3次関数の標準形の小手技

札幌藻岩高等学校　中村文則

3次関数の中心を極めろ

<先　生>今日は早速問題からいこう。

ex)　$x=2$ で極小値 3, $x=4$ で極大値 5 をとる3次関数 $f(x)$ を求めよ。

<まなぶ>わーっ、僕の大嫌いな問題だ。
これって、 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおいて、単純に計算していくやつですよね。パス。

<かず子>しょうがないわね。私がやってあげるわ。

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ここで、$x=2,4$ で極値をとるから、 $f'(2)=0,\ f'(4)=0$

よって、　$12a+4b+c=0$　　……①

$48a+8b+c=0$　　……②

また、 $f(2)=3,\ f(4)=5$ であるから、

$8a+4b+2c+d=3$　　……③

$64a+16b+4c+d=5$　　……④

あとは、①〜④の連立方程式を解けばいいのよね。
うーん、確かにやりたくないわね。

<よしお>僕が計算するよ。……でました。$a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{9}{2},c=-12,d=13$ です。先生,でもこれで終わりじゃないのですよね。

<先　生>そう、 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2-12x+13$ となるけど、これが条件を満たすしているかどうか調べなきゃならない。

<かず子> $f'(x)=0$ は、接線の傾きが 0 ということでしかないということでしたよね。$x=2,4$ のそれぞれで、極大・極小となっていることを確認します。

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+9x-12=-\frac{3}{2}(x-2)(x-4)$$

x	……	2	……	4	……
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

より、右の増減表から条件を満たしていることが分ります。

<まなぶ>どうやらできたけど、でも、やっぱりこの問題、しっくりこないなあ。

<かず子>どんな点が。

<まなぶ>だってね。3次関数の概形って以前先生が教えてくれたよね。変曲点を考えればその点に関して点対称であることよりグラフが簡単にかつ綺麗に描けるって。さらに、最高次の係数をみればグラフの増減も予想できるわけだから、増減表を書くのだって無駄なことやってるような気がするんだ。

<かず子>でも、本音は変数が4つもある連立方程式を解くのが面倒くさいんでしょ。

<先　生>変数が4つといっても1次の方程式だから、それほど面倒なことではない。でも、実は変数の個数を減らし、増減表も書かなくていい方法があるんだ。

<まなぶ>なんだ、先生。それなら最初からその方法で説明してよね。

<先　生>そんなことしたらただでさえ計算が苦手なまなぶは、完全に計算音痴になってしまうだろ。

<かず子>いえてる。

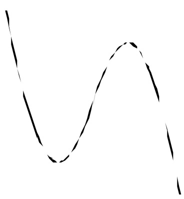
<先　生>その方法のポイントは、プレビューだ。

<よしお>巻き戻しということですか。

<先　生>そう、いままでも何度か使った方法だね。みんなが先ほどやった解答は、3次関数を微分して極値となる点を調べ、増減表を書いて、確認したわけだ。それを増減表から予測してしまうんだ。
　具体的に示そう。題意のように、$x=2$ で極小値, $x=4$ で極大値をとるように増減表がかけるためには、 $f'(x)$ はどういう形になっていればいいだろう。

<かず子> $f'(x)=0$ の解が、 $x=2,x=4$ だから、…… $f'(x)=a(x-2)(x-4)$ ですか。

<先　生>その通り。でもその形では、$x=2$ で極小、$x=4$ で極大となることまで示されていない。定数 a の符号はどうであればいいだろう。



<よしお> 極小点が極大点の右にあるから、$a<0$ ですね。

<先　生>したがって、$x=2$ で極大、 $x=4$ で極小になるには

$f'(x)=a(x-2)(x-4)$　$(a<0)$

であればいいということをいっておく。これで、増減表を書く必要はなくなる。

<まなぶ>なるほど、プレビューという意味が分りました。そうすると、さらにこれを微分する前に戻して $f(x)$ を求めればいいんですね。

<先　生>正解だ。では、 $f(x)$ はどうなるだろう。

<かず子>えーっと、 $f'(x)=a(x^2-6x+8)$ だから、微分して x^2 になるのは次数を一つ高くして x^3 。でも x^3 を微分すると係数が3になって、……、分りました。

$$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right)$$

です。まなぶ、いいでしょ。

<まなぶ>凄い、4つだった変数が、たった1つになっちゃった。

<先　生>本当にそうだろうか。

<よしお>まてよ、かず子、定数って微分すると 0 だろ。そうすると、いまかず子が求めた式に適当な定数をくっつけておいても導関数は一緒じゃないだろうか。

<先　生>よしおのいう通りだ。すなわち、

$$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right)+b$$

とおけるということだ。

<まなぶ>なんだ。変数が2つに増えちゃった。

<かず子>それでもずいぶん計算が楽になったわ。

あとは、 $f(2)=3, f(4)=5$ から式を作ればいいだけだわ。まなぶ、やってごらんよ。

<まなぶ>だって、代入すると、分数の計算がでてくるじゃないか。パス！

<かず子>もーっ、ぐうたらなんだから。私がやるわ。代入して、

$$\frac{20}{3}a+b=3、\frac{16}{3}a+b=5$$

これを解いて、 $a=-\frac{3}{2}, b=13$

よって、

$$f(x)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right)+13=-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+13$$

となるわ。

<まなぶ>まあ、確かに少しは楽になったみたいだな。

<かず子>なんか、まなぶはまだ不満そうみたいね。

<先　生>ぐーたらまなぶに合わしたくはないけど、それじゃあ、もう少し簡単に求めることを考えてみようか。

<まなぶ>なあんだ、先生あるじゃない。出し惜しみして。

<先　生>(……まなぶを無視して……)、まず、問題文の情報から、求める三次関数の概形を予想して書いてごらん。

<よしお>さきほど a の符号を調べたときに予想したように、右図のような形ですよね。

<先　生>では、次にグラフを下に下降させて、極小点が x 軸にぶつかるまで、落としてごらん。

<かず子>はい、図のようになります。

<先　生>ではみんなに聞くけど、こうやって落としたグラフの方程式はどう表されるだろう。

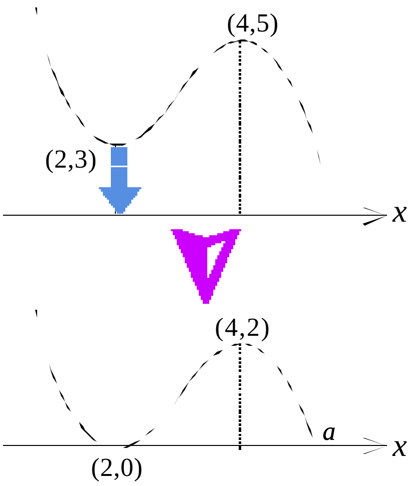
<よしお>極小点で x 軸と接するんですよね。ということは $(x-2)^2$ の形になりますよね。

<かず子>さらに、もう一箇所 x 軸と交わる点があるから、その交点の x 座標を $x=a$ とすると、 $(x-a)$ も因数に持つわ。

そうすると、ひょっとしたら

$$y=(x-2)^2(x-a)$$

ですか。



<先　生>惜しい。肝心なものを忘れている。グラフの開きぐあ……

<まなぶ>分った。 $y=a(x-2)^2(x-a)$ でしょ。

<先　生>鳶に油揚げをさらわれたような気分だ。その通り。さあ、そうすると元の式は今度はそれを下げた分だけ上げていけばいいだろう。

<かず子> $f(x)=a(x-2)^2(x-a)+3$ ということですよね。でも先生。 a の値が分らないんじゃこの先進めませんよ。

<先　生>その a の値、本当に分らないだろうか。

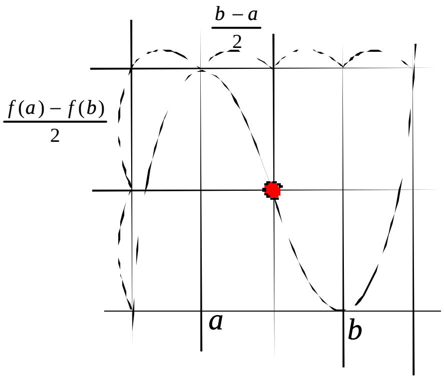
<まなぶ>意味深ですね。なんか験されているようで癪に障るな。

<先　生>三次関数のグラフの性質をもう一度よーく思い出してごらん。

<まなぶ>あっ、分ったぞ。８個の長方形でしょう。
<かず子>そうか。変曲点や極点を基準に８個に分けた合同な長方形の中に三次関数が綺麗に納まってしまうって性質ね。
<よしお>右図のことですね。
<先　生>そう、その通り。ではいまの場合のグラフについて８つに切ってみよう。一つの長方形の横の長さはどれだけだろう。
<かず子>極点の x 座標の差は２だから、長方形の横の長さは１です。
<まなぶ>そうすると、残りの x 軸との交点は、 $x=5$ ですね。
すなわち、

$$f(x)=a(x-2)^2(x-5)+3$$

ということですね。
すごい。１つの変数で $f(x)$ が表現できちゃった

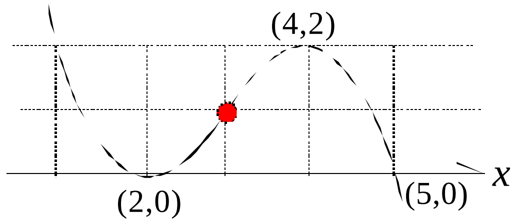


<かず子>ほんと。凄いわ。４つあった変数がたった１つになっちゃうのね。
<先　生>さあ、ではあとはこの a の値を求めて終わりだ。どうする。
<よしお>曲線上の点を代入すればいいと思います。極大点は $f(x)$ を作るときに使ってないからこの点を代入します。
<まなぶ>じゃ今度は僕が計算してあげよう。
$f(4)=5$　だから、

$$f(4)=a\times4\times(-1)+3=5$$

これから、 $a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2(x-5)+3$$



となるね。
あとは、これを展開して整理すれば終わりだ。
<先　生>いつものように最後の美味しいところをまなぶが掻っさらっていってしまった。でも、ルーズなまなぶ的思考も、考えてみると数学ではとても重要なことではないだろうか。よく洒落て「数楽」って読んで、「数学は楽しむ」ものだとこじつけちゃうけど、「数楽」は、「数学を楽する」とも読める。いかに計算も含めて楽になるか追及していく過程で、発想や公式といったものが生まれてくるのではないだろうか。
<まなぶ>何か、こそばゆいな。じゃあ、先生、もう少しお言葉に甘えていいですか。いっそのこと変数を全部なくすことはできないのですか。
<先　生>前言を撤回する。

あとがき

まなぶの最後の要求に応えることは可能でしょうか。
それは３次関数のグラフの開き(最高次の係数を開きと見なしましょう)が極点から求めることができれば、変数をすべてなくすことが可能です。
３次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の極大点､極小点をそれぞれ $(a,f(a)),(b,f(b))$ とします｡すなわち､ $a>0$ とします｡
このとき、変曲点は、

$$\left(\frac{a+b}{2},f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

となります。
極小点を x 軸に落として(浮かせて)みましょう。長方形の横の一辺の長さは、
$\frac{b-a}{2}$ となりますから、残り x 軸との交点の x 座標は、 $x=a-\frac{b-a}{2}$
となることより、

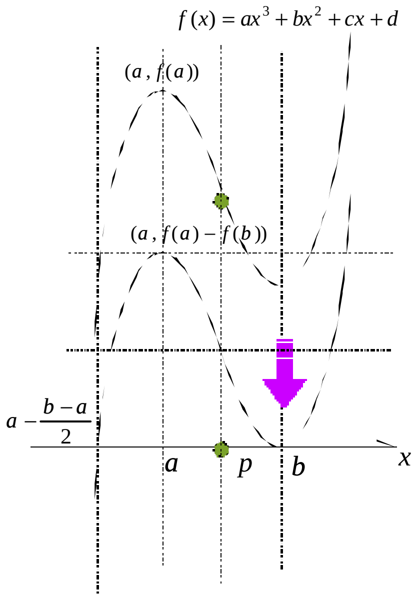
$$f(x)=a\left(x-a+\frac{b-a}{2}\right)(x-b)^2+f(b)$$

と表されます。ここで、極大点を代入すると、

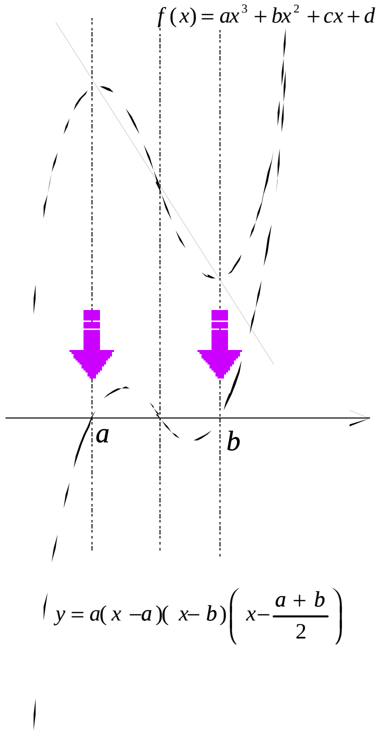
$$f(a)=a\left(\frac{b-a}{2}\right)(a-b)^2+f(b)=\frac{a}{2}(b-a)^3+f(b)$$

よって、

$$a=\frac{2(f(a)-f(b))}{(b-a)^3}$$



グラフの開きであるaの値が求まりました。もっとも、こうやって求めるくらいなら、本文で計算しているように極点の一つを実際に代入した方が速いようですが。
ところで、今回の小手技の表題は「３次関数の標準形」となっていますが、本文ではこのことに直接には触れていません。少し考えて見ましょう。
グラフには、その式の表現法として、一般形、標準形、切片形といった形が通常用意されています。
この中で標準形はグラフの特徴をもっとも的確に表すものです。
例えば、放物線においては、その式から頂点や軸の方程式が読み取れることは周知のことです。では、３次関数の標準形はどう表現すればいいのでしょうか。本文で紹介した形もそのひとつと考えていいかもしれませんが、極点の片方については$(x-a)^2$として接点で表されますが、他点については等間隔性から間接的に織り込まれる形です。もっと極点をはっきりと示す形で式が表現できないでしょうか。
ところで、今回の小手技の内容は、「放物線の切片形の小手技」の３次関数への拡張版であることに気づいた方もいらっしゃるかもしれません。グラフを直線で切って、カバリエリの原理的に、y軸に平行にせん断してx軸上に落とし、再構築するという方法です。本文では、極小点を通りx軸に平行な直線で切り、落としたわけですが、これを極大点、極小点の２点を通る直線で切ってみましょう。



２極点を$(a, f(a)),(b, f(b))$とします。この直線は変曲点も通ることより、x軸上に落とすと、３点

$$(a,0),\left(\frac{a+b}{2},0\right),(b,0)$$

を通ります。したがって、落としたグラフの方程式は、

$$y=a(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

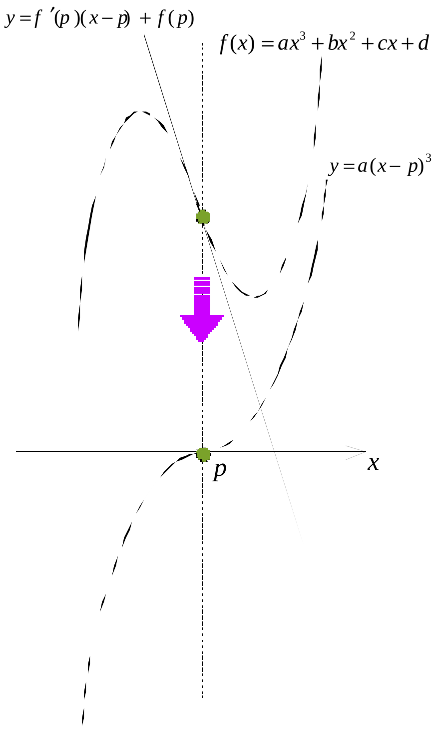
となります。また、切った直線の方程式は、

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

より、求める３次関数は、

$$f(x)=a(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

で与えられることが分ります。
さて、この形を標準形と見なすこともできます。しかし、極点、変曲点でx軸を切っているので、切片が示されている形と考え、「３次関数の切片形」とした方が妥当かもしれません。
もう一度、標準形について確認してみましょう。
２次関数は、頂点と軸でその形が表現できますが、その元になる２次関数は基本形$y=ax^2$、すなわちグラフの開きだけで与えられるものです。したがって同様に３次関数も基本形から出発するのが自然といえます。ここで３次関数の基本形とは$y=ax^3$です。一般形で与えられた３次関数の基本形に分解するには、変曲点における接線で切ることで可能となります。この接線は元の３次関数と変曲点以外に交点をもたないから、切って落とすと、基本形をx軸方向に平行移動した形で式が作られます。



変曲点の座標を$(p, f(p))$とすると、その方程式は、

$$y=a(x-p)^3$$

となります。そして、この式に変曲点における接線

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

を加えることで、

$$f(x)=a(x-p)^3+f'(p)(x-p)+f(p)$$

が得られます。
この式を３次関数の標準形とすることにしましょう。
では、極点しか与えられていないときに、変曲点におけるこの接線を求めるにはどうすればいいでしょうか。
極点を$(a, f(a)),(b, f(b))$とすると、

$$f'(x)=3a(x-a)(x-b)$$

となります。ここで、$p=\frac{a+b}{2}$ですから、

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=3a\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)=-\frac{3a}{4}(b-a)^2$$

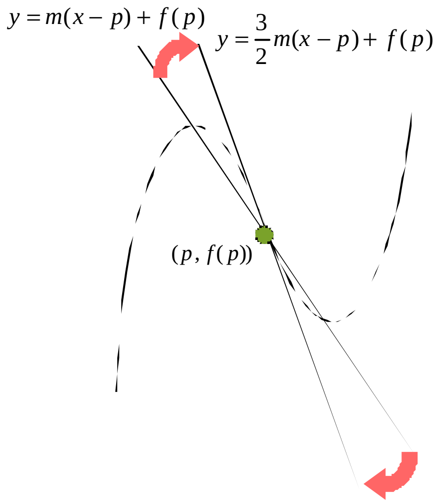
これが接線の傾きとなります。

ここで、

$$a=\frac{2(f(a)-f(b))}{(b-a)^3}$$

であることより、

$$f'(p)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2(f(a)-f(b))}{(b-a)^3}\cdot(b-a)^2=\frac{3(f(b)-f(a))}{2(b-a)}$$



２極点を結ぶ直線の傾きを m とすると、

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ですから、

$$f'(p)=\frac{3}{2}m$$

すなわち、

変曲点における接線の傾きは、２極点を結ぶ直線の傾きの$\frac{3}{2}$倍である

という結論が得られます。

また、$n=\frac{b-a}{2}$ とすると、

$$a=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=-\frac{m}{2n^2}$$

これから、

$$f(x)=-\frac{m}{2n^2}(x-p)^3+\frac{3}{2}m(x-p)+f(p)$$

となることが分ります。

ex) ３次関数 $f(x)$ が $x=1$ で極小値 2, $x=3$ で極大値 6 をとるとき、関数 $f(x)$ を求めよ。

解) $m=\frac{6-2}{3-1}=2,\ n=\frac{3-1}{2}=1$

また、変曲点は$(2,4)$ であるから、

$$f(x)=-(x-2)^3+3(x-2)+4$$
$$=-x^3+6x^2-9x+6$$

<付 記>

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の２極点の x 座標を a,b とすると、

$$f'(x)=3a(x-a)(x-b)$$

となりますから、

$$f(b)-f(a)=3a\int_a^b(x-a)(x-b)dx=-\frac{a}{2}(b-a)^3$$

これから a の値を簡単に求めることができます。

また、３次関数の標準形は、変曲点を中心として考えられることは次のことからも分ります。

３次関数を $x=p$ を極として、taylor 展開すると、

$$f(x)=\frac{f'''(p)}{6}(x-p)^3+\frac{f''(p)}{2}(x-p)^2+f'(p)(x-p)+f(p)$$

となりますが、 $x=p$ が変曲点の x 座標であれば、 $f''(p)=0$ より、

$$f(x)=\frac{f'''(p)}{6}(x-p)^3+f'(p)(x-p)+f(p)$$

よって、３次関数の標準形が得られました。