$f(x)/x$のグラフの小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○想いを傾けて描く

<先　生> 今日は，数学IIIの微分に登場する有名関数である

$$f(x)=\frac{\log x}{x}$$

のグラフについて考えてみよう．まず，概形を書いてごらん．

<よしお> 増減表を作ります．

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

これから増減表は，右表になります．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

<かず子> では，私がグラフを描くわ．

まず，$f(x)$ の極限を考えると，分子の $\log x$ と分母の x では，大きくなるスピードは x の方が断然，速いから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

となるわ．これから x 軸が漸近線ね．

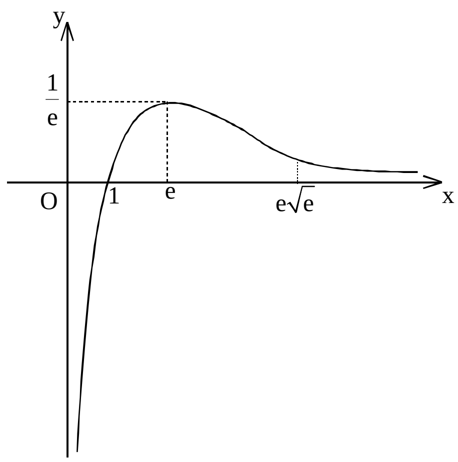
次に，x を右側から 0 に近づけると…，あれっ，どうすればいいだろう．

<アリス> 「手元において分からなければ，手放す」方式ですよね．

$x=\frac{1}{t}$ とおくと，$x\to+0$ ならば，$t\to+\infty$ だから，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to+\infty}t\log\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}(-t\log t)=-\infty$$

だから，y 軸も漸近線になります．



<まなぶ> その「手元に……」は，イギリスのことわざ？．日本流にいえば「可愛い子には旅をさせよ」ってことかな．でも，$f(x)=0$ の解は $\log x=0$ より，$x=1$ しかないから x 軸が漸近線になるのは予想できるし，関数の分母≠0 だからたいていは分母=0，すなわち $x=0$ も漸近線だよな．

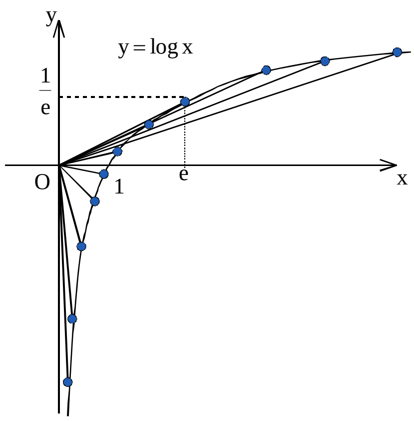
<アリス> えっ？，その意味薄弱，あっごめんなさい，意味不明といっていいんでしょうか，言葉の意味がよく分からないのですけど．

<かず子> いいのよ，それがまなぶなんだから．とにかく，これでグラフの概形は図のようになるわ．

<先　生> 実際は，y 軸の 1 目盛間隔は大きくとらないと y の変化は見えにくいね．x 軸と同じ目盛幅だとまなぶみたいなメリハリのないグラフが出来上がってしまう．

<まなぶ> むっ，なんか，集中砲火を浴びているような気がするんだけど．

<先　生> まっ，無駄話はこのへんにして，そこでだ，今度はこのグラフを増減表を使わないでかくことを考えて見よう．そのためにはまず，$\frac{\log x}{x}$ の式の意味を考えてごらん．



<よしお> 式の意味？，$\log x$ を x で割っているということの意味ですか．

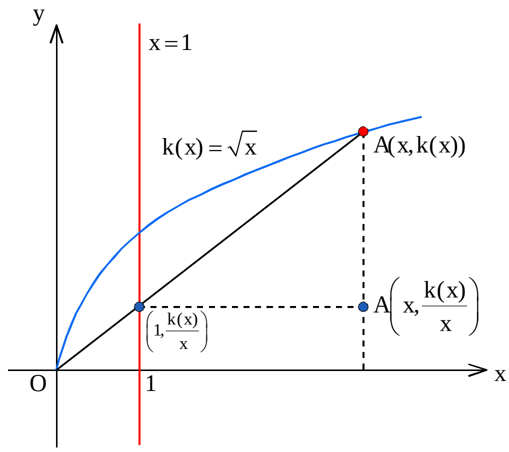
<先　生> 言い方が悪かったけど，そういうこと．割ることにはどんな意味があるだろう．少し補足すると，x の変化に対して $\log x$ の変化が何を表すかということだ．

<まなぶ> そこまで言われれば分かりますよ．傾きでしょ．原点と曲線 $y=\log x$ 上の点を結ぶ直線の傾きを表している．

<先　生> その通り．だから，$\frac{\log x}{x}$ の値はその傾きに等しいことになるから，関数 $y=\frac{\log x}{x}$ は $\log x$ の傾き，すなわち勾配から得られた関数であり，これを勾配関数というように表現することもできる．$y=\log x$ のグラフを書いて，傾きを追ってみてごらん．その増減からグラフの概形が浮かび上がってくるだろう．

<アリス> なんとなく分かります．$A(1,0)$ を通るときは，傾き 0 だから，勾配関数も点 A を通りますね．$x<1$ の範囲では，傾きは凄いスピードで増加し，$1<x$ で緩やかなスピードに徐々になり，ある点を境に少しずつ減少しているわ．

<まなぶ> よくそんなにリアルにイメージできるね．はっきりいって僕にはよう分かりません．



<先　生> たしかにアリスのようにイメージを再現するのは難しいかもしれないね．もう少し，簡単な例で考えてみようか．

$k(x)=\sqrt{x}$ として，その勾配関数 $\dfrac{k(x)}{x}$ を調べてみよう．

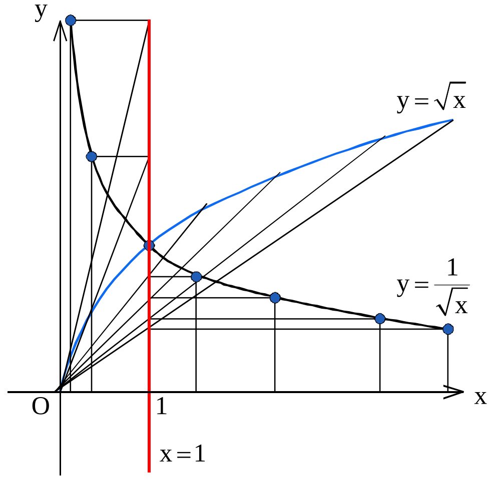
この傾きの「増加・減少」はどちらかというと直感的なものだから，なかなか読み取り難いのだけれど，でも実はこれ，簡単に視覚化できる．タンジェントのグラフをどうやって書いたか思い出してみると分かるかもしれない．

<よしお> あっ，そうか，$x=1$ ですね．

<まなぶ> どういうこと，よしお，教えてよ．

<よしお> タンジェントのグラフは，動径が変化したとき，原点と単位円周上の点を結ぶ直線が，直線 $x=1$ と交わる点の y 座標が正接の値に等しいことを利用しただろ．この場合も同じさ．原点と曲線上の点 A を結ぶ直線OA と直線 $x=1$ との交点が傾きを表している．

<かず子> なるほどね．直線と $x=1$ との交点の y 座標の変化が求めるグラフの y の値の変化なのね．だから，グラフをかくには，あとは曲線上の点 A の位置にその y の値を移せばいいってことね．



<先　生> 正解だね．では，この方法を使って，点を移動させてグラフの概形を予想してごらん．

<かず子> わたしがやります．直線と $x=1$ との交点を求めて，その値を横にスライドさせて，直線と曲線の交点の位置までもってきて……

先生，できました．

<先　生> うん，実に正確に描けている．いま，かず子が書いたグラフは，

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ということになるね．

もう 1 題，考えてみよう．

$k(x)=e^x$ として，その勾配関数はどうなるだろう．

まなぶ，やってごらん．

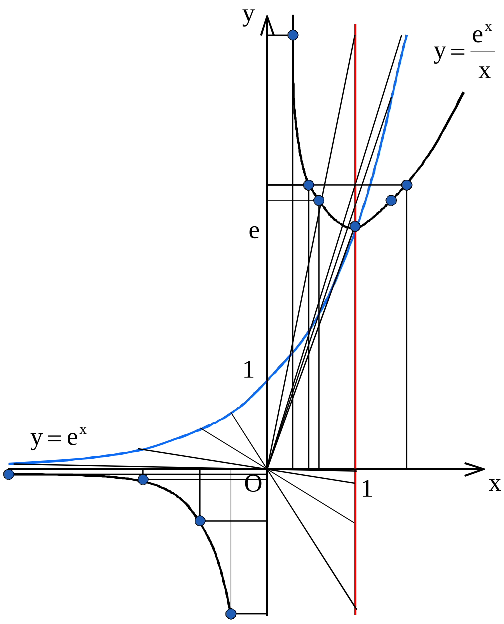
<まなぶ> $y=\dfrac{e^x}{x}$ のグラフですよね．嫌な予感がする．

<アリス> どうしてですか？

<まなぶ> だってこれ，分母に x があって，定義域は $x=0$ 以外でしょ．そうすると $x=0$ が「かわ」になるような気がする．

<アリス> 「かわ」？

<かず子> 川のことよ，気にしないで．



<まなぶ> そう，川という漸近線．とりあえず，$x>0$ で考えると，案の定，傾きは無限の値から凄いスピードで落ちてくるから y 軸は漸近線だ．そして，さらに減少を続けて……，あれ，途中で増加し始めるみたいだ．ということはこのグラフ，極点があるってことですよね．

やられた，悪意を感じる．結局，$\dfrac{e^x}{x}$ を微分しなきゃいけなってことでしょ．

<先　生> そうだろうか．勾配関数の意味をもう一度よく考えてごらん．微分は必要だけど，それは $\dfrac{e^x}{x}$ についてだろうか．

<よしお> 勾配関数 $\dfrac{k(x)}{x}$ は，$k(x)$ の傾きを表す関数でしたよね．

傾きということは……，

<まなぶ> そうか，$k'(x)$ だ．

$$\frac{k(x)}{x}=k'(x)$$

であればいいんだ．

$$\left(e^x\right)' = e^x \quad だから，\quad \frac{e^x}{x} = e^x$$

これから $x=1$ で極小値をとり，その値は e ですね．

$x>1$ からは増加していき……，これで $x>0$ のグラフは完成．

$x<0$ については，傾きは単調に減少してますね．で，x を $-\infty$ に近づけると直線 $x=1$ との交点は，負の値をとりながら 0 に近づくから x 軸も漸近線になる．

ふーっ，やっと完成した．

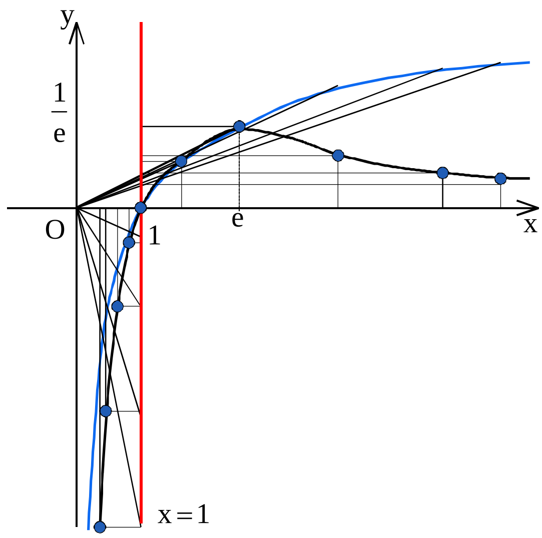
<アリス> まなぶくん，すごい．

<先　生> いまのグラフから重要な性質がみえたね．勾配関数においては極点候補は，

$$\frac{k(x)}{x} = k'(x)$$

で与えられるということだ．

さあ，それではいよいよ $y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフを書いてみよう．



<よしお> まず，極点を求めておいたほうがいいですね．

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad だから，\quad \frac{\log x}{x} = \frac{1}{x}$$

これから，$x=e$ のとき，$y=\dfrac{\log e}{e}=\dfrac{1}{e}$ ですね．

さあ，あとは直線 $x=1$ に値を移していくと，$x>0$ で $-\infty$ から値が，凄いスピードで増加するから，y 軸が漸近線．そして，$x=e$ で接して，そのあと緩やかに減少して傾きは次第に 0 に正の値をとりながら近づくから x 軸も漸近線ですね．

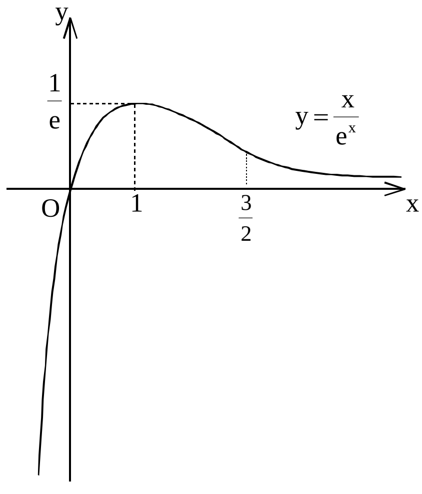
これをグラフに表すと，……，できました！

<先　生> いいですね．これで勾配関数からグラフのイメージがだいぶ掴めるようになったね．さて，ここで，さらにちょっと面白い見方をしてみようか．$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ において，$e^x>0$ であることより，x を e^x と置き換えても真数条件は満たされるね．するとグラフはどうなるだろう．

<かず子> 変域 x の値の変化が等差から等比のスピードで変化するということですよね．だから，x を無限大にしたときに漸近線の x 軸に近づくスピードが速くなるわ．

<アリス> でも変域 y は $f(x)$ と変わらないわ．

<先　生> ではその極点はどこになるだろう．



<まなぶ> $f(x)$ は，$x=e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとるから，この場合は，

$e^x=e$，すなわち $x=1$ のとき，極大値をとり，当然その値は $f(x)$ の極大値と変わらないですよね．

<先　生> そう，だから $f(x)$ をまなぶと違いもっとメリハリのあるグラフになる．

<まなぶ> しつこい性格だね．ったく．でも先生，y 軸は $f(x)$ の漸近線という壁だったけど，x を e^x にした場合，定義域は実数全体になるから漸近線はなくなるよね．$x=-\infty$ を漸近線の壁とみてもいいかもしれないけど．

<先　生> こういう表現はさすがまなぶだな．x 軸との交点も，$f(x)$ では $x=1$ であったから，$e^x=1$ より，$x=0$ となる．さあ，これでグラフの概形は分かった．ではこの関数を式で表してみると，

$$y = f(e^x) = \frac{\log e^x}{e^x} = \frac{x}{e^x}$$

これも，有名関数のひとつだったのを覚えているかな．

<よしお> へぇー，面白いですね．2つの関数のグラフが同じような概形をしている理由がやっと分かりました．

<先　生> 実は，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフから，さらに別のグラフを作ることもできるんだ．

今度は，x を $\dfrac{1}{x}$ に置き換えるとどうなるだろうか．

<かず子> 関数は，

$$y = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -x\log x$$

となるけど，そういえば，$x\log x$ もよく見かける関数ですね.

<まなぶ> 先生，ということは，このグラフも $f(x)$ のグラフを利用してかけるってことですか.

<先　生> そういうことだ．そのために $f(x)$ と $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ のグラフの関係はどうなっているか考えてみよう.

<アリス> 先ほどの勾配関数では，y の値を直線 $x=1$ に移してグラフを書きましたよね．だから今度も y 座標の値がどう移るか考えればいいような気がしますが.

<先　生> いい読みだね．それを x と $\dfrac{1}{x}$ の関係から調べてごらん.

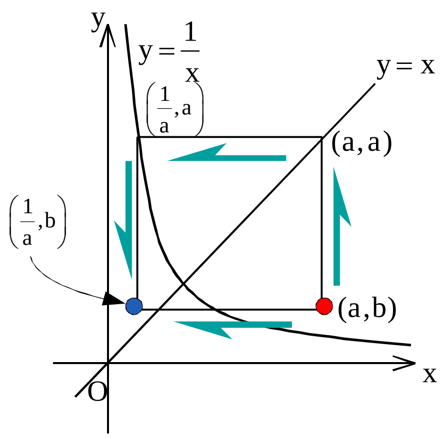
<まなぶ> x と $\dfrac{1}{x}$ の積は1ですよね．なるほど，そういうことか.

<かず子> まなぶ，分かったの.

<まなぶ> うん，たぶん，x と $\dfrac{1}{x}$ の値が同じになるように，y の値を決めればいいってことじゃないかな.

$x=2$ の値は $x=\dfrac{1}{2}$，$x=5$ の値は $x=\dfrac{1}{5}$ といったように.

<先　生> その通りだ. 正確に点を移すのであれば直線 $y=x$ と双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ を用意することで可能となる. 図をみてごらん.



平面上の点 (a,b) を，y 軸方向に移動させて，直線 $y=x$ との交点を求めると，(a,a)．次に，x 軸方向に移動させて，双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ との交点を求めると，$\left(\dfrac{1}{a},a\right)$．そして，$y$ 軸方向に移動させて，$y=b$ との交点が求めると，$\left(\dfrac{1}{a},b\right)$

これが，$x=a$ から $x=\dfrac{1}{a}$ に移動させた点となる.

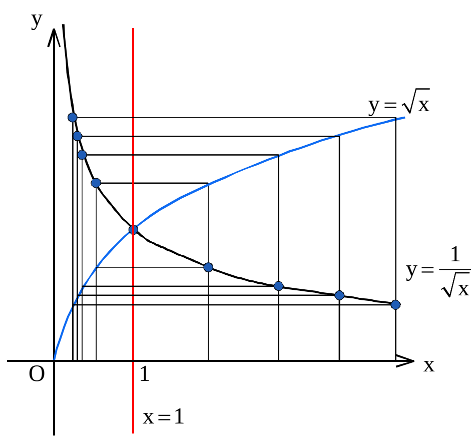
ただ，これでいちいち点を移動させると，補助の直線や曲線がたくさんできてしまい，見づらくなる．大雑把な概形だけを押えるのであれば，

$x=n$（n は整数)を $x=\dfrac{1}{n}$ に移すことだけでも十分に形をみることはできる.

イメージとしては，$x>0$ のときは，$f(x)$ の $1<x$ の部分を変換すると, 直線 $x=1$ に関して対称移動をしてから，$0<x<1$ の間にぎゅっと圧縮し，$0<x<1$ の部分は，同様に直線 $x=1$ に関して対称移動してから，$1<x$ の範囲にぐいっと無限の幅で引っ張ってやったようなグラフになる.

$x<0$ についても同じように考えることができる.

ためしに $f(x)=\sqrt{x}$ のグラフで確認してみよう.



この関数は, 勾配関数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ と $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ も同じ関数になるからイメージし易いと思う.

では，書いてごらん.

<よしお> $x>1$ の場合は，$y=\sqrt{x}$ は，$x=2,3,4,5,\cdots$ に対して，緩やかな増加であったのに対して，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$ は，激しい減少に転じます.

$0<x<1$ の場合は, 比較的スピードある増加が緩やかな減少に転じていきます.

$x=0$ や $x=\infty$ は逆数をとることで，それぞれ $x=\infty$，$x=0$ に近づくから，x 軸と y 軸は漸近線になりますね.

<アリス> 先ほど，勾配関数でかいたグラフと同じものが確かに浮かびあがってきたわ.

<先　生> では，同じように考え，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対して $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ のグラフをかいて見よう.

<かず子> 私がやります.

まず，$1<x$ の部分では，$f(x)$ は $x=e$ で極大値をとる緩やかに上に凸のようなグラフだから(実際は変曲点があるから違うけど)，これが $0<x<1$ に移り，ぎゅっと山なりのグラフになります．次に，$f(x)$ の $0<x<1$ の部分の増加は，$1<x$ では減少する状態になり，図のグラフが出来上がります.

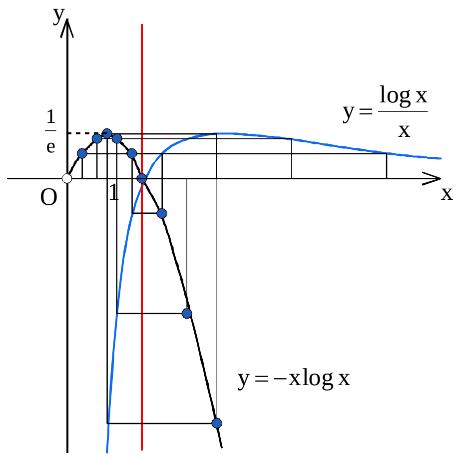
<先　生> うん，ただ，このグラフでちょっと微妙な値の部分があることが分かるだろうか.

<まなぶ> ビミョウですか．先生の発言はいつもビミョウだけど.

<先　生> 関数 $f(x)$ はもともと x 軸($y=0$)が漸近線だったね.

すなわち，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ということだ．では，これは $0<x<1$ に移したとき，

x を正の値をとりながら 0 に近づけたら，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ の値はどうなるだろう．



<アリス> 同じように 0 に近づくと思います．だから，

$$\lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ですよね．

<かず子> わたしもそう思う．だけど，無限の幅があって漸近線が考えられたわけだから，これを $0<x<1$ に圧縮すると，漸近線ではなくなってしまうと思うけど．

<まなぶ> ということは，グラフの曲がり方も，x が 0 に近づくと上に凸の形にならないとまずいよな．

<先　生> 結論がみえてきたね．すなわちこのグラフは $x=0$ のところにポツっと穴が開いていることになる．

<よしお> 漸近線という無限の処理が随分面白い形で現れてくるんですね．

<先　生> さらにだ．その極限は不思議な性質を生み出す．

$$\lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}(-x\log x)=\lim_{x\to+0}(-\log x^x)=0$$

ということは，対数 $\log x^x$ の真数 x^x の極限はどうなる．

<アリス> $\lim_{x\to+0} x^x=1$ ですか．

わーっ，ファンタスティック！．

<かず子> どうしたの？，アリス．

<アリス> だって，これって，

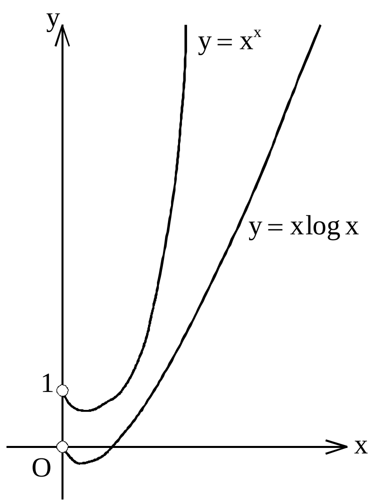
$$0^0=1$$

ってことでしょ．0 の 0 乗が 1 ということですよね．

<よしお> 本当だ．何もないもの同士なのに演算結果が 1 になっている．

<先　生> ついでに x^x の極限がみえるようにしてみようか．

まず，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x\log x$ のグラフを x 軸に関して対称に移動すると，



$$y=x\log x=\log x^x$$

次に，このグラフと $y=x^x$ のグラフはどんな関係になるだろう．

<よしお> 対数関数 $\log x$ は緩やかな増加関数だから，x を x^x に変えたら増加のスピードが速くなります．

<先　生> だから，図のようなグラフになるね．なお，その極小値は，$f(x)=\frac{\log x}{x}$ が $x=e$ に極大になっていたことから，

$$x=\frac{1}{e}\ \text{のとき，}\ \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{-e^{-1}}$$

であることも分かるね．

<まなぶ> 最小の値が 0^0 ではなく，$e^{-e^{-1}}$ というのも面白いな．

ファンタスティックどころかミラクルだ．

<先　生> まなぶにしてはずいぶん素直というか，好意的な評価だよな．

0 を 0 乗といった，何もない，一見メリハリのない平凡な値でも，実は意外なほど，鮮やかな，そして劇的な変化が潜んでいるのかもしれないね．人間と同じように．

あとがき

曲線 $y=f(x)$ の概形は，微分(増減表)を用いなくてもある程度はイメージすることが可能である．

本文では，対数関数 $y=\log x$ のグラフから種々の曲線を創造し，そこから0の0乗の値を視覚的に捉えることができればと考えた．

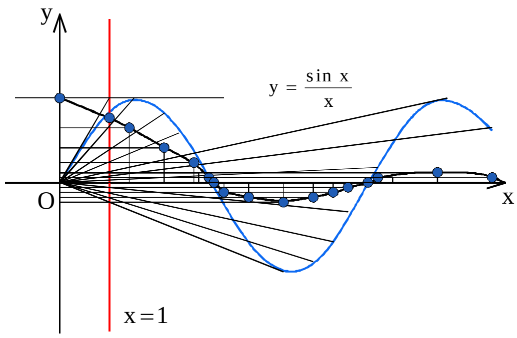
関数 $k(x)$ に対して，$f(x)=\frac{k(x)}{x}$ は，原点と $k(x)$ 上の点を結ぶ直線の傾きを表す，いわゆる勾配関数である．この勾配関数は，その傾きの変化を直線 $x=1$ 上に投影し，その y 座標の値を読み取ることで，グラフの概形をイメージすることができる．代表的な勾配関数である

$$y=\frac{\sin x}{x}$$
をその導関数を求め増減表により概形を調べることは難しい.

しかし, $k(x)=\sin x$ を利用し,

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を出発点とすることで, 容易にその概形を想像することができるのである.



$\log x$ から作られる勾配関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ についても, その概形は簡単に求められる.

さらに, 極点の判定についても, 勾配が接線の傾きに等しい

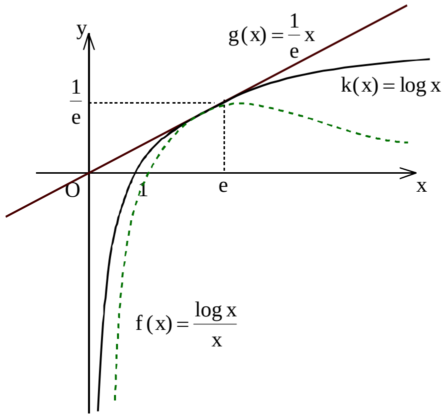
$$\frac{k(x)}{x}=k'(x)$$

を極点候補とし, その前後の傾きの変化から求めることができる.

$\dfrac{\log x}{x}$ の場合は $k(x)=\log x$ から,

$$\frac{\log x}{x}=k'(x)=\frac{1}{x}$$

より, $x=e$ であり, この前後で勾配が増加から減少へ転じるため, 極大値 $f(e)=\dfrac{1}{e}$ を得る.



このとき, 接線 $g(x)=\dfrac{1}{e}x$ に対して, $k(x)\leqq g(x)$ となり, $k(x)$ が上に凸の曲線であることより, 重要な極限の関係式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を知ることができる.

(*)の証明は, 本文では $\log x$ と x の order $x>>\log x$ により求めているが, 一般には, はさみうちの原理を利用する.

$f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおくと,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

x	0	…	4	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	最小	↗

よって, 関数 $f(x)$ は, $x=4$ で極小かつ最小となる.

$$f(x)\geqq f(4)=2-\log 2=\log\frac{e^2}{2}>0$$

以上より, $\log x<\sqrt{x}$

ここで, x を十分大きい値と考えると,

$0<\log x<\sqrt{x}$ 　より, $0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

また, $y=\dfrac{\log x}{x}$ に対して, $y=\dfrac{x}{e^x}$ は「ほとんど同じグラフ」と本分では述べているが,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}=1 \quad (\,p\ は自然数)\ \cdots\cdots(**)$$

から(*)を導き出すことも触れておこう.

$f(x)=e^x$ をマクローリン展開すると,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+\cdots\cdots\geqq\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

よって, $0<\dfrac{x^p}{e^x}<\dfrac{(p+1)!}{x}$

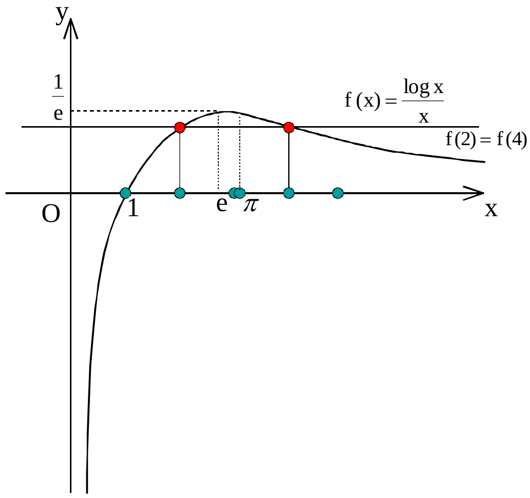
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)!}{x}=0$ 　であるから, はさみうちの原理により, (**)を得る.

ここで, $t=e^x$ とおくと, $x\to\infty$ 　のとき, $t\to\infty$ であるから,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\log t)^p}{t}=0$$

(*)は $p=1$ のときの関係式である.

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ および，(*)の関係式から得られる種々の性質をここでまとめておこう.



① $e^{\pi}>\pi^{e}$

$y=f(x)$ は，$x=e$ で最大となる．よって，$f(e)>f(\pi)$

これより，

$$\frac{\log e}{e}>\frac{\log \pi}{\pi}$$

∴ $\pi\log e>e\log\pi$ より，$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

$\log x$ は単調増加関数より，$e^{\pi}>\pi^{e}$

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\log\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log n}{n}}=e^{0}=1$$

これから，さらに，$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ を得る.

③ $\sqrt[n]{n}$ (n は自然数)は $n=3$ のとき最大

$$\sqrt[n]{n}=e^{\frac{\log n}{n}}<e^{\frac{\log e}{e}}$$

$2<e<3$ であるから，$n=2$ または $n=3$ で最大となる.

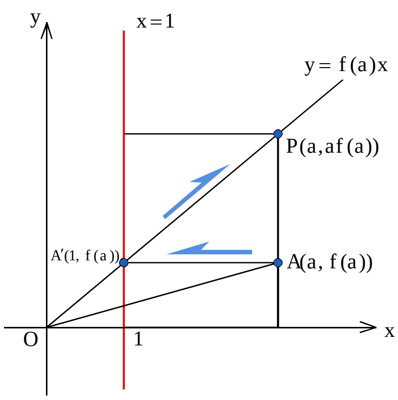
$\sqrt[2]{2}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$ であるから，$\sqrt[3]{3}$ が最大値である.

④ $m^{n}=n^{m}$ ($m<n$)を満たす自然数 m,n は $m=2,n=4$ のみである.

両辺に自然対数をとると，

$$\frac{\log m}{m}=\frac{\log n}{n}$$

これを満たす自然数が $m=2,n=4$ のみであることはグラフより明らか.



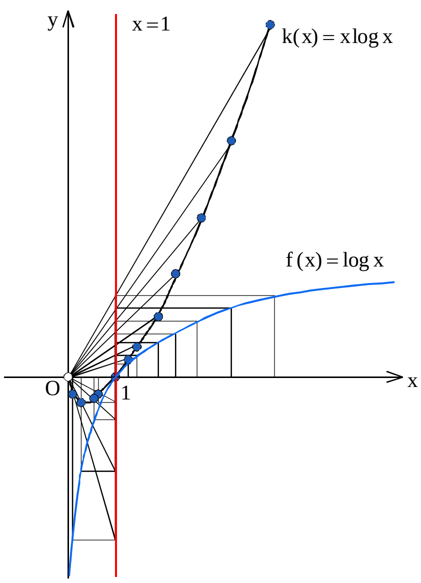
ところで，関数 $k(x)$ の傾きから，勾配関数 $f(x)=\dfrac{k(x)}{x}$ が創造できるということは，$f(x)$ に対して，$k(x)=xf(x)$ も求められることになる．$y=f(x)$ 上の点の y 座標の値を直線 $x=1$ 上に移し，その傾きを考えればよい.

$y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ を通り，x 軸に平行な直線と，直線 $x=1$ の交点を A' とすると，$A'(1, f(a))$ である．このとき，直線 OA' と $x=f(a)$ との交点 $P(a, af(a))$ が，点 A が変換される点である.

これから，$f(x)=\log x$ のグラフを利用して，

$$k(x)=x\log x$$

のグラフをイメージすることが可能となるのである.



$x<1$ のとき，直線 OA' の傾きは負であり，$x\to+0$ に対して，傾きは $-\infty$ となるから，OA' との交点の x 座標は，負の値をとりながら 0 に近づいていく．すなわち，

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0$$

$x\log x=\log x^{x}$ であるから，

$$\lim_{x\to+0}x^{x}=1$$

であり，0 の 0 乗の値が求められる.

なお，0 の 0 乗は一般には次のように計算される.

$$\lim_{x\to+0}x^{x}=\lim_{x\to+0}e^{\log x^{x}}=\lim_{x\to+0}e^{x\log x}$$

ここで，$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to+0$ ならば，$t\to+\infty$ であるから，

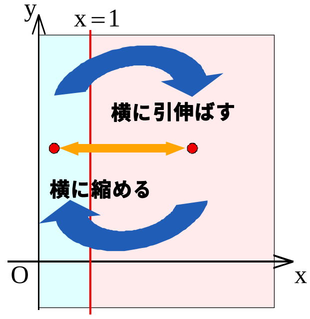
$$\lim_{x\to+0}x^{x}=\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{\log t}{t}}=e^{0}=1$$

となる.

すなわち，0 に近づく状態を無限に飛ばした極限を考えることで見やすくしたことになるが，本文では同様の変換を，勾配関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を

$$x \to \frac{1}{x}$$

といった逆数への変換をすることで試みている．



関数 $y=f(x)$ に対して，$y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を反転関数とよぶことにしよう．

$f(x)$ に対してその反転関数は，座標平面を４つの領域，

$A=\{x \mid 1<x\}$

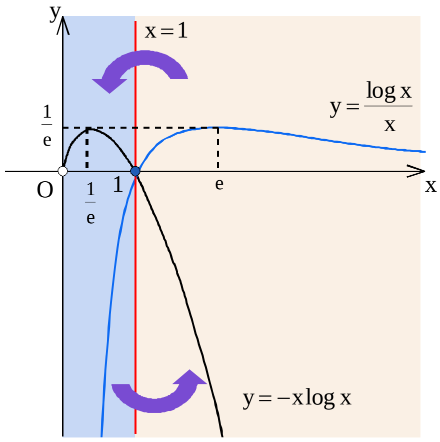
$B=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$

$C=\{x \mid -1 \leqq x<0\}$

$D=\{x \mid x<-1\}$

に分け，A と B，C と D をそれぞれ，$x=1$，$x=-1$ を反転の軸として変換し，作られる．

領域 A, B にある曲線は，それぞれ直線 $x=1$ に関して対称移動されてから，領域 A では拡大され，領域 B では縮小される．したがって，もともと領域 A にあった無限遠点を含む関数は，領域 B では視覚的に捉えることが可能な点として表現されるのである．領域 C，領域 D についても直線 $x=-1$ に関して同様に変換される．



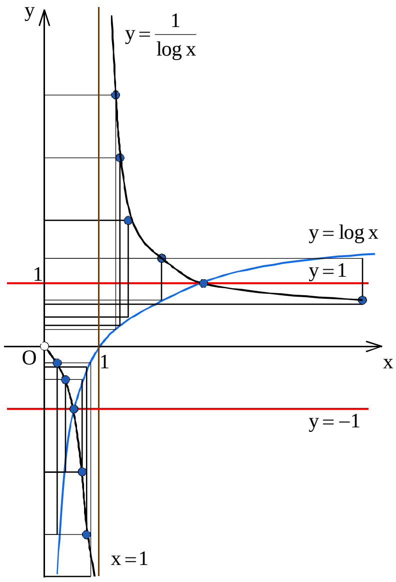
$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対してその反転関数

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-x\log x$$

を考えると，x 軸を漸近線とする $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ のイメージが，0 の近傍で表現される．

すなわち，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-x\log x)=0$ から，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x=1$ が直感的に理解できることになる．

また，反転関数は $y=\pm 1$ に関しても求めることができる．



$y=f(x)$ に対して，$\dfrac{1}{y}=f(x)$，すなわち，$y=\dfrac{1}{f(x)}$ のグラフは，平面を４つの領域

$A=\{y \mid 1<y\}$

$B=\{y \mid 0 \leqq y \leqq 1\}$

$C=\{y \mid -1 \leqq y<0\}$

$D=\{y \mid y<-1\}$

に分け，$y=\pm 1$ を反転の軸として変換すると，分数関数などのグラフのイメージ化ができるのである．

このように，$k(x)=\log x$ を出発点としてその勾配関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を考え，さらに，勾配関数の反転関数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-x\log x$ を調べることで，微分を使わなくても関数の概形を追うことが可能となるばかりか，0 の 0 乗のイメージを図ることができるのである．

ただし，0 の 0 乗の値については，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x=1$ であり，$0^0=1$ ということではない．

限りなく 0 に近い正の値 x に対して，その値の x 乗が 1 に近づくということである．

同じ 0 の 0 乗でもその近づけ方により必ずしも極限値が 1 となる訳ではない．

例えば，$f(x)=\displaystyle\lim_{a\to+0}a^x$ なる指数の極限を関数とした場合，あるいは $f(x)=\displaystyle\lim_{a\to+0}x^a$ なるべき乗の極限を関数とした場合のそれぞれの y 切片 $f(0)$ の値は 0 の 0 乗である．しかし，その値は不定となり求めることはできない(*)．

0 の 0 乗は極限としての値であり，0 への近づけ方で様々な値が得られるのである．

むしろ 0 を「空」と捉えるならば，無である 0 を 0 乗すれば，無すなわち 0 になると考えるほうが自然であろう．

かず子，アリス，よしおがまなぶに抱くイメージも，三者三様，その近づき方如何ということになる．

(*) ホームページ「数学のいずみ」内「数学玉手箱」(早苗雅史氏) ～0^0 をイメージ化する～　参照