac{1}{2}s + 1$
>
> 2式より, $s = \dfrac{1}{2}, t = \dfrac{3}{4}$ であるから, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{3}{4}\vec{c}$

斜交座標からのアプローチを進めることは，$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と線形結合するときに，$s,t$ の条件式で与えられる領域問題についてもを極めて自然な流れとして誘導できてしまうのである．

なお，本文では，斜交座標を用いることで，加重平均による位置ベクトルの解法について触れた．加重平均は各点に重みを加えた平均であり，力学のモーメントとして説明されるが，ベクトルを定数倍するとは，方向（向きではない）を変えずに大きさを変えることである．例えば，

$$m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

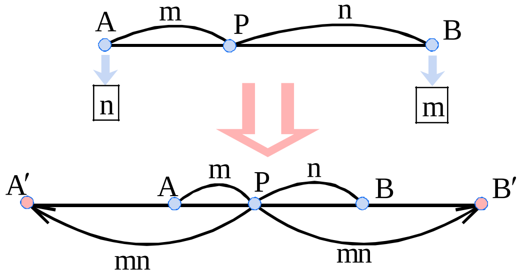
であるとすれば，$\overrightarrow{PA'}=m\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB'}=n\overrightarrow{PB}$ とすると，$A'B'$ の中点が点 P であることを示している．同様に，

$$k\overrightarrow{PA}+\ell\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

は，$\overrightarrow{PA'}=k\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB'}=\ell\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC'}=m\overrightarrow{PC}$ とすると，

$$\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\vec{0}$$

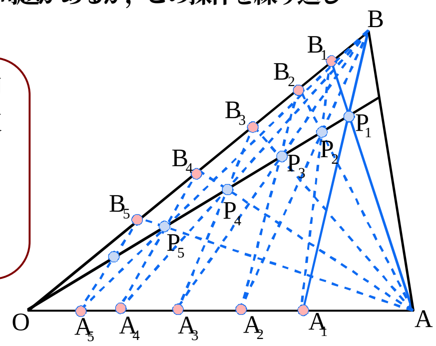
より点 P は，三角形 $A'B'C'$ の重心である．




すなわち，定数倍することは，線分や辺の長さを拡縮して中点や重心になるように調整することであり，そのことにより，斜交座標の基底ベクトルの大きさに違いがでてくるため，大きさを表す重みで割る必要性があると解釈すればよいである．

最後に 1 問．

本文中，バランスメソッドを用い，線分 DE と AP の交点 R の位置ベクトルを求める問題があるが，この操作を繰り返していくとどうなるか調べてみよう．




三角形OABにおいて，辺OAを $a:1$ の比に内分する点を $A_1$，辺OBを $b:1$ の比に内分する点を $B_1$ とし，辺 $AB_1$ と $BA_1$ の交点を $P_1$ とする．次に，線分 $A_1B_1$ と $OP_1$ の交点を $P_2$ とし，直線 $BP_2$ と OA との交点を $A_2$，直線 $AP_2$ と OB との交点を $B_2$ とする．以下，この操作を続け，直線 $A_kB_k$ と $AP_1$ の交点を $P_{k+1}$ $(k=1,2,3,\cdots\cdots,n-1)$ とするとき，$\overrightarrow{OP_n}$ を $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

$A_k, B_k, P_k$ $(k=1,2,3,\cdots,n)$ の各点の重みを調べよう．

$OA_1:A_1A=a:1$，$OB_1:B_1B=b:1$ より，

点 O, A, B の重みはそれぞれ，$1,a,b$ である．これから，点 $A_1, B_1$ の重みはそれぞれ，OA, OB の両端の重みの和 $a+1, b+1$ であり，点 $P_1$ の重みは，3 点 O, A, B の重みの和 $a+b+1$ である．

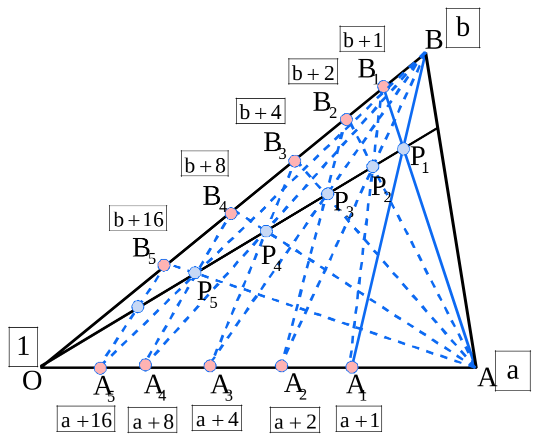
次に，点 $P_2$ の重みは，線分 $A_1B_1$ の両端の重みの和 $a+b+2$ あり，線分 $BP_2A_2$ で考えると点 $A_2$ の重みは $a+2$ である．

同様に，点 $B_2$ の重みは $b+2$ である．続けて点 $P_3$ の重みは，線分 $A_2B_2$ の両端の重みの和 $a+b+4$ であり，線分 $BP_3A_3$, $AP_3B_3$ から，$A_3, B_3$ の重みは，それぞれ $a+4, b+4$ となる．

以下，この操作を続けると，点 $A_k, B_k, P_k$ の重みはそれぞれ，

$$a+2^{k-1},\ b+2^{k-1},\ a+b+2^{k-1}$$

である．




以上より，点 $P_n$ の位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{OP_n}=\frac{a}{a+b+2^{n-1}}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+2^{n-1}}\overrightarrow{OB}$$

となる．

なお，$\Delta OA_nB_n$ で考えれば，$A_n, B_n$ の重みはそれぞれ $a+2^{n-1}, b+2^{n-1}$ であるから，

$$\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{a+2^{n-1}}{a+b+2^{n}}\overrightarrow{OA_n}+\frac{b+2^{n-1}}{a+b+2^{n}}\overrightarrow{OB_n}$$

であり，$P_n$ は次第に辺 $A_nB_n$ の中点に近づいていく．

ここで, 話はまったく変わるが, 生徒にグラフを描かせると, 座標系の設定があまりにおざなりであることに驚かされる.

- 縦線，横線しか描かない(正方向の矢印がない)
- 原点 O がない
- $x, y$ を描かない(縦軸，横軸の変数が何であるか明記しない)
- 軸の目盛をいれない(大きさの基準が分からない)

いずれも平面に座標を張る大事な作業であるのにすべてが省略されてしまい，ナイナイづくし．グラフの描画以前の問題がクローズアップされる．残念ながら，空間座標や斜交座標の話題はずいぶん遠い未来の話になってしまっている．