辞書式配列のちょっとした小手技

札幌旭丘高校　中村文則

Order その復元と分解

<先　生>場合の数で大切なことは「重複なく数え上げる」ということだったね．効率的に数えるために，樹形図や辞書式配列という書き下し方法があるわけだ．その典型的なものが次の問題だね．

> ex) SOLVER の６文字をすべて使ってできる順列を，辞書式に並べるとき，
> (1) SOLVER は何番目の文字列か．
> (2) 163 番目の文字列を求めよ．

<まなぶ> 俺，これ，大っ嫌いだ!.

<かず子>どうしてよ．

<まなぶ>だって，数学って論理的な匂いがするのが楽しいのに，SOLVER，解答者ってことですか，それが何番目かなんて安っぽく思いっきり世俗に媚びちゃってるじゃない．その癖，次の問題の 163 番目はたぶん全然意味のない単語になっていたりする．

<かず子>ただの言い掛かりね．でも，私も別の意味であまり好きじゃないわ．A,B,C,D の並びぐらいなら辞書式の配列順が分かりやすいけれど，こういった単語の問題になると，アルファベットの順番を考えると混乱してくるのよね．

<よしお>同感．実際，アルファベット順に並べてみると，えーっと，

E, L, O, R, S, V

ですね．あとはこの文字の並び順に辞書式に配置すればいいのだけれど，

ELORSV,　ELORVS,　ELOSRV,　ELOSVR, ELOVRS,……

確かに並べにくいよね．

<まなぶ>俺たち日本人だから，英語はどうもね．どうして，「か,い,と,う,し,や」を辞書式に並べると何番目かといった日本語の形で問題を出題しないんだろうね．

<先　生>まなぶのいってることも，もっともな点はあるな．その解決策として，アルファベットを数字に対応させるという方法もある．

E ⇒ 1　L ⇒ 2　O ⇒ 3　R ⇒ 4　S ⇒ 5　V ⇒ 6

とみるんだ．そうすると目的の単語は

SOLVER　⇒ 532614

となるから，あとは数字の配列を考えればいい．これだと数字の大小関係は簡単に判断できるだろ．

<まなぶ>うーん，でも何か味気ないな．今度は思いっきり数学に傾倒してるし．それに，この方法だと一度数字に読み替えて，最後にそれをまたアルファベットに戻さないといけないし．

<かず子>先ほどは俗っぽいっていってたのに．まなぶの性格って，どこまでもジコチューね．

<よしお>僕は数字に置き換えることはいいことだと思うけど，またそれを戻すってことはまなぶと同じようにちょっと抵抗があるな．

<先　生>よしおがいうなら確かにそうかもしれないね．

<まなぶ>先生，それ俺の意見だよ．

<先　生>まあ，まあ．それじゃ，今回はまなぶの意見を尊重して，俗っぽい問題に少し論理的思考の味付けをしてみようか．そのためには，まずこの問題の一般的な解法をおさらいしておこう．基本は単語を文字のインデックスで分けるということだったね．次の問題で確認しよう．

> ex) A,B,C,D,E,F の６文字をすべて使ってできる順列を，辞書式に並べるとき，
> (1) DBECFA は何番目の文字列か．
> (2) 555 番目の文字列を求めよ．

<よしお>まず，先頭の文字をみて，６文字 A,B,C,D,E,F の項目で分けていくってことですよね．

<先　生>そうだね．有意単語になるわけではないけど取り合えず６つの文字で作られる辞書を考えると，その辞書の単語数はどれだけになる．

<まなぶ>有意単語どころかこの場合はすべて無為単語だと思うけど．その単語数は $6! = 720$ 個です．

<先　生>720 個の単語数のある辞書を A,B,C,D,E,F の項目別に分け，６冊に分冊するとしよう．いってみれば百科事典のようにシリーズ物になって６冊で順次刊行されるってことだ．そうすると各本の単語数はいくつだろう．

<かず子>６で割って，120 冊です．

<先　生>例えば先頭が A である本の中身は文字 A は先頭以外にはないから残りの５文字 B,C,D,E,F で単語が作られている．だから，その単語数は $5!$ となる．でも，かず子が計算したように，無為・有意関係なく文字を綴っているわけだ

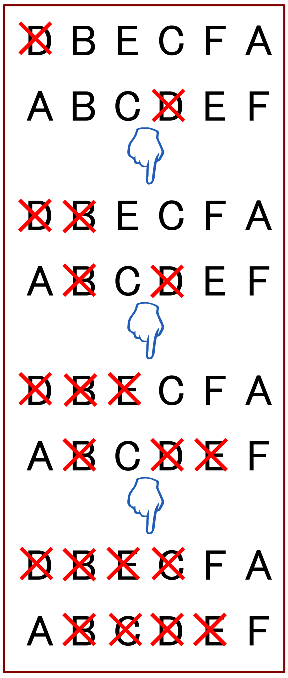
から，均等に単語数は分けられるから，６で割るって考え方は大事だね．では，次にＡ巻(先頭がＡの辞書)をさらに分冊していくと，いくつに分ければいいだろう．
<よしお>Aの次にくる文字はB,C,D,E,Fの５文字だから，単語数120を５で割って，24個です．その次は……..
<まなぶ>わーっ，もういいじゃない．頭が混乱してくる．
<先　生>それほど面倒なことではないだろう．文字数がｎの場合は，n!個ある単語数を先頭のｎ文字で分類し$(n-1)!$!冊に分ける．同じように，

$$n!,\ (n-1)!,\ (n-2)!,\ (n-3)!,\ \cdots\cdots$$

と分冊にしていけばいいだけだ．
<まなぶ>それは分かるんですけど，実際に問題を解くときは，分冊ではなく一冊の本とみて，考えちゃいますよね．
ABCDEF,　ABCDFE,　ABCEDF,　ABCEFD,　ABCFDE,　ABCFED,　ABDCEF,　……
だんだん訳が分からなくなってくる．
<先　生>きちんと書き抜けるってことも大事なんだぞ．まあ，とにかく⑴をかず子，解いてごらん．
<かず子>はい，まず先頭はＤだから，既に，先頭がA,B,Cのものについては分冊ができているわけだから，
A○○○○○，　B○○○○○，　C○○○○○
の３冊の○に入る文字はそれぞれ5!個あるから，$3\times5!=360$．
だから先頭がＤの最初の単語，すなわちDABCEFは361番目になります．次に，求める単語の２番目の文字はＢだから，DA○○○○の項目はその前にあることになり，その辞書数は，$4!=24$．これで$360+24=384$．今度は求める単語の３つ目の文字がＥだから，DBA○○○,DBC○○○を数えます．これが$2\times3!=12$．これまでの総数は$384+12=396$個．えーと，そして次の文字がＦで，…….
<まなぶ>ほら，だんだんと分冊を作っていくのが面倒になってくるだろ．大体，DBE○○○まで数えたら，○○○の並びの個数は3!個より，その個数は多くて６個しかないんだから実際に数えた方が早いだろ．
ACF,　AFC,　CAF,　CFA
で４番目．結局，396+4=400番目ですよね．まだこれが６つの文字で作られる単語だからいいけど７，８個と数が増えていったら面倒でやってられないでしょ．
<先　生>ごもっとも．でもまなぶの悪いところは最後の○○○の部分を書き抜いてしまったこと．これを面倒とみるのではなく，それまでと同じ流れと捉えることで，この問題の解法はオートメーション化することが可能となるんだ．
<まなぶ>本当ですか?.
<先　生>疑り深いやつだな．
まず，分冊のルールをもう一度まとめてみよう．

① $k!$の辞書を分冊するには，kで割る．
② $k!$の辞書の単語はk個の文字で綴られる．

<かず子>何かすごく当たり前のことですよね．
<先　生>①は，等しい単語数の辞書に分冊されることから分かる．②はもちろん当たり前だけど，すでに使われている文字，すなわち分冊したときの表題が，AB○○○○の本の場合はABが使えないということを押えよう．
<よしお>１度使った文字は使えなくなってしまうということが，まなぶのいう抜き出しが煩雑になる理由ですよね．
<先　生>そう，そしてそのことを逆に理由してやるんだ．



まずアルファベットを若い順に並べたものと，目的の単語を縦に並べて書く．次に先頭の文字であるＤに×をつける．アルファベット順に並べたものをみると×のついたＤの左に，A,B,Cがあるね．これはA,B,Cの分冊が既にできているってことだ．そしてその単語数は×のついていない文字数５に対してその階乗(5!)個，作られている．次に，２つめの文字Ｂに×をつけよう．するとその左には文字Ａがあり，その個数は4!できる．次はＥ，×のついていない左の文字は，ＡとＣでそれぞれ3!個できる．次はＣに×をつけるとその左の文字はＡで2!個できる．
<かず子>先生のいってることは何か複雑そうだけど，×をチェックしてみると簡単にできますね．さらに，同じように続けるんですね．
<先　生>いや，その必要はない．ここから先はまなぶ流で十分．残ったものは２文字しかないのだから，その個数１か２のいずれかだろ．求める文字の並びはFAで，下の段の文字はAFが残っているから２つめであるのは明らか．以上より，それまででてきた個数の和を求めると，

$$3\times5!+1\times4!+2\times3!+1\times2!+2=400$$

<まなぶ>へーっ，何にも頭を悩まさないでできちゃいましたね．
ペケペケペケッて付けていくだけでいいなんて．先生，ということはですよ，⑵の問題は今のオートメーションを逆にすればできるってことでは．
<先　生>そうなるね．ただし，$k!$を分冊するとき，その冊数mの最小，最大が何であるかに注意しないといけない．
<かず子>最小はもちろん0，最大については，$k!$はもともと$(k+1)!$を$(k+1)$個に分冊した

のだから，$k+1$.

<よしお>かず子，$k+1$個あったら，$(k+1)k!=(k+1)!$だから，ひとつにまとめられてしまうよ．だから$0\leqq m\leqq k$だと思うな．

<先　生>正解．では(2)の555番目を(1)の逆手順で求めてみようか．まず，555番目までにがどんな分冊が作られているのか調べてみよう．

$555=4\times5!+75$

75については．

$75=3\times4!+3$

次に3については，3!で割ることはできないから，

$3=0\times3!+3$

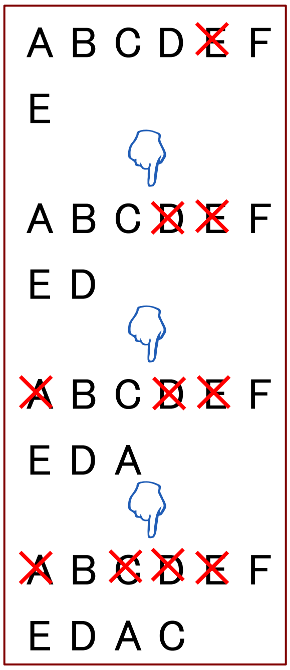
そして，さらに

$3=1\times2!+1$

以上より，

$555=4\times5!+3\times4!+0\times3!+1\times2!+1$

さあ，後は，555番目がどの分冊のどのページにあるのかしらべ，その単語を読み取っていく．



<まなぶ>先生，面白そうだから，僕にやらせてください．

まず$4\times5!$は，A,B,C,Dの分冊が既にできてるってことですよね．

ということは先頭の文字はEだから，これに×をつける．こういう要領でしょ．

<先　生>どうしてこういった簡便法のマニュアルはすぐに思いつくんだろうね．

<まなぶ>じゃあ，正しいということで続けます．

次は$3\times4!$だから，A,B,Cの右隣のDがきます．さらに$0\times3!$は?……，そうか何も分冊が作られないからAですね．

$1\times2!$は，×は使われている文字のことだから飛ばしてBの隣のC，これでEDAC○○まで復元完了．最後に1を加えるから，×のついていない文字をみてBF．

これで完全に復元完了．

EADABF　が求める文字です．

<かず子>いつもながらこういうことに関しては……．

<先　生>「復元」という表現は面白いね．実際には番号を文字列に置換しているのだけど，そのために，番号を階乗で割って，分解してからまた作り直している．この過程は確かに復元といえるかもしれないね．対して，文字列を番号に替えることは分解といってもいいかもしれない．

要領が分かったね．さあ，それではもともとの問題SOLVERを解いてみようか．もう簡単にできるだろ．

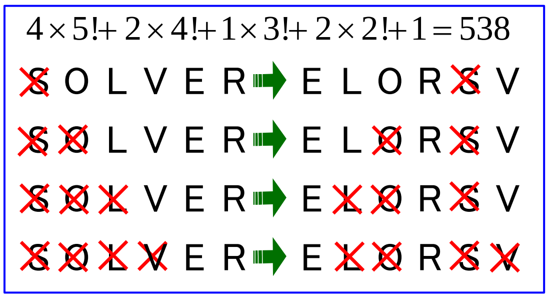
<かず子>(1)を解きます．　まずアルファベット順に並べて，

E,L,O,R,S,V. あとはSOLVERに対応させて×をつけ，×の前にある文字の個数に対して分冊をつくっていくんですね．

そうすると，次のように分冊が作られます．

$4\times5!+2\times4!+1\times3!+2\times2!+1$

これを計算して538番目になります．



<先　生>次の(2)はまなぶ，やるかい．

<まなぶ>僕はさっきやったからパス．

<よしお>では(2)は僕がやります．163を階乗で割ると，

$163=1\times5!+43$

$=1\times5!+1\times4!+19$

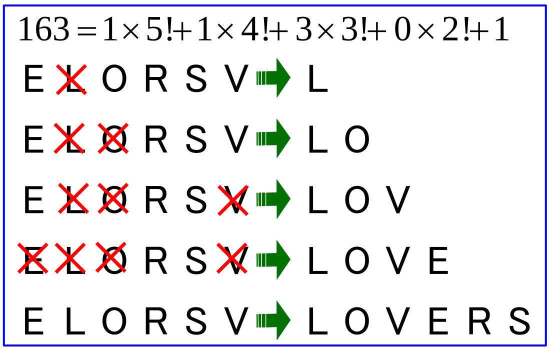
$=1\times5!+1\times4!+3\times3!+1$

$=1\times5!+1\times4!+3\times3!+0\times2!+1$

あとは，E,L,O,R,S,Vの並びからこれを復元すると，

L…O…V…E…R…S

LOVERS，恋人たちってことですか?



<まなぶ>へーっ，恋人たちか，有意単語なんだ．

先生，変なところで洒落てますね．

<先　生>　問題を解決しようとする積極的な気持ちのあるもの(SOLVER)が最後には評価されるものだ．やがてその気持ちが通じ合い，信頼と愛情が生まれる(LOVERS)のではないだろうか．だからこの(2)は是非まなぶに解いて欲しかったのだけどね．

<まなぶ>先生，何変なことといってるんですか．だいたい僕にはそんなもの必要ないですよ．

<かず子>………

あとがき

今回の小手技は，異なる$(n+1)$個の文字列の辞書式配列では，任意の文字列の番号が，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k k!+1 \quad (0 \leqq a_k \leqq k, k \in Z) \qquad \cdots\cdots(*)$$

で表されることを利用したものです．(*)において，$a_k=k$とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k k!+1=\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!+1=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)!-k!\}+1=(n+1)!$$

となり，順列の総数が得られます．ただし．$k=1$の場合については，明白なことですから分解する必要もなく，

$$\sum_{k=2}^{n} a_k k!+p \quad (0 \leqq a_k \leqq k, k \in Z,\ p=1,2) \qquad \cdots\cdots(**)$$

とし，pの値については，その配列を見て判断した方がラクなので，本文はこの形をとっています．

この分解において，$p=1,2$であり，$p=0$とはならないことは配列上ではある意味をもっています．

$0 \leqq a_k \leqq k$であるように$a_k k!$で分解するためには必ずしも(**)である必要はありません．例えば，

$$40=1\times 4!+2\times 3!+1\times 2!+2 \qquad \cdots\cdots ①$$

ですが，

$$40=1\times 4!+2\times 3!+2\times 2! \qquad \cdots\cdots ②$$

と分解することも可能です．②は$p=0$となりますが，この２式は，「読んでいるページを途中で止めて閉じる」か，「読んだところまでのページを開く」かの違いを意味します．

A,B,C,D,E の５文字の辞書式配列でその 40 番目を求めると，①からは，右図のように，BDCEA が得られます．分解して最後の項で止まったわけです．しかし，②は$2\times 2!$で分解が終わってしまうため，次の文字列が作られないことになります．

したがって右図の２段目において，×のついてない文字の２つめの C で終わることになり，先頭 C で始まる最後の単語 CEA が求めるものとなります．だから，この場合はその分冊の最後のページが何か調べることになります．このどちらの方法で調べるかのスイッチが$p=1,2$か，$p=0$であるわけです．オートメーションを統一するために，本文では$p=1,2$としているわけです．

A ~~B~~ C D E ➡ B
A ~~B~~ C ~~D~~ E ➡ B D
A ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E ➡ B D C
~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ ~~E~~ ➡ B D C E A

さて，ところでこのオートメーション化は辞書式配列の他の問題にも適用できます．

> ex) 1,2,3,4,5 の５つの数字をすべて使ってできる５桁の整数で次のものを求めよ．
> (1) 52 番の数は何か．
> (2) 34430 より小さい数はいくつあるか．
> (3) 34340 より大きい数はいくつあるか．

解)

(1) 52 を階乗で分解すると，

$$52=2\times 4!+0\times 3!+1\times 2!+2$$

である．

よって，12345 から階乗の係数を対応させて，

整数を右図のように復元する．

52 番目の整数は 31452

1 2 ~~3~~ 4 5 ➡ 3
~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 ➡ 3 1
~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ 5 ➡ 3 1 4
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ➡ 3 1 4 5 2

(2) 34430 より小さい最大の整数は，34251 より，この整数が何番目にあるかを求めればよい．

$$34251 \Rightarrow 12345$$

を対応させて，階乗表現すると，

$$2\times 4!+2\times 3!+1\times 2!+2=64$$

よって，64 個

~~3~~ 4 2 5 1 ➡ 1 2 ~~3~~ 4 5
~~3~~ ~~4~~ 2 5 1 ➡ 1 2 ~~3~~ ~~4~~ 5
~~3~~ ~~4~~ ~~2~~ 5 1 ➡ 1 ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5

(3) 34340 より大きい最小の整数は，34512 より，この整数が終わりから数えて何番目にあるか求めればよい．

$$34512 \Rightarrow 54321$$

を対応させて，階乗表現すると，

$$2\times 4!+1\times 3!+0\times 2!+2=56$$

よって，56 個

~~3~~ 4 5 1 2 ➡ 5 4 ~~3~~ 2 1
~~3~~ ~~4~~ 5 1 2 ➡ 5 ~~4~~ ~~3~~ 2 1
~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 1 2 ➡ ~~5~~ ~~4~~ ~~3~~ 2 1

ex) 0,1,2,3,4 の5つの数字をすべて使ってできる5桁の整数を小さい順から並べたとき63番目にくる整数を求めよ.

解)

$$63=2\times4!+2\times3!+1\times2!+1$$

$2\times4!$ の2については，0を除いて1,2の分冊ができていることに注意すればよい.
01234に対応させて右図のように抜き出すと，
63番目は32104

0 1 2 ~~3~~ 4 ➡ 3
0 1 ~~2~~ ~~3~~ 4 ➡ 3 2
0 ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ➡ 3 2 1
~~0~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ➡ 3 2 1 0 4

ex) HGAKUEN の7文字の中から異なる6文字を選んで1列に並べて文字列を作り，辞書式に配列する.
(1) GAKUEN は，始めから数えて何番目の文字列か.
(2) 2000番目の文字列は何か.　　(北海学園大学)

解)
(1) アルファベット順に文字を並べてできた分冊を抜き出しいくが，この場合は7文字から6文字を選ぶので，

$${}_6P_5,\ {}_5P_4,\ {}_4P_3,\ {}_3P_2$$

冊毎に分冊を作っていくことになる.
GAKUEN の文字を左側からアルファベット順に並べた文字に対応させていくと，

$$2\times{}_6P_5+0\times{}_5P_4+2\times{}_4P_3+3\times{}_3P_2+2=1508$$

よって，1508番目.

~~G~~ A K U E N ➡ A E ~~G~~ H K N U
~~G~~ ~~A~~ K U E N ➡ ~~A~~ E ~~G~~ H K N U
~~G~~ ~~A~~ ~~K~~ U E N ➡ ~~A~~ E ~~G~~ H ~~K~~ N U
~~G~~ ~~A~~ ~~K~~ ~~U~~ E N ➡ ~~A~~ E ~~G~~ H ~~K~~ N ~~U~~

(2) ${}_nP_{n-1}$　$(n=6,5,4,3)$ で2000を割っていく.

$$2000=2\times{}_6P_5+4\times{}_5P_4+3\times{}_4P_3+1\times{}_3P_2+2$$

であるから，AEGHKNU に対応させて文字を拾い，復元すると，右図から，2000番目はGNKEAU である.

A E ~~G~~ H K N U ➡ G
A E ~~G~~ H K ~~N~~ U ➡ G N
A E ~~G~~ H ~~K~~ ~~N~~ U ➡ G N K
A ~~E~~ ~~G~~ H ~~K~~ ~~N~~ U ➡ G N K E
~~A~~ ~~E~~ ~~G~~ H ~~K~~ ~~N~~ ~~U~~ ➡ G N K E A U

一般に異なる n 文字から異なる r 文字を選んで並べ文字列を作るとき，任意の文字列の番号は，

$$\sum_{k=1}^{r-1}a_k\,{}_{n-r+k}P_k+n-r+1\quad(0\leqq a_k\leqq n-r+k)$$

と分解できます. $a_k=n-r+k$ とすれば，

$$\sum_{k=1}^{r-1}(n-r+k)\,{}_{n-r+k}P_r+n-r+1=\sum_{k=1}^{r-1}\{(n-r+k+1)-\}\,{}_{n-r+k}P_k+n-r+1$$

$$=\sum_{k=1}^{r-1}({}_{n-r+k+1}P_{k+1}-{}_{n-r+k}P_k)+n-r+1$$

$$={}_nP_r$$

となります.

ex) 0,1,2,3,4,5,6 の7つの数字の中から異なる4つの数字を選んで4桁の整数を作るとき，3400より大きい数はいくつあるか.

解) 3400より大きい最小の整数は3401であるから，終わりから数えてこの整数が何番目にあるか求める.
6543210 から順次，${}_6P_3,\ {}_5P_2,\ {}_4P_1$ で分解する.

$$3\times{}_6P_3+2\times{}_5P_2+4\times{}_4P_1+4=460$$

以上より460個

~~3~~ 4 0 1 ➡ 6 5 4 ~~3~~ 2 1 0
~~3~~ ~~4~~ 0 1 ➡ 6 5 ~~4~~ ~~3~~ 2 1 0
~~3~~ ~~4~~ ~~0~~ 1 ➡ 6 5 ~~4~~ ~~3~~ 2 1 ~~0~~

ところで，今回の小手技では，ちょっとヒビが入っていたまなぶとかず子の仲が決定的な破局を迎えてしまいます.
文末のかず子の「………」は，「あんたはそう思ってたの」という心の憤りを表しているのです．そして，かず子の性格からして，一方通行であったことの自覚は自分よりは他者を許すことができない感情を意味します．次からはかず子の根深い攻撃が小手技に展開されることになるのでしょうか.