Drone-Schema による2次関数の最大･最小の小手技

中村文則

○ドローンを操作して最大・最小をキャッチ！

<先　生> ２次関数の問題で重要なのに理解することが難しいのはグラフや定義域が変化する場合の最大・最小問題だったね.
例えば次の問題だ.

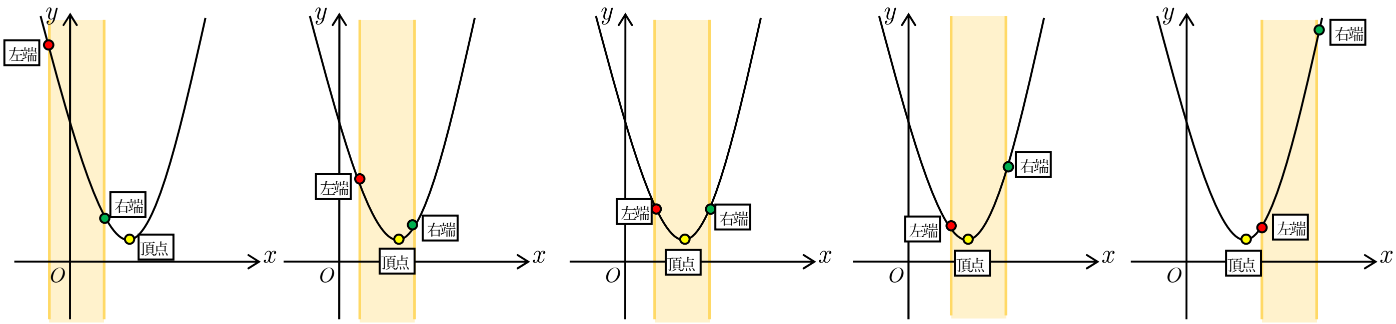
> 問題１）次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.
> $f(x)=x^2-4x+5 \qquad (a \leqq x \leqq a+2)$

<かず子> 定義域が変化する場合の最大・最小ですね.
通常は，グラフを書いてから具体的な a の値で定義域を定め，最大値・最小値がどう変化するか調べます.

<アリス> $f(x)=(x-2)^2+1$ だから，関数 $f(x)$ は下に凸の放物線で,
軸の方程式は $x=2$ ，頂点の座標は $(2,1)$

<まなぶ> あとは， a の値を少しずつ増やし変化させて最大・最小の様子をみてみる.

<よしお> 実際にグラフをかいてみると下図のようになります.



<先　生> この図から， ２次関数のグラフの最大・最小となる点は次のようになる.
定義域が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ であるとき，２次関数 $f(x)=a(x-p)^2+q$ が最大･最小となる点の x 座標は次の３つのいずれかである.

①　$x=\alpha$　　②　$x=\beta$　　③　$x=p$

曲線上の点でいうと,

①（定義域の）左端点　　②（定義域の）右端点　　③ 頂点

これはいいよね.

<まなぶ> ３点しかないのなら，それぞれの y 座標の値を求めてその大小関係を調べればいいのではないだろうか.

① 左端点の値は　$f(a)=a^2-4a+5$

② 右端点の値は　$f(a+2)=a^2+1$

③ 頂点の値は　$f(2)=1$

あとは，一生懸命計算すれば何とかなる.

<かず子> その計算する人間には自分は入っていないんでしょ．だいたいやみくもに調べれば何とかなるだろうと考えるその根性が好きになれない.

<アリス> 根性については分かりませんが，上の①，②をみると,

$f(a)=(a-2)^2+1$， $f(a+2)=a^2+1$

どちらも１以上です．③の最小値も１ですから，結局 a に関係なく最小値は１になってしまうのではないでしょうか.

<よしお> 先ほど場合分けした図で一番左側と一番右側の図をみると，頂点は定義域の中に入っていない．だから，必ずしも３つの点の y 座標を比較するということではないよ．頂点が含まれない場合は左端点と右端点だけ調べることになる.

<先　生> 最小値の場合はその通りだね．では最大値の場合も図で確認すると，左端点と右端点のどちらかになっていることが分かる．これはなぜだろう.

<かず子> 下に凸の放物線では定義域がすべての実数の場合は最小になるのは頂点です．だから，最大値が最小である頂点でとることはあり得ないということだと思います.

<先　生> そうですね．それではいよいよ解答を考えていこう．今回はドローンを飛ばして最大・最小を整理していく．

<まなぶ> えっ，ドローンですか？．忍術でドローンするってこと？

<かず子> なにバカなこといってるの．お前は忍びか．もちろんラジコンの小型航空機のことですよね．

<アリス> よくテレビや映画の撮影で使っている空撮ができる無人ヘリコプターのようなものでしょうか．

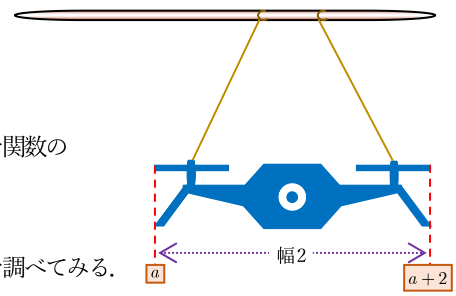
<よしお> でもドローンと最大・最小はどういう関係があるのかピンときません．

<先　生> まず，とりあえずドローンを厚紙で作ってみる(メイクる数学参照)．

<まなぶ> なんだ．本物のドローンを飛ばすのではないのか．

<かず子> 部屋の中でドローンを飛ばしたら大変でしょ．

<先　生> さて，作成した右図のドローンを見てごらん．ドローンの機体の横幅のサイズを関数の定義域としてみるとその幅はなんだろう．

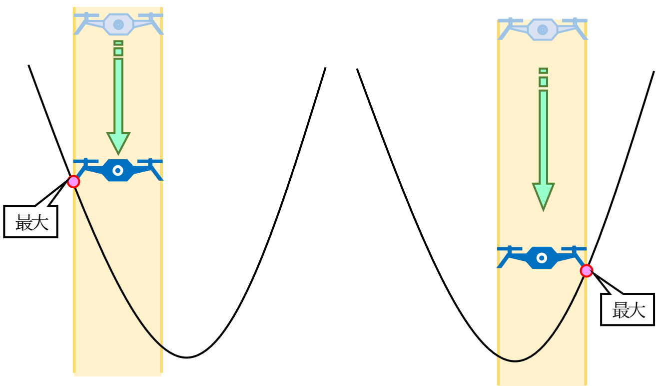


<アリス> 定義域は，$a \leqq x \leqq a+2$　ですから幅は 2 です．

<先　生> 次にこのドローンに紐をつけてヒューっと飛ばし，その動きから最大値の変化を調べてみる．ちなみにまなぶとかず子が並んで歩いているとき，上からドローンが落ちてきたら，二人のうち，ぶつかるのはどちらだろう．

<まなぶ>　唐突になにいっているんですか．どちらにもぶつかりません．二人が並んで歩くことは絶対にありえない．

<かず子> 例えばの話でしょ．なにマジになっているの．それはもちろん無駄に背が高いまなぶの頭を直撃するわ．

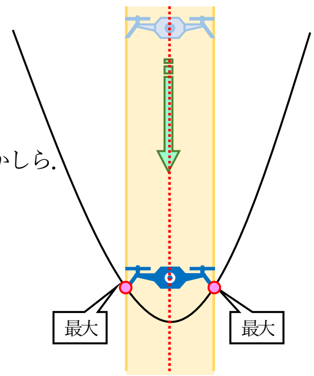


<先　生> まあ，ドローンの横幅の長さや飛んでいる位置にもよるけど，背の高い方に最初にぶつかるのは当たり前だね．これはドローンを垂直降下させたとき，最初にぶつかる点が最大点ということを表している．右図でドローンをドスーンと垂直に落とし最大値をとる点の位置を確認してごらん．

<アリス> ドローンは絶対に頂点にぶつからないので左端点と右端点のどちらかになるということがわかります．

<まなぶ> ということは，どこかで左端点と右端点がバトンタッチする場所があるということか．

<先　生> いい例えだね．そのバトンタッチ地点を調べるためにドローンを谷底状になっている下に凸の放物線にはめこむようにコトンと着陸させてみよう．どのようにドローンを操作すればいいだろう．



<かず子> ドローンの右脚と左脚が同時に放物線上に乗るようにすればいいわ．でもどう表現するばいいのかしら．

<先　生> ドローンは空撮するための機器だ．ドローンのパーツで一番大事なものはなんだろう．

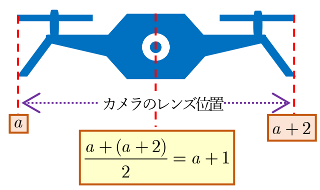
<アリス> あっ，カメラですね．ということは，カメラのレンズが頂点の真上にくるようにして垂直降下させればいい．

<先　生> その通り．カメラで頂点を追いながら垂直降下するとガチっとはまり着陸する．ではそのときのレンズの位置は定義域で考えたときはどこにあるだろうか．

<よしお> 定義域の中央です．だから，両端の位置の平均を求めればいい．

$$\frac{a+(a+2)}{2}=a+1$$

<先　生> すなわち定義域の中央の $x=a+1$ が放物線の軸上にあればいいということだ．
さてこれで準備はできた．
今度は放物線の軸上にあるドローンをギューンと垂直上昇させてみる．そして，その位置から左右方向にドローンを揺らしてみて最大点をみていこう．



<まなぶ> 左に揺らして垂直下降させたら放物線と左端点でぶつかり，右に揺らして垂直下降させたら右端点とぶつかるということか．

<先　生> 図がドローンの動きを表したものになる．最後にレンズが軸上にある状態を基準にして，a の値の範囲を調べ，最大値を求めてみよう．

<かず子> 軸の方程式は $x=2$ ですから，レンズが軸上にあるときは，

$$a+1=2 \qquad \therefore \quad a=1$$

このとき，最大値は両端の $x=a$，$x=a+2$ でとります．

<よしお> $a=0$ だから，両端は，$x=1$，$x=3$ になるよ．

<かず子> なるほどね．そうすると最大値は，

$$f(1)=f(3)=2$$

<アリス> ドローンが軸の左に動いたときの a の値の範囲は，

$$a+1<2 \quad \text{より，} \quad a<1$$

このとき，最大値は左端点でとるから，

$$f(a)=a^2-4a+5$$

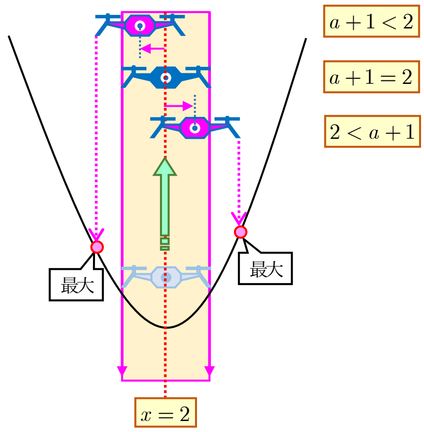
ドローンが軸の右に動いたときの a の値の範囲は，

$$2<a+1 \quad \text{より，} \quad 1<a$$

このとき，最大値は右端点でとるから，

$$f(a+2)=\{(a+2)-2\}^2+1=a^2+1$$

これでいいでしょうか．



<先　生> その通りです．それでは今度はドローンをビューンと飛ばして最小値を求めてみよう．

<まなぶ> 先生，先ほどから，

ヒュー，ドスーン，ギューン，ガチッ

といった擬音，多すぎない．なんか耳障りなんだけど．

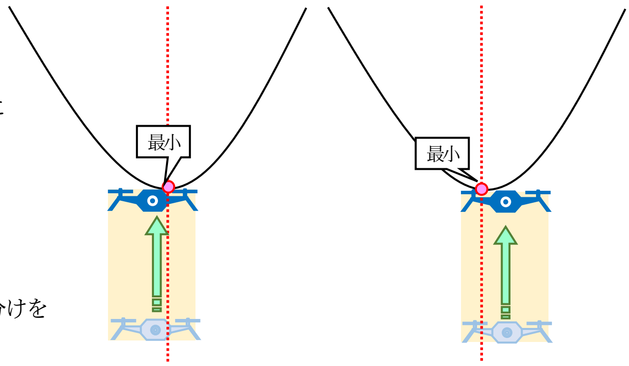
<先　生> 少しでもドローンを飛ばしたときの臨場感を味わって欲しかったんだけどね．

<まなぶ> 僕にはふざけて楽しんでいるようにか思えないのだけど．まあ，いいか．

その最小値だけど，ドローンをガーっと垂直上昇させて，ゴツンと放物線に衝突する場所を求めるということだよね．

<よしお> 下に凸の放物線は通常は頂点で最小になるから，その場合から考えた方がいいと思う．

<かず子> ドローンをフワーっと垂直に上げて頂点にコツンとタッチするのは右図の場合です．



<先　生> ではどういうときに頂点で最小になっているだろうか．

<アリス> 分かります．頂点が定義域の間にあるときだから，定義域に軸が含まれているときですね．

<よしお> 軸の方程式は，$x=2$ だから，

$$a \leqq 2 \leqq a+2 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq a \leqq 2$$

このときです．

<先　生> ここでは定義域に軸が含まれている場合を基準にして場合分けをしているけど，最大値の場合の基準との違いがわかるかな．

<まなぶ> 最大値はドンで，最小値はドーンってことでしょ．

<かず子> なにそれ．

<まなぶ> 臨場感があるように表現してみた．

最大の場合は，ドローンのカメラ部が，軸に沿ってドンと落ちた場所の前後で変わる．

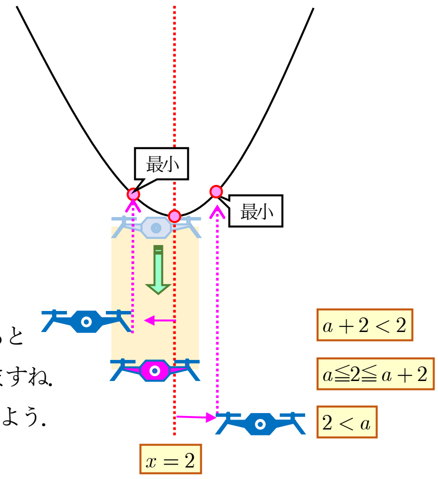
最小の場合はドローンの本体がドーンと動いて軸に被るかどうかで変わる．

<かず子> 先生よりまなぶの方が音で遊んでるじゃない．

最大の場合は点で変わり，最小の場合は範囲で変わるってことでしょ．

<アリス> なるほど．ドローンから眺めると，最大・最小の動きが見えるようになるのですね．

<よしお> 最大・最小問題にドローンが登場したときはびっくりしましたが，このような見方をするととても面白いですね．上に凸の放物線でも同じように最大・最小の動きをみることができますね．



<先　生> このようにドローンを用いて最大・最小を捉えた図を「Drone-Schema」と呼ぶことにしよう．

では，同じように次の関数の最大・最小を Drone-Schema で考えてみようか．

> 問題 2）次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．
>
> $$f(x)=x^2-2ax+a^2+1 \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

<かず子> 関数 $f(x)$ を標準形にすると，

$$f(x)=(x-a)^2+1$$

これから，関数 $f(x)$ は軸が $x=a$，頂点の座標は $(a,1)$ である下に凸の放物線です．a の値によりグラフが動くけど，定義域は固定されています．ドローンは静止しているから先ほどと同じようにできるのかしら．

<まなぶ> 先生のことだから，定義域を川かなんかに見立てて，放物線のような自動車が川に架かっている橋を横切る，そんなふうにするんでしょ．Car-Schema って名前にするのかな．

<先　生> それも面白いね．でも Drone-Shema を使い，先ほどと同じようにできるんだ．
例えば，かず子とまなぶの距離が縮まることを考えてみると，かず子がまなぶに近づく場合，かず子にまなぶが近づく場合，どちらにしても結果としては同じ状態になることは分かるだろう．

<まなぶ> 分かりません．僕とかず子の距離が縮まるなんてことは絶対にありえません．

<かず子> あんた，なんか感情入れてない．物理的な距離としてはありえるでしょ．

<先　生> 感情的にもあり得る．例えば，まなぶが何かやらかして，「まなぶ，ちょっと来なさいよ」とかず子がいったら，まなぶはかず子に近づくでしょ．

<まなぶ> あっ，それはあり得る．

<先　生> あるいは，かず子が「まなぶ，何やっているのよ」といってまなぶに詰め寄ることもあるよね．

<まなぶ> うーん，それもあり得る．

<先　生> どちらにしてもかず子とまなぶの距離は縮まったという状態には変わりはない．

<かず子> なるほどね．先生，実際にやってみていいですか．

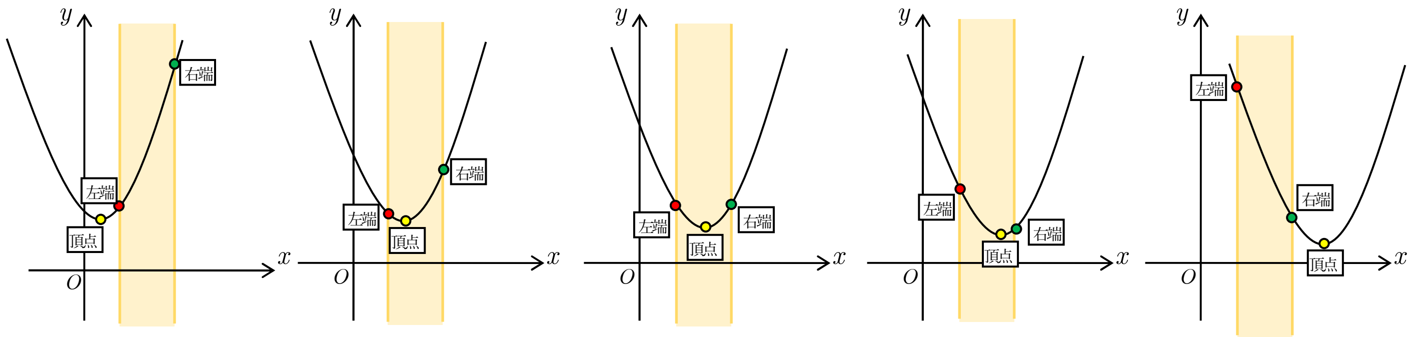
<まなぶ> それはやめておこうよ，よく分かりました．

<先　生> 結局は，関数と定義域の位置関係だけ考えるとどちらが変化しても変わりはない．橋と車の関係でいえば，橋から車をみると車は動いているけど，車の運転手が橋をみると橋の方が動いているように見える．

<アリス> 定義域の右端点をかず子の右手と，左端点を左手と考えると，まなぶとかず子のどちらが相手に近づいても，右手でまなぶの頬を平手打ちするという結果は同じということですね．

<まなぶ> アリス，その例えはリアルすぎるよ．

<先　生> 問題 1 で定義域が変化する場合では，放物線と定義域の位置関係は 5 つのパターンで示したよね．
放物線が動く場合についても，放物線が定義域の左から右方向に移動すると，5 つのパターンで書ける．



このパターンを左から順にみたものは，問題 1 のパターンを右から順に見たパターンと一致していることがわかる．

<よしお> 座標軸を考えなければ本当に同じですね．先生，ちょっと思ったんですけど，放物線が動くこの問題を定義域が動く関係に変換はできないのでしょうか．

<先　生> 面白いことに気づいたね．調べてみようか．
問題 2 の関数 $f(x)=(x-a)^2+1$ において，

$t=-x+a+2$

とする．$x=-t+a+2$ より変換された関数を $g(t)$ とすると，

$g(t)=f(-t+a+2)=(-t+2)^2+1=t^2-4t+5$

$\therefore\quad g(x)=x^2-4x+5$

また，$y=f(x)$ の定義域は，$0\leqq x\leqq 2$ であるから，$t=-x+a+2$ より，$a\leqq t\leqq a+2$

よって，$y=g(x)$ の定義域は，$a\leqq x\leqq a+2$

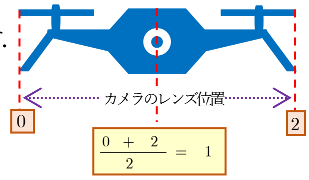
以上より，次のように変換できた．

$y=x^2-4x+5\quad(a\leqq x\leqq a+2)$

<かず子> 本当に定義域が変化する関数に変換できるのですね．

<まなぶ.> あれっ，この関数は，問題 1 の関数と同じになっている．先生，最初から，よしおの質問は想定済みで問題 2 を作ったでしょ．そういう，あざといところ，好きになれないな．

<先　生> まあ，それはおいといて解法を考えよう．もうわかっていると思うけど，問題 1 と同じように最大値はドンで，最小値はドーンで場合分けをすればいい．今度は，最大・最小をまとめて Drone-Schema を描いてみよう．

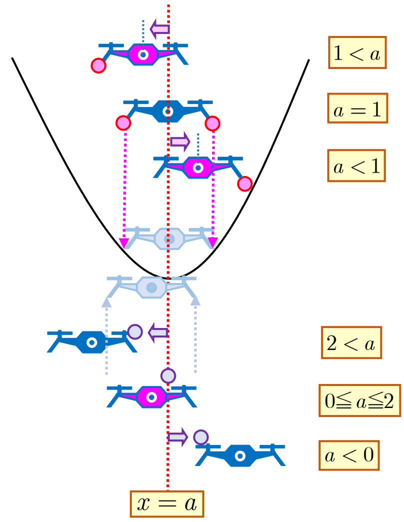


<アリス> まず最大値です．最大値はドンとなればいいので，定義域の真ん中のカメラ部に軸があるときです．定義域の左端は 0，右端は 2 なので真ん中は $x=1$．軸の $x=a$ がこのカメラ部の右と左に揺れたときに最大値が変化します．

<よしお> 最小値は頂点で最小となる場合をまず考えます．定義域の中に軸 $x=a$ があればいいから，ドーンとみると $0 \leqq a \leqq 2$ です．あとはこれを基準にして定義域から軸が外れた場合を考えます．

<かず子> 以上のことから，Drone-Schema を描くと…，できました．右図のようになります．

<まなぶ> 最後は僕がまとめよう．



$f(x)=x^2-2ax+a^2+1$ とする．

$f(0)=a^2+1$，$f(2)=a^2-4a+5$

まず，最大値を求める．

$a<1$ のとき，$x=2$ で最大値 a^2-4a+5

$a=1$ のとき，$x=0$，$x=2$ で最大値 2

$a>1$ のとき，$x=0$ で最大値 a^2+1

次に，最小値を求める．

$a<0$ のとき，$x=0$ で最小値 a^2+1

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき，$x=a$ で最小値 $-a^2+1$

$2<a$ のとき，$x=2$ で最小値 a^2-4a+5

どうだい，完璧だ．

<かず子> なに一人で悦に入っているのよ．
だいたい，先生，最近ちょっと「まなる」過ぎるよ．

<先　生> 「まなる」ってどういうことかな．

<かず子> まなぶのどうでもいい考え方をまねることです．

<先　生> なるほど．

<まなぶ> 先生，感心しないでよ．それに「どうでもいい」は余計だろ．

<アリス> 確かにまなぶさんのセンスはときどき引いてしまうことはあります．でも今回のドンとドーンはとても印象に残りました．
かず子との距離関係とそれで起こる得る状況をイメージすると，すごく分かりやすいと思うんです．

<まなぶ> アリスは僕のセンスのよさにいつもインスパイアされていたわけではなかったの，ショック．
それと，起こる得る状況ってことも気になるのだけどそれはなんだろうか．

<アリス> あっ，それはですね．定義域をかず子，下に凸の放物線をまなぶさんにするとですね，放物線の最大値は，怒ったかず子が両手でまなぶさんをおさえ，定義域の真ん中にある頭でドンと頭突きをします．
次に，最小値は定義域の両端であるかず子の右手と左手のどちらかでまなぶさんの顔をドーンひっぱたく．なんかそういう状況が頭に浮かんで離れないのです．でも引っぱたく場合はどちらかというとドーンよりはパーンという音なんですけど．

<まなぶ> …そんなことを思い浮かべていたなんて，アリスたん．どうしちゃったの．

<かず子> まあ，確かに下に凸の放物線は，まなぶが両手を挙げてヘラヘラしている姿を想像してしまう．
音の響き方なんだけど，パーンと鳴るかどうかはここで実演してみたらいい．
それで，アリスが最大・最小のイメージを理解できるならやるべきだと思う．どうでしょう，先生．

<先　生> うーん，かず子なら，引っぱたくというよりグーパンチのドーンかな．でもそれは仲間内の理解の共有方法として講義が終ってからじっくり相談してみてくれるかな．

<まなぶ> 先生，ひとつの解決案みたいにまとめないでよ．なんかドンと胸を小突かれ，ドーンと気持ちが落ち込んだ感じだ．
でも，かず子でなくアリスがパーンとか，ピシっとかしてくれるんならちょっと嬉しいような気もする．

<かず子> おまえという奴は…．

あとがき

今回は次の３つのシリーズをコラボしてみました.

① ちょっとした小手技

② Mathtemplate

③ メイクる数学

「小手技」は数学のちょっとした話題を会話形式で解説したものです. 当初はA4用紙で2〜3ページほどにまとめ, いつでもどこでも簡単に読めるようにということで始めました. たぶんもう 100 篇近くあると思います. HP に掲載していない小手技もあり, 執筆者にも把握はできなくなりました. ここ数年は, 「こてわざ」は「こったわざ」になってしまうことが多く, 「ちょっとした小手技」は「小手技」と呼ぶようにしています.

「Mathtemplate」は, 数学を絵で描いてみたいという想いから生まれました. A4 用紙を一枚のキャンバスにみたて, 気ままに数学のイメージを色を添えながら塗り描いています. 実は絵心のない私にとって, これは結構大変な作業なのです. 1枚を仕上げるのにデッサン, 下書きというように描いていくと, 小手技の執筆以上に時間が掛かってしまいます. こちらは現在42枚描き上げています. 100枚を目指しているのですが, 年齢とともにイメージが枯渇してきているようで絵が型にはまってきています.

「メイクる数学」は「5分の教材は5分で作ろう」というコンセプトで始めた手作り教材のレシピ集です. 放物線を人間の体を用いて表現する「ボディパラ」はここから生まれました. でも近年はIT教材が充実してきたことで次第にメイクる機会は少なくなってしまいました. 手作り教材はパソコンのアプリで簡単に３Dアニメとして作成でき, アニメーション機能でシミュレーションすることもできます. でもそういう時代だからこそ, 手作りの手触りを実感できる教具(興具)は, 生徒には新鮮に映るのかも知れません.

今回はこの３つのシリーズを合わせ, 小手技をメインに据えて「放物線の最大・最小問題」にアプローチしてみました.

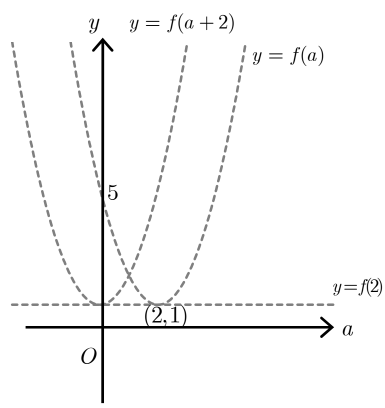
実は, このテーマは小手技の初期の頃に一度取り上げたのですが大幅にリニューアルしました. 流行りのドローンを操作し, アップダウンを体感できるよう擬音を多用しています. 文中, まなぶに「ふざけてるの」と軽蔑の眼を向けられます. でも視覚・触覚だけでなく聴覚にも訴えて脳を刺激し理解することは大事だと考えています.

小手技のタイトルは「Drone-Schema による２次関数の最大・最小」ですが, Schema(シェーマ, スキーマ)は, 図式や形式, 計画のことです. 例えば医療では医者がカルテを記すとき人体の部位に絵や図を描くことで, 視覚的に情報を記録することができます, カルテはドイツ語や専門語などで記入しますが, Schema の絵や図は患者がなんとなく診断の内容を理解できてしまいます. そのようなこともあり電子カルテになってからはシェーマを書く医師は減ったそうです.

Schema は大まかな概念を表すものですが, 具体的に示されたものは Scheme(スキーム)といいます. スキームはビジネス用語では計画をもった枠組みという意味で, 枠組みを伴う体系的・継続的な行動をするときの具体的な計画になります. 抽象的な計画である Schema は plan を図や絵で表現したものであり, 数学の理解では結論を示した Scheme 図より結論に導く思考過程を大雑把に図にした Schema 図の方がいいのではないでしょうか.

今回の小手技では紙でドローンを作成する場面がありますがこれは「メイクる数学」に依るものです. 紙で作ったドローンが擬音を添えて飛ばせばアホなこと先生はやってるなと思いながらも生徒は楽しんでくれると思います. 講義の終盤には本時のまとめとして, Mathtemplate「放物線の最大・最小シェーマ〜ドローンを操り最大・最小をキャッチ」を４人の生徒に配布しています. 最大・最小の Schema を示し解法のイメージを定着させるのです.

ところで, 本文の問題 1 ではまなぶは「最大・最小は定義域の左端点, 右端点, 頂点のいずれかでとる」ことより, 3 つの式の大小関係を調べると機械的に求められるといっています. 軸が区間に含まれない場合があるので仲間から否定されてしまいますが, その考え方は間違いではありません.



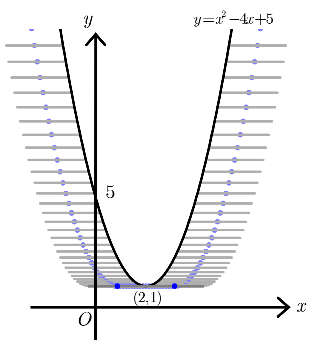
$f(x)=x^2-4x+5$ ($a \leqq x \leqq a+2$)では, $f(a)$, $f(a+2)$, $f(2)$ の値を, 横軸を a 軸としてグラフを描きます. 最大値は頂点でとることはないので, $f(a)$ と $f(a+2)$ の値の大きい方を選んでいくと, 最大値を表す a の関数が得られます. また最小値については, 頂点で最小となる場合, すなわち軸 $x=2$ が定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ に含まれるので, $a \leqq 2 \leqq a+2$, よって, $0 \leqq a \leqq 2$ の場合に $y=f(2)=1$ を選択します. それ以外の範囲は $f(a)$ と $f(a+1)$ の値の小さいほうを選ぶと最小値を表す a の関数が得られます. このように視覚に訴えるのもひとつの方法でしょう.

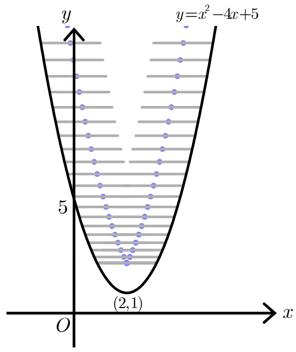
なお, 定義域が $a \leqq x \leqq a+2$ の場合は, 左端点の動きを追うことで最大・最小の軌跡が得られます.

最大値は, ドローンを垂直効果したときの接触点ですから, ドローンを放物線の内側をなぞるように動かし, 左端点の軌跡をみればいいのです. 最小値はドローンを垂直上昇したときの接触点より, ドローンを放物線の外側をなぞるように動かしたときの左端点

の軌跡になります．Mathtemplate ではその変化の様子を描いています．

同様に定義域が $a-1 \leqq x \leqq a+1$ の場合は，区間の中央にあるドローンのカメラ部の動きを追えばいいのです．図は，Grapes(友田勝彦氏作成のフリーソフト)を用いてアニメーションで表したものです．でもやっぱりドローンを飛ばした方がずっと楽しくていいと思いませんか．





ところで，最大値と最小値を(答)として表すには 2 通りの形式があります．

最大値と最小値のそれぞれを a の値で場合分け

最大値と最小値を合わせて a の値で場合分け

関数の値の変化を見ながら理解するということでは後者の方が望ましいと考えます．

さらにこれを表にしてまとめると見やすくなります．

$f(x)=x^2-4x+5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最大・最小を求めてみましょう．

$f(x)=(x-2)^2+1$ より， $f(2)=1$

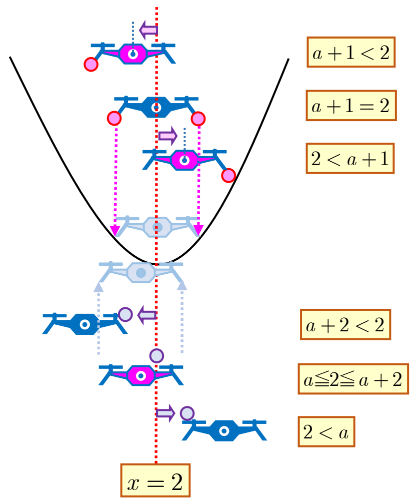
定義域(区間)の幅は $d=(a+2)-a=2$

定義域の中央は， $x=\dfrac{a+(a+2)}{2}=a+1$

左端点て右端点の y 座標を求めます．

$f(a)=a^2-4a+5$， $f(a+1)=a^2+1$

Schema 図を描き，最大値・最小値を求めて次のように表にします．



<table>
<tr><td>a の範囲</td><td colspan="4">……… 0 …… 1 …… 2 …………</td></tr>
<tr><td>最大値</td><td colspan="2">a^2-4a+5</td><td colspan="2">a^2+1</td></tr>
<tr><td>最小値</td><td>a^2+1</td><td colspan="2">1</td><td>a^2-4a+5</td></tr>
</table>

この表は Schema 図のドローンの動きを抜き出したものです. 1 つの a の値に対して最大値と最小値は同じになることはないので，このように表にしてダブる値がないことを確認しながらまとめるとすっきり整理できます．最大・最小になるときの x の値は必要に応じて記入します． $f(a)=a^2-4a+5$ のようにしてもよいでしょう．グラフの増減表みたいなもので整理の方法として提示しておくといいかもしれません．

最大値・最小値を a の関数とみたときのグラフもこの表からは簡単に描くことができます．また，表から最大値の変化点の a の値は，最小値の変化点である 2 つの a の値の平均になっていることが分かります．定義域が一定の幅の場合はそうであることに気がついてくれればいいのですが．

では，もう少し複雑な最大・最小問題を Drone-Schema で解いて表にしてみましょう．

なお，定義域はドローンではなく区間として表示しました．最大・最小のイメージを掴むことができたらもうドローンを飛ばす必要はないわけであとはイメージを飛ばせばいいのです．

○ 定義域の右端が変化する場合

$\boxed{f(x)=-x^2+4x \ (0 \leqq x \leqq a) \quad (a>0)}$

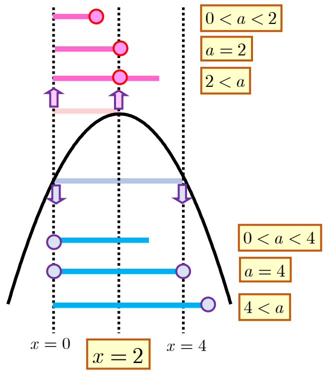
$f(x)=-(x-2)^2+4$ 　より，

$y=f(x)$ のグラフは軸 $x=2$，頂点 $(2,4)$ の上に凸の放物線

定義域(区間)の幅は $d=a$，定義域の中央の値は $x=\dfrac{a}{2}$

定義域の両端点の y 座標は， $f(0)=0$， $f(a)=-a^2+4a$

右の Drone-Schema が得られます．



<table>
<tr><td>a の範囲</td><td colspan="3">0 ……… 2 ……… 4 ……………</td></tr>
<tr><td>最大値</td><td>$-a^2+4a$</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>最小値</td><td colspan="2">0</td><td>$-a^2+4a$</td></tr>
</table>

○ グラフが固定軸上を動き定義域が変化する場合

$\boxed{f(x) = x^2 - 6x + a \quad (a \leqq x \leqq a + 2)}$

$f(x) = (x-3)^2 + a - 9$ より，

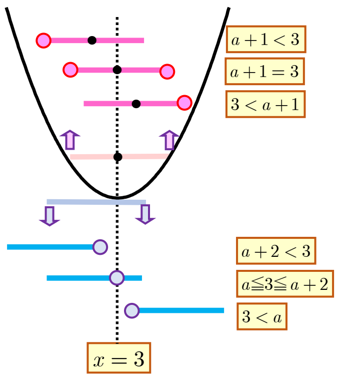
$y = f(x)$ のグラフは軸 $x = 3$，頂点 $(3, a-9)$ の下に凸の放物線

したがって頂点は軸上を動きます．

定義域の幅は $d = 2$，定義域の中央の値は $x = \dfrac{a + (a+2)}{2} = a + 1$

$f(a) = a^2 - 5a$，$f(a+2) = a^2 - a - 8$

以上より Schema 図を描くと最大・最小は次のようになります．



a の範囲	………… 1 …… 2 …… 3 …………		
最大値	$a^2 - 5a$		$a^2 - a - 8$
最小値	$a^2 - a - 8$	$a - 9$	$a^2 - 5a$

○ グラフと定義域が変化する場合

$\boxed{f(x) = x^2 + 2ax \ (a + 1 \leqq x \leqq a + 2)}$

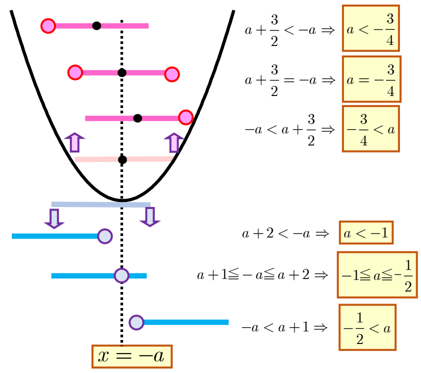
$f(x) = (x+a)^2 - a^2$ より，

$y = f(x)$ のグラフは，軸 $x = -a$ で頂点 $(-a, -a^2)$ である下に凸の放物線

定義域の幅は $d = 1$，定義域の中央の値は $x = \dfrac{(a+1)+(a+2)}{2} = a + \dfrac{3}{2}$

$f(a+1) = 3a^2 + 4a + 1$，$f(a+2) = 3a^2 + 8a + 4$

以上より Schema 図を描くと最大・最小は次のようになります．



a の範囲	………… -1 …… $-\dfrac{3}{4}$ …… $-\dfrac{1}{2}$ …………		
最大値	$3a^2 + 4a + 1$		$3a^2 + 8a + 4$
最小値	$3a^2 + 8a + 4$	$-a^2$	$3a^2 + 4a + 1$

○定義域および定義域の幅が変化する場合

$\boxed{f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad (a \leqq x \leqq 2a) \quad (\text{ただし，} a > 0)}$

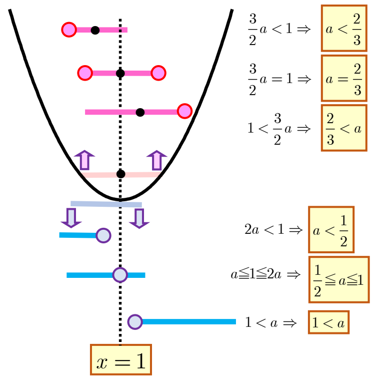
$f(x) = (x-1)^2 + 2$ より

$y = f(x)$ のグラフは軸 $x = 1$，頂点 $(1, 2)$ の下に凸の放物線

定義域の幅は $d = a$，定義域の中央の値は $x = \dfrac{a + 2a}{2} = \dfrac{3a}{2}$

$f(a) = a^2 - 2a + 3$，$f(2a) = 4a^2 - 4a + 3$

以上より Schema 図を描くと最大・最小は次のようになります．



a の範囲	………… $\dfrac{1}{2}$ …… $\dfrac{2}{3}$ …… 1 …………		
最大値	$a^2 - 2a + 3$		$4a^2 - 4a + 3$
最小値	$4a^2 - 4a + 3$	2	$a^2 - 2a + 3$

表から隣り合う最大値・最小値の値を等しくすると，a の値が求められます(当たり前ですが).

$$a^2 - 2a + 3 = 4a^2 - 4a + 3 \text{ から } a = \frac{2}{3}, \quad 4a^2 - 4a + 3 = 2 \text{ から } a = \frac{1}{2}$$

こう考えて a の値の範囲を調べてみるのも面白いでしょう．

なお, 定義域の幅が変化する場合はもう Drone で表すことはできません. でも同様の考察でブラッシュアップできることが Scheme ではなく Schema の方が適しているということなのです.