じゃんけんの勝敗確率の小手技

札幌旭丘高等学校　中村文則

○４人寄れば××の智恵？

<先　生> みんなに新しい友達を紹介しよう．アリスです．彼女英国生まれの日本人で，英国で暮らしていましたが，今回，お父さんの仕事の関係で半年だけ日本でみんなと一緒に勉強することになりました．仲間として迎えてやってください．ところで誰か，彼女に学校の案内といったサポート役をお願いできないだろうか．

<まなぶ>そりゃ，やっぱり学校通の僕が適任だよな．

<かず子>何いっているの．いつも授業が終ったら真っ先に学校からいなくなるくせに．だいたいまなぶに任せたら，彼女の日本に対する印象が悪くなるじゃない．やっぱり女同士ここは私が……．

<よしお>何か２人のどちらがやってもお互いもめそうだからここは僕が案内を買って出ようか．

<まなぶ>どうしたのさ，よしお，いつになく積極的だな．でもまあ，みんながやりたがっているみたいだから，ここは公平にジャンケンでもして決めたらどうだろうか．

<アリス>あのう，新参者が発言するのはどうかと思うのですけれど，ジャンケンするなら私もいれて貰えませんか．イギリスではこういう場合はコインを投げて決めるんです．だから，日本のじゃんけんをして決める方法ってとても興味があるんです．

<かず子>でもあなたが勝ったらどうするの．あなたが３人の中から１人指名するってことかしら．

<アリス>いえ，私は皆さんと早く仲良くなりたいから，できればもし面倒でなければ皆さん全員にサポートをお願いできれば嬉しいのですが．それで，もし私が勝った場合は先生からご指名していただくってどうでしょうか．

<まなぶ>うん，それも面白いと思うな．先生が誰を一番信頼しているかということも分かるしね．いいですよね，先生．

<先　生>しょうがないな，では，早くジャンケンをしなさい．

<まなぶ>それじゃ，僕が音頭をとって，じゃんけんぽん，あいこでしょ，……………あいこでしょ………．

<アリス>あら，御免なさい，私が勝っちゃったわ．

<まなぶ>まあ，しょうがないね．そうするとあとは先生が誰を選ぶかってことだ．それにしても今のジャンケン，疲れた，なかなか決まらないんだもの．

<かず子>そうよね，３人なら簡単に勝負がつくのに４人以上になると途端，決まらなくなるわよね．６人で掃除のごみ捨てジャンケンをするときなんか大変よね．

<まなぶ>だから僕は，いつも少しでも早くジャンケンが終るように，みんなのために掃除のときはゴミ捨てジャンケンの参加は遠慮してるんだけどな．

<アリス>まなぶ君って面白い考え方をするんですね．ところで４人でジャンケンをするときに引分けになる確率って確か $\frac{1}{2}$ ぐらいだって思いましたけど．

<かず子>まなぶのことをそんなふうにみれる人に初めてお目にかかったような気がする．ところで，アリスって数学が得意なの．

<アリス>そんなんじゃないけど英国のハイスクールで，教授が確率の問題を，日本のジャンケンを例にとって教えてくれたの．４人でじゃんけんをした場合，誰かが一人勝つ確率は，「誰が何の手で勝つか」って考えて，

誰が　　……　４人の中から一人選んで　${}_4\mathrm{C}_1 = 4$

何の手　……　グー，チョキ，パーから勝つ手を選んで　${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

そうすると確率は，$\dfrac{4\times 3}{3^4} = \dfrac{4}{27}$ ですねよ．

<先　生>そうだね．この確率から勝者が決まる確率は低いってことが分かるから，引分けの確率は逆に高くなることが予想できるね．アリスが面白い話題を提供してくれたからサポート役を選ぶ前にこのことを考えてみようか．引分けになる確率が $\frac{1}{2}$ 近くになるかどうか調べてみよう．

さて，確率をどのように計算すればいいだろう．

<よしお>先ほどのアリスがいった「誰が何の手を出す」というように考えればいいと思います．引分けになるにはまず３人がみな同じ手を出すときを考えると，その手の出し方は３通り．次に，みんな違う手を出す場合だけど……．

<かず子>みんな違う手になることはないわ．誰か１人は，他の３人と同じ手をだすはずよね．だから２人は同じ手になるわけだからまずその２人を選び，その後，２人の出す手を考えます．

$${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 18$$

<まなぶ>そして最後に残った２人が手を出す方法は $2! = 2$ だ．したがってその確率は，

$$\frac{3+18\times 2}{3^4} = \frac{13}{27}$$

アリスがいった通りだ，$\frac{1}{2}$ぐらいの確率になっている．

<アリス>へぇーっ，皆さんって凄くコンビネーションがいいんですね．

<かず子>まなぶの場合は，最後に美味しいところをさらっていくだけだから，コンビネーションというよりは要領がいいだけなんだよね．それじゃ，掃除のときの６人がジャンケンをするとき，引分けになる確率ってどれだけなんだろう．

<先　生>４人よりもかなり確率が高くなりそうだけど誰か挑戦してみないか．

<よしお>何人が同じ手を出せばいいかってことで場合分けをしたらどうだろう．

<アリス>私も皆さんのコンビネーションに加えてもらっていいかしら．グー(○)，チョキ(△)，パー(□)の三つのグループに６人を分けたらどうかしら．そうすると，

① ○○○○△□
② ○○○△△□
③ ○○△△□□

の３つの分け方で考えればいいかと思います．

<まなぶ>やるもんだね．じゃ僕が①の場合をやりましょう．まず○，△，□に入る手の選び方は，△□は１人ずつだから，

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{2!} = 3.$$

次にこれらのグループの手を出す人を選んで，

$$3 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1 = 90$$

いいでしょ，先生．

<先　生>その通りだね．では，残りはよしおとかず子がやってごらん．

<かず子>②で○△□に入る手を選び方は$3! = 6$．誰が出すかを決めて，

$$6 \times {}_6C_1 \times {}_5C_2 = 360$$

です．

<よしお>③ですね．２人ずつ同じ手をだすわけだから，誰が○□△の手を出すか考えればいいですね．

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$$

最後に，①，②，③は排反で，全体の手の出し方は3^6だから，求める確率は，

$$\frac{3+90+360+90}{3^6} = \frac{181}{243}$$

<まなぶ>凄い，約$\frac{180}{240} = \frac{3}{4} = 0.75$だ．こりゃ勝負は決まらないよな．このまま７人，８人と増えていったらどんな確率になっていくんだろうな．

<先　生>そうだな．それではそれも求めてごらん．

<かず子>もう，まなぶったら余計なことをいうんだから．もう場合分けはしたくないわ．まなぶ，責任とってね．

<まなぶ>しょうがないな．7 人の場合はえーっと，○の数で場合分けして，

○○○○○□△，○○○○□□△，○○○□□□△，○○○□□△△

ふーっ，あとはこの計算だけど……．

<アリス>まなぶさん，そんなに面倒に考えなくてもいいと思うんですけど．

<よしお>えっ，どういうこと．

<アリス>先ほど，私は４人でジャンケンした場合に１人が勝つ確率を計算したでしょ．これは「誰が何の手」って考えればすぐに出せたから，同じようにすると２人，３人と増やしていっても簡単に確率は計算できますよね．

<まなぶ>ということは，……，あっそうか．余事象の確率を求めればいいんだね．

<アリス>そうです．６人なら，１人勝つ場合から５人勝つ場合までの確率を求めてから，それらの余事象を考えれば引分けの確率が出せますよね．

<まなぶ>うん．やってみようか，少なくとも一人勝つ確率は，

$$\begin{aligned} &{}_3C_1 \times {}_6C_1 + {}_3C_1 \times {}_6C_2 + {}_3C_1 \times {}_6C_3 + {}_3C_1 \times {}_6C_4 + {}_3C_1 \times {}_6C_5 \\ &= {}_3C_1 \times (6+15+20+15+6) \\ &= 3 \times 62 \end{aligned}$$

だから，余事象の確率は，

$$1 - \frac{3 \times 62}{3^6} = 1 - \frac{62}{243} = \frac{181}{243}$$

やった．簡単に出たよ．

<かず子>そうすると，7 人の場合に引分けになる確率は，

$$\begin{aligned} 1 - \frac{{}_3C_1 \times ({}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3 + {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6)}{3^7} &= 1 - \frac{7+21+35+35+21+7}{3^6} \\ &= \frac{67}{81} \end{aligned}$$

<まなぶ>こりゃ,一気に 40 人くらいできそうだなあ．

<かず子>また，余計なこという．そんなこといってると……
<先　生>それじゃあ，40 人といわず，n 人で考えてみたら．
<かず子>わーっ，ほら来た．どうするのよ．
<まなぶ>大丈夫だよ．先生がn 人で考えろってことはだね．いまやった方法，すなわち余事象の考え方にヒントがあって，それを使って拡張できるってことだよ．
<アリス>まなぶさんは心理学も勉強しているんですか．
<かず子>読めるのは先生の心理だけよ．でも，どうやって考えればいいのかしら．
<アリス>あのう．これも向こうの学校で習ったんですけど，二項定理を使ってみたらどうでしょうか．
<よしお>なるほど，その手があった．

$$(x+1)^n=\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k x^k$$

これから，この式の両辺に $x=1$ を代入すると，

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$$

<まなぶ>そうか，この左辺の組合せの部分が，何人勝つかを考えるときにでてくるんだ．
よしおの作った式から，

$${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-2$$

これから，引き分けになる確率は，

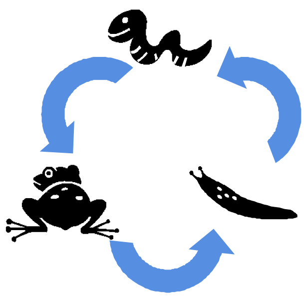
$$1-\frac{{}_3C_1\times({}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1})}{3^n}$$

$$=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$$

どうです．先生，もう文句はないですよね．
<アリス>皆さんって本当に凄いんですね．チームワークであっという間に答えを導き出してしまったわ．
私，皆さんについていけるか心配です．
<先　生>本当に今回は，先生がアドヴァイスをしなくともいつの間にか結論がでていた．アリスが入ったことでみんなの結束は以前より強まったみたいだね．ところで，サポートの件は，最後に問題を解いたまなぶにお願いしようかな．
<まなぶ>そうですよね．やっぱりぼくですよね．
<アリス>まなぶさん，よろしくお願いしますね．
<かず子>うーん，心配だなあ．でも，まなぶ，どうして今回だけじゃんけんに参加してたのよ，まったく．

あとがき

じゃんけんの歴史は古く，元禄時代に中国より伝えられたといわれる．その名の由来は，石拳(ジャクケン)が転じてジャンケンになったとか，中国語で，ジャン(石)，ケン(鋏)，ポン(布)と発音していたことより名がついたといった諸説がある．インドネシアでは，親指，人差し指，小指を立てて，それぞれ象，人，蟻にたとえ，「象は人に勝ち，人は蟻に勝ち，蟻は象に勝つ」というルールで勝敗を決める虫拳といわれるものがあった．



これらに共通するのは「三すくみ」という，三者が互いにけん制し合い、衝突の危機の中で身動きが出来なくなる状況にある．日本でも，「蛇は蛙に勝ち，蛙はナメクジに勝ち，ナメクジは蛇に勝つ」の三すくみが寓話なんかで扱われている．ジャンケンはこの三すくみの均衡・破綻をゲームにしたもので，シンプルなルールでありながらこれほどエキサイトするものは古今到来ないといってもいいだろう．

江戸時代では，吉原遊郭では，客と芸者が藤八拳という三すくみ拳で遊んだといわれ，よく時代劇ドラマでもその様子が再現されている．これは，「狐」，「庄屋」，「鉄砲」を身振り手振りで表現し，狐は庄屋に勝ち(だまし)，庄屋は鉄砲に勝ち(買い)，鉄砲は狐に勝つ(撃つ)という関係から三すくみの状態をなすものである．また，沖縄では，「木は鳥に勝ち，鳥は虫に勝ち，虫は木に勝つ」といったものや，面白いものとしては「お父さんはお母さんに勝ち，お母さんは子供に勝ち，子供はお父さんに勝つ」というものもある．南国らしい発想ではないだろうか．

さて，ジャンケンでは三すくみはみな違って手を出す引分けの状態であるから，したがってジャンケンは３人でやるのが理想的であり，その確率はバランスがとれているが，４人以上になると，途端崩れてしまう．本文では，それを，人数が増えると，勝敗が決まりにくくなり，引分けの確率が１に近づくことから説明をしている．しかし，感覚的には，勝敗が長引くことは，じゃんけんの回数が増えていくとみた方が，分かり易いといえる．すなわち，最後に一人の勝者が決定するまでの期待値(平均)を考えると，４人以上のジャンケンのバランスを崩れ方を判断できることになる．

このことを以下，少し考察してみよう．

○2人でジャンケン

１回のジャンケンをするとき，引分けになる確率は，２人が同じ手になる場合だから

$$\frac{{}_3C_1}{3^2}=\frac{1}{3}$$

どちらかが勝つ確率は，

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{3^2}=\frac{2}{3}$$

次に，２回目のジャンケンで勝敗が決まる確率は，１回目が引き分けで，２回目に２人のどちらかが勝つから，

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

同様にn回目のジャンケンで勝敗が決まる確率は，$(n-1)$回目までは引き分けで，n回目にどちらかが勝つことより，その確率$P_A(2)$は，

$$P_A(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3^n}$$

ここで，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

であるから，その平均$E_A(2)$は，

$$E_A(2)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_A(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$$

で求められる．

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{3^k}=\frac{2\cdot1}{3}+\frac{2\cdot2}{3^2}+\frac{2\cdot3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n}{3^n}\quad\cdots\cdots①$$

とおく．両辺を$\frac{1}{3}$倍すると，

$$\frac{1}{3}S=\frac{2\cdot1}{3^2}+\frac{2\cdot2}{3^3}+\frac{2\cdot3}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{2n}{3^{n+1}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②の２式を辺々引いて，

$$\frac{2}{3}S=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore\quad E_A(2)=\lim_{n\to\infty}S=\frac{3}{2}\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

よって，1.5回が２人でジャンケンをした場合の回数の平均となる．

次に３人以上でジャンケンをする場合を考えるが，どういった時点でジャンケンを終了するかで，確率や平均は違ったものとなる．具体的に述べると，

A：勝者が１人以上でたときに終了
B：勝者が１人になったときに終了
C：参加者全員の順位がついたときに終了

の３つのcaseが考えられる．

そこで，n人でジャンケンをするとき，A,B,Cそれぞれの確率を$P_A(n), P_B(n), P_C(n)$，平均を$E_A(n), E_B(n), E_c(n)$として以下，進めていく．

なお，２人でジャンケンをする場合は，

$$P_A(2)=P_B(2)=P_c(2),\quad E_A(2)=E_B(2)=E_C(2)$$

である．

○3人でジャンケン

まず，1回のジャンケンでの勝者の数の確率を求める．

2人勝つ場合は，$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{3^3}=\frac{1}{3}$

1 人勝つ場合は，$\dfrac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{3^2} = \dfrac{1}{3}$

引き分けの場合は，$\dfrac{{}_3C_1 + 3!}{3^3} = \dfrac{1}{3}$

どれもみな等しい確率となる．

n 回目で勝者が決まる確率を A,B,C それぞれの場合について求めよう．

< A の平均>

A は，引分けが何回か続いたあとに勝者がでた場合である．

すなわち $(n-1)$ 回までは引き分けで，n 回目に誰かが勝つと考えるとその確率 $P_A(3)$ は，

$$P_A(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_A(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = 1$$

であるから，期待値 $E_A(3)$ は，

$$E_A(3) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_A(3) = \sum_{k=}^{\infty}\frac{2k}{3^k} = E_A(2) = \frac{3}{2}$$

これは，２人でジャンケンをした場合の平均に一致している．

< B の平均>

B については，$(n-1)$ 回目のときに残っている人数で場合分けをする．

３人の場合は，$(n-1)$ 回目までは引き分けが続き，n 回目に３人でジャンケンをして一人の勝者が決まるので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}$$

２人の場合は，$(n-1)$ 回までの間に 1 人が負けたことなる．

$(m-1)$ 回目まで引き分けが続き，m 回目で 1 人負け，以後 $(n-1)$ 回目まで引き分けが続き，n 回目に２人でじゃんけんをして，1 人の勝者が決まるとしよう．その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-m-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}$$

ここで，$1 \leqq m \leqq n-1$ であることに注意すると，そのすべての m に対して $\dfrac{2}{3^n}$ の確率となるから，３人でジャンケンをして n 回目に一人の勝者が決まる確率 $P_B(3)$ は，

$$P_B(3) = \frac{1}{3^n} + (n-1) \times \frac{2}{3^n} = \frac{2n-1}{3^n}$$

このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_B(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

である．次に，期待値 $E_B(3) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_B(3)$ を求めよう．

$$S = \sum_{k=1}^{n} kP_2 = \frac{1\cdot 1}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 5}{3^3} + \frac{4\cdot 7}{3^4} + \cdots\cdots + \frac{n(2n-1)}{3^n} \quad \cdots\cdots ①$$

とおき，両辺を $\dfrac{1}{3}$ 倍する．

$$\frac{1}{3}S = \frac{1\cdot 1}{3^2} + \frac{2\cdot 3}{3^3} + \frac{3\cdot 5}{3^4} + \frac{4\cdot 7}{3^5} + \cdots\cdots + \frac{n(2n-1)}{3^{n+1}} \quad \cdots\cdots ②$$

①と②の２式を辺々引いて，

$$\frac{2}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \frac{13}{3^4} + \cdots\cdots + \frac{4n-3}{3^n} - \frac{n(2n-1)}{3^{n+1}} \quad \cdots\cdots ③$$

さらに，③の両辺を $\dfrac{1}{3}$ 倍して，

$$\frac{2}{9}S=\frac{1}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{9}{3^4}+\frac{13}{3^5}+\cdots\cdots+\frac{4n-3}{3^{n+1}}-\frac{n(2n-1)}{3^{n+2}}\quad\cdots\cdots④$$

③，④の２式を辺々引いて，

$$\frac{4}{9}S=\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{4}{3^n}-\frac{n(2n-1)}{3^{n+1}}-\frac{4n-3}{3^{n+1}}+\frac{n(2n-1)}{3^{n+2}}$$

よって，その平均 $E_B(3)$ は，

$$E_B(3)=\lim_{n\to\infty}S=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{9}{4}$$

<C の平均>

C は，勝者だけでなく敗者も決める場合である．すなわち，ジャンケンに参加した３人に順位をつけた場合の平均である．

さて，この場合は，引き分け後，勝ち人数が１人の場合は負けた２人が，勝ち人数が２人の場合はその２人がジャンケンをすることになる．$(m-1)$ 回までが引分けで，m 回目に誰かが勝ち，$(n-1)$ 回目までに，勝つか負けるかした２人がジャンケンをすると考えると，その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-m-1}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3^n}$$

ここで，$1\leqq m\leqq n-1$ であるから，C の確率 $P_C(3)$ は

$$P_C(3)=\frac{4(n-1)}{3^n}$$

このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_C(3)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=2\times\frac{3}{2}-4\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

であるから，期待値 $E_C(3)$ は，

$$E_C(3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(4k-4)}{3^k}$$

で得られる．

この値は前述の $E_B(3)$ と同様に求めることができるが，次のように考えると容易に値を得る．

３人でジャンケンをして，引分けが続いた後，１人勝つか負けるまでの平均は A の結果より $\frac{3}{2}$．その後は，２人でジャンケンをして，優勝者か，最下位を決めることとなりその期待値は，前述「２人でジャンケン」で触れたように $\frac{3}{2}$ となる．

以上より，　$E_C(3)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

○4人でジャンケン

まず，１回ジャンケンをするとき，勝者の人数に対してその確率を求める．

１人勝つ場合　$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27}$

２人勝つ場合　$\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{3^4}=\frac{2}{9}$

３人勝つ場合　$\frac{{}_4C_3\times{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27}$

引分けの場合　$1-\frac{4+6+4}{27}=\frac{13}{27}$

では，４人で n 回ジャンケンをする場合の平均を，３つの case A, B, C で考えてみよう．

<A の平均>

$(n-1)$ 回目まで引き分けが続き，n 回目に勝者が決まるとする．

引き分けになる確率を p，誰かが勝つ確率を q とすると，

$$p=\frac{13}{27},\ q=1-p=\frac{14}{27}.$$

その確率 $P_A(4)$ は,

$$P_A(4) = p^{n-1}q = \frac{13^{n-1} \times 14}{27^n}$$

ここで,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_A(4) = \frac{q}{1-p} = \frac{q}{q} = 1$$

である.

$$S = \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}q = q + 2qp + 3qp^2 + 4qp^3 + \cdots\cdots + np^{n-1}q$$

とおく.

$$pS = qp + 2qp^2 + 3qp^3 + 4qp^4 + \cdots\cdots + np^n q$$

２式を辺々引いて,

$$(1-p)S = q + qp + qp^2 + qp^3 + \cdots\cdots + qp^{n-1} - np^n q$$

よって，平均 $E_A(4)$ は,

$$E_A(4) = \lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{1-p} \times \frac{q}{1-p} = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$$

以上より，$E_A(4) = \dfrac{27}{14}$

<B の平均>

３人のジャンケンの場合と同様に考えて求めることは可能である．しかし，煩雑な計算は避けられない.
そこで，簡便的な方法で平均を求めてみよう.
まず，ジャンケンをする過程を大きく二つに分ける.

①引分けの状態から誰かが勝つ
②勝った(または負けた)人同士がジャンケンを続け，勝者が１人決まるまで続ける

この①，②のその平均の和を求めると比較的簡単に平均を算出することができるのである.
例として，３人のジャンケンで考えてみよう.

①の平均は $E_A(3) = \dfrac{3}{2}$.

次に，②のジャンケンに移る.
①の条件のもとでジャンケンをして，１人の勝者が決まる(条件付)確率を求めると.

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2 \times {}_3C_1} = \frac{1}{2}$$

２人でジャンケンをしたときの平均は $E_B(2)$ であるから，よつて

$$E_B(3) = E_A(3) + \frac{1}{2} \times E_B(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

C の場合は，①で勝者が１人になった場合も２人で２・３位を決めるジャンケンがあるが，その確率(平均)はどちらも，１・２位を決めるものと同じであるから,

$$E_C(3) = E_A(3) + \frac{1}{2} \times E_C(2) + \frac{1}{2} \times E_C(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 3$$

となる.
４人の場合についてこの方法で求めてみよう.

まず①の場合の平均は，$E_A(4) = \dfrac{27}{14}$

次に,

４人でジャンケンをして１人勝つ場合の数は　${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 12$
４人でジャンケンをして２人勝つ場合の数は　${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$
４人でジャンケンをして３人勝つ場合の数は　${}_4C_3 \times {}_3C_1 = 12$

であるから，①の条件で１人勝つ確率は,

$$\frac{12}{12+18+12} = \frac{2}{7}$$

同様に２人，３人勝つ確率はそれぞれ，$\dfrac{3}{7}, \dfrac{2}{7}$ となる.

よって，その平均$E_B(4)$は，

$$E_B(4)=E_A(4)+\frac{3}{7}E_B(2)+\frac{2}{7}E_B(3)=\frac{27}{14}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{2}+\frac{2}{7}\times\frac{9}{4}=\frac{45}{14}$$

<C の平均>

B の条件付確率を参考にすると，その平均$E_C(4)$は，

$$E_C(4)=E_A(4)+2\times\frac{3}{7}\times E_C(2)+2\times\frac{2}{7}\times E_C(3)=\frac{27}{14}+2\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{2}+2\times\frac{2}{7}\times 3=\frac{69}{14}$$

以上より，

$$E_B(4)=\frac{45}{14},\quad E_C(4)=\frac{69}{14}$$

最後に n 人への一般化を試みよう.

◯n 人でジャンケン

<A の平均>

n 人で 1 回ジャンケンをするとき引分けになる確率を p，誰かが勝つ確率を q とする.
本文の結果より，

$$q=1-p=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\ で$$

よって，その平均$E_A(n)$は，

$$E_A(n)=\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}q=\frac{1}{q}=\frac{3^{n-1}}{2^n-2}$$

である.

<B の平均>

引分けが続いたあとに勝者がでるときの平均は$E_A(n)$である.
その条件のもとでジャンケンをするときに，r 人の勝者が決まる条件付確率は，

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}}=\frac{{}_nC_r}{2^n-2}$$

よって，r 人でジャンケンをするとき，1 人の勝者が決まる平均$E_B(n)$は，

$$E_B(n)=E_A(n)+\sum_{r=1}^{n-1}E_B(r)\times\frac{{}_nC_r}{2^n-2}$$
$$=\frac{3^{n-1}+\sum_{r=1}^{n-1}{}_nC_r\cdot E_B(r)}{2^n-2}$$

<C の平均>

B と同様に，引分けが続いたあとに勝者が決まったという条件のもとで，r 人の勝者が決まるときの条件付確率は，

$$\frac{{}_nC_r}{2^n-2}$$

このとき，並行して$(n-r)$については敗者を決めるジャンケンをすることになる.

r 人でジャンケンをして勝者を決める(順番をつける)平均は$E_C(r)$，$(n-r)$人でジャンケンをして敗者を決める(順番をつける)平均は$E_C(n-r)$である.

また，${}_nC_{n-r}={}_nC_r$であることより，

$$E_C(n)=E_A(n)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{{}_nC_r(E_C(r)+E_C(n-r))}{2^n-2}$$
$$=\frac{3^{n-1}+\sum_{r=1}^{n-1}{}_nC_r(E_C(r)+E_C(n-r))}{2^n-2}$$

n	$E_A(n)$	$E_B(n)$	$E_C(n)$
1	0	0	0
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	3
4	$\frac{27}{14}$	$\frac{45}{14}$	$\frac{69}{14}$
5	$\frac{27}{10}$	$\frac{157}{35}$	$\frac{257}{35}$
6	$\frac{243}{62}$	$\frac{13497}{2170}$	$\frac{22539}{2170}$

5 人でジャンケンする場合の平均を上述の方法で求めてみよう.

$$E_A(5)=\frac{3^4}{2^5-2}=\frac{27}{10}$$

$$E_B(5)=\frac{3^4+\sum_{r=1}^{4}{}_5C_rE_B(r)}{2^5-2}=\frac{3^4+10\times\frac{3}{2}+10\times\frac{9}{4}+5\times\frac{45}{14}}{30}=\frac{157}{35}$$

$$E_C(5)=\frac{3^4+\sum_{r=1}^{4}{}_5C_r(E_C(r)+E_C(5-r))}{2^5-2}$$

$$=\frac{3^4+5\times\frac{69}{14}+10\times\left(\frac{3}{2}+3\right)+10\times\left(3+\frac{3}{2}\right)+5\times\frac{69}{14}}{2^5-2}$$

$$=\frac{257}{35}$$

これから，５人でジャンケンをしてゴミ捨て当番を１人決める場合のジャンケンの平均回数は $E_B(5)$ 　4.5 回である．

平均回数が 10 回を超える場合の人数は，

$$E_B(7)=\frac{225161}{26040}\quad 8.65,\quad E_B(8)=\frac{10007591}{826770}\quad 12.1$$

よって，８人でジャンケンをした場合である．このとき，引分けの硬直状態から誰からが抜け出す確率は，

$$E_A(8)=\frac{3^7}{2^8-2}\quad 8.6\text{ 回}$$

１人を決める場合と比較してもそれほど回数が増えるわけではない．損益がはっきりさせるジャンケンはその緊張下，１回１回のジャンケンの重みが大きいわけで，それが「何度やっても決まらない」という苛立ちにつながる．また，人数が増えると，たくさんの人数がいるのに自分１人が当番に決まるのは極めて低い確率と誰もが思ってしまう．余計，心理的に「決まらない」印象は増幅されるのである．単純に確率や平均で計ることのできないゲームとしての側面をジャンケンは持っているのである．

○<補足>条件付期待値

離散型確率変数 X, Y に対して，事象 $X=x$ が起こったときに，事象 Y が起こる期待値を，事象 X が起きたときの事象 Y の条件付期待値といい，

$$E(Y\mid X=x)=\sum_y yP(Y=y\mid X=x)$$

で定義する．ここで，$P(Y=y\mid X=x)$ は，事象 $X=x$ が起こったときの事象 $Y=y$ が起こる条件付確率であり，

$$P(Y=y\mid X=x)=\frac{P(Y=y, X=x)}{P(X=x)}$$

である．したがって $E(Y\mid X=x)$ は X の関数であるから，これを $E(Y\mid X)$ と表し，確率変数 X が与えられたもとでの確率変数 Y の条件付確期待値という．条件付期待値には次の性質がある．

$$\boxed{E(E(Y\mid X))=E(Y)}$$

証明)

$f(x)=E(Y\mid X=x)$ とおくと，

$$f(x)=\sum_y yP(Y=y\mid X=x)$$

$$=\sum_y y\cdot\frac{P(Y=y\mid X=x)}{P(X=x)}$$

$$=\frac{1}{P(X=x)}\sum_y yP(Y=y\mid X=x)$$

これから，

$$E(E(Y\mid X))=E(f(X))$$

$$=\sum_x f(x)P(X=x)$$

$$=\sum_x\left(\sum_y yP(Y=y\mid X=x)\right)$$

$$=\sum_y yP(Y=y)$$

$$=E(Y)$$

Q.E.D

これから，確率変数Ｙの平均は，確率変数ＸのもとでのＹの条件付期待値の平均で求められることになる．
上述のジャンケンのｎ人への一般化は，この性質を利用したものである．

○グループ分け問題について

ジャンケンでの勝敗は，ｎ人をグー，チョキ，パーという３つのグループ(組)に分けることで決まる．
これからジャンケンはｎ人のグループ分け問題の１つとみなすことができる．すなわち，勝敗が決まる場合は，２つのグループに分かれればよく，その組合せは，

$${}_{3}C_{2}\times(2^{n}-2)$$

となる．また，引分けになる場合は，ある組にｎ人全員が入るか，空の組がないように３つの組に分かれることだから，

$${}_{3}C_{1}+\left\{3^{n}-{}_{3}C_{2}\times(2^{n}-2)\right\}$$

となればよい．
したがって，４すくみのようなジャンケンに相当するゲームを考える場合もグループ分けとみることで求めることが可能になる．
ところでこのグループ分けを一般化して，

ｎ人をｒ組のグループに分ける方法

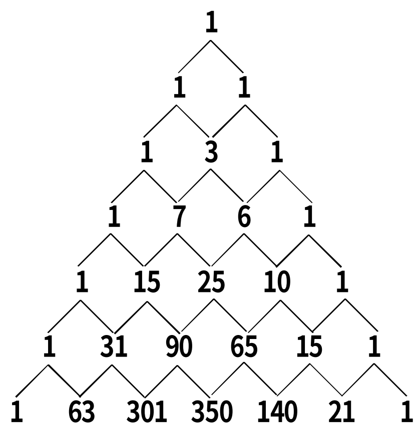
はどのように求めればいいだろう．
例えば６人を３つのグループに分ける方法は，３つのグループの構成人数から場合分けをする．

１人，１人，４人の場合は，$\dfrac{{}_{6}C_{1}\times{}_{5}C_{1}}{2!}=15$

１人，２人，３人の場合は，${}_{6}C_{1}\times{}_{5}C_{2}=60$

２人，２人，３人の場合は，$\dfrac{{}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}}{3!}=15$

よって，$15+60+15=90$ (通り)
さらに人数が増えていくと，結構面倒な計算が必要となってくる．
しかし，右図のようなパスカルの三角形モドキを作ると，逐次，簡単にその場合の数を得ることができる．



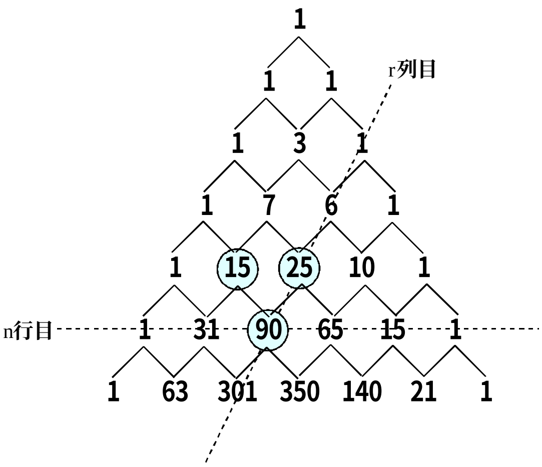
ところで，この表のｎ行ｒ列の数は，

$(n-1)$ 行 $(r-1)$ 列の数 ＋ $(n-1)$ 行 r 列の数×r

を計算して求め，これがｎ人をｒ組に分ける場合の数になっている．
したがって，６人を３つのグループに分ける方法は，

$15+25\times3=90$ (通り)

である．
では，どうしてこの図で求められるかについては諸氏に委ねたい．
ここから面白い結果が得られるのではないかと思うのだが．



さて，最後に本文の登場人物について一言．
新たに小手技チームに，短期留学生のアリスが加わった．
アリスという名前は，アリストテレス，アリスマティックといろいろ連想できるが，童話作家ルイス・キャロルの著した「不思議の国のアリス」のヒロイン名からとっている．
ルイス・キャロルは本名をチャールズ・ドジソン(Charles Lutwidge Dodgson)といい，名前のつづりを逆に読み，ラテン語化し，さらに英語化するという手の込んだ並べ替えをすることでそのペンネーム Lewis Carroll は生まれる．
オックスフォード大学の教授でもあったドジソンはパズルや言葉遊びが好きで，著書の中にも巧みにその茶目っ気が隠されていて読者を楽しませてくれる．本文に登場するアリスもそんなお茶目なキャラクターになればと願っているのだが．
ただ，今回の小手技のテーマのジャンケンも３人まではバランスよくその確率が得られるが，４人になると途端，勝敗と引き分けの確率のバランスは崩れていく．三すくみは，３人それぞれが個性的であっても立場が同等であるから起こる．
「よしおはかず子に勝ち」,「かず子はまなぶに勝ち」,「まなぶはよしおに勝つ」
この関係がお互いのバランスを保ってきたのである．その個性がぶつかり合い，「三人寄れば文殊の智恵」でこれまで難問を解決してきたといえる．それがアリスの参入により，三すくみは崩れてしまった．アリスが３人の誰につくかで，微妙な人間関係が生まれる可能性があるのである．特に，まなぶとかず子のヒビの入った関係は，アリスの動向ひとつで完全に破局を迎えるかもしれない．こちらの人間関係もこれからはちょっと面白くなるかもしれない．

参考文献：中村義作 著「遊びの確率論」(海鳴社)
※本著には，ジャンケン以外にも，宝くじ，あみだ，藤八拳といった興味深い確率問題を扱っている．