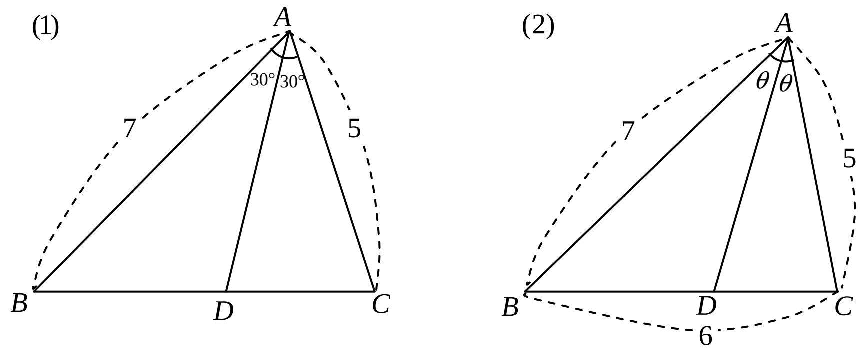
補角から眺めた三角比の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○いい関係は補い合うことから始まる

<まなぶ> 三角形の１つの内角の二等分線の長さは、内角の大きさが $30°, 90°, 120°$ のときは簡単に求められるけど、そうでない場合は結構手間がかかるよね。簡単に求める方法ってないのだろうか。
<かず子> 「渡りに舟」､「柳の下のどじょう」なんてことはそうそうあるものじゃないでしょ。まなぶは「楽は苦の種、苦は楽の種」ってことわざ知らないの。
<まなぶ> 僕の辞書には「果報は寝て待て」しかないんだ。
<かず子> 結局は「他力本願」、人任せってことなのよね。
<先　生> そこらへんにしておこう。でもまなぶの疑問は問題の解法の統一性を図るということでは面白い。今日の授業はそのことを考えてみようか。まず、次のそれぞれの三角形の $\angle A$ の二等分線 AD の長さを求めてみよう。



<アリス> (1)は $30°, 60°$ の三角比は求められるので三角形の面積比較による解法ですね。

$$\Delta ABD + \Delta ACD = \Delta ABC$$

これから、$AD = x$ とおくと、

$$\frac{1}{2}\times 7\times x\times \sin 30° + \frac{1}{2}\times 5\times x\times \sin 30° = \frac{1}{2}\times 5\times 7\times \sin 60°$$

$7x + 5x = 35\sqrt{3}$ より、$AD = \dfrac{35\sqrt{3}}{12}$

これは簡単に求められるわ。
<よしお> (2)を解きます。これは余弦定理を使うパターンですね。
まず三角形 ABC に余弦定理を用いると、

$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2\times 7\times 6} = \frac{5}{7}$$

ここで角の二等分線の性質より、$BD : CD = AB : AC = 7 : 5$ だから、

$$BD == \frac{7}{12}BC = \frac{7}{2}$$

次に三角形 ABD に余弦定理を用いると、$\cos\angle ABD = \cos B$ より、

$$AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2BD\cdot BA\cos\angle ABD = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7^2 - 2\times\frac{7}{2}\times 7\times\frac{5}{7} = \frac{105}{4}$$

以上より、$AD = \dfrac{\sqrt{105}}{2}$

(1)とは同じような問題でもまったく違った解法になりますね。
<先　生> 正確にいうと、(1)の方法は(2)では使えないけど(2)の方法は(1)で使える。だから統一性のある解答ということでいえば(2)の余弦定理を２回使う方法ということになる。
<かず子> でも(1)を(2)の方法でやったら更に面倒になるわ。まず余弦定理を用いて、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A = 49 + 25 - 2\times 7\times 5\times\frac{1}{2} = 39$$

$BC > 0$ より、$BC = \sqrt{39}$

これで(2)のように３辺の長さが与えられたから、このあとは $\cos B$ を余弦定理で求めて、さらにもう一度、三角

形 ABD に余弦定理を用いて AD が得られる。3回も余弦定理を使うことになってしまう。

<よしお> ただ⑵と異なっている条件は、$\angle BAD = 30^\circ$ が分かっているということ。だから $\angle BAD$ とその対辺 BD の関係で余弦定理を使うことはできる。

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$$

$AD = x$ とし、x の2次方程式を解くと余弦定理は2回しか使わない。

<アリス> こんなのはどうかしら。余弦定理で $\cos \angle ABD$ を求めれば、$\sin \angle ABD$ も分かるでしょ。三角形 ABD に正弦定理を用いると、

$$AD : BD = \sin \angle ABD : \sin \angle BAD$$

これでも余弦定理2回で済むわ。

<かず子> それなら、第一余弦定理っていうのがあったわよね。

$$AB = BD \cos \angle ABD + AD \cos \angle BAD$$

これを使うって手もあるわ。

<まなぶ> 何かだんだんと複雑になってきていない。僕はもう少しスッキリした解答が欲しかったのだけどね。

<かず子> これはまなぶの質問から始まった話題なのに自分は何も考えてないでしょ。文句ばかり言わないでよ。

<先　生> でも確かに 3 人の解法のどれもいつの間にか $\angle BAD = 30^\circ$ であることを用いた解法になっている。これでは⑵との統一的な解法にはならない。

<よしお> これ以外の解法があるということですね。

<先　生>⑵の問題を 面白い方法で解いてみよう。

$\angle BAD = \angle CAD$ であることに注目するんだ。

角の大きさが同じということは、三角形 BAD と三角形 CAD のその角に対する余弦の値が等しいということだ。すなわち、

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC \cdot AD}$$

角の二等分線の性質より、$BD = \frac{7}{2},\ CD = \frac{5}{2}$

これから、$AD = x$ とすると、

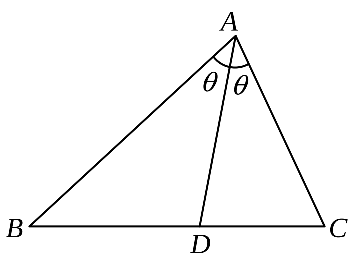
$$\frac{7^2 + x^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}{7} = \frac{5^2 + x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{5} \quad より \quad 7 + \frac{x^2}{7} - \frac{7}{4} = 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{5}{4}$$

よって、$\frac{2x^2}{35} = \frac{3}{2}$　以上より、$x = \frac{\sqrt{105}}{2}$

この解法は⑴においても同様にできることが分かるね。

<アリス> ほんと、スッキリと求められているわ。

<まなぶ> だまされちゃダメだよ。⑵は確かにスッキリ求められている。でも⑴にこの解法を用いてみると、BC の長さが与えられていないからここでまず余弦定理を使うことになる。そしてその後に三角形 ABD と三角形 ACD に余弦定理を使っているのだから結局回数でいえば 3 回余弦定理を使っているじゃないか。何も簡単になっていないでしょ。それなら三角比の解法に拘らなければ平面図形の性質で角の二等分線の長さを求める公式があったよね。



$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

これを用いれば⑵は、

$$AD^2 = 7 \times 5 - \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{105}{4}$$

これでいいんじゃない。

<かず子> あのね、ここでは三角比の手法で求めるということをみんなで考えているのでしょ。公式を使ってしまったら意味ないじゃない。ほんとにわがままなんだから。

<まなぶ> でもいままでの解法だって、角の二等分線の性質 $AB : AC = BD : DC$ を用いているだろ。どちらにせよ、図形の性質とコラボしていると思うけどな。

<先　生> 角を二等分するためには面積を2つに分けたり対辺を比で分けることはどうしても必要になってしまう。これは仕方がないことだ。そしてまなぶが言うように確かに余弦定理は3回用いている。でもここではそこから三角比の要素を直接求めているわけではなく間接的に利用しているだけなんだ。これは⑴で面積比較をするために三角形の面積を利用しているのと同じだ。だから計算もしやすくなっているだろう。

そしてこういった余弦の間接的な利用は他の角でも考えることができるのが分かるだろうか。

<よしお> 三角形 ABD と三角形 ACD についてですよね…、そうか、ホカクだ。

<まなぶ> ん？、何をホカクするの。

<アリス> それ、捕獲ではなく補角のことだと思いますけど。

<かず子> アリスに日本語を指摘されるようではまなぶもオシマイね。

$\angle ADB=\alpha$ とすると、$\angle ADC=180°-\alpha$

ということですね。

<先　生> これから、$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=\cos\alpha+\cos(180°-\alpha)=\cos\alpha-\cos\alpha=0$

三角形 ADB と三角形 ADC に余弦定理を用いると、

$$\frac{DB^2+DA^2-AB^2}{2DB\cdot DA}+\frac{DC^2+DA^2-AC^2}{2DC\cdot DA}=0$$

$$\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2+x^2-7^2}{\frac{7}{2}}+\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2-5^2}{\frac{5}{2}}=0 \quad より \quad \left(\frac{7}{2}+\frac{2x^2}{7}-14\right)+\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}x^2-10\right)=0$$

よって、$\frac{24}{35}x^2-18=0$　以上より、$x=\frac{\sqrt{105}}{2}$

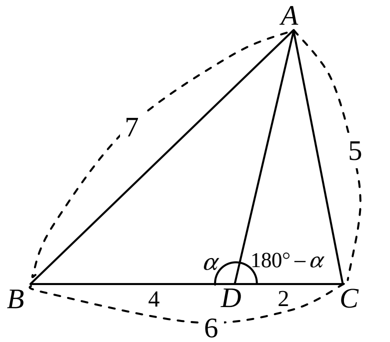
<まなぶ> ほとんど先ほどに同じ解法だ。

<先　生> そのようにみえるけどこちらの補角を利用した解法は発展性がある。

<アリス> あっ、私分かります。角の二等分線である必要がないということですね。頂点 A から対辺 BC に引いた線分はどんな比であっても補角の関係は成立しています。

<先　生> そのとおり。試しに辺 BC を $2:1$ の比に内分する点を D とするとき AD の長さを求めてごらん。

<よしお>　$BD:DC=2:1$ だから、



$$BD=\frac{2}{3}BC=4,\ DC=\frac{1}{3}BC=2$$

これから、

$$\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}+\frac{CD^2+AD^2-AC^2}{2CD\cdot AD}=0 \quad より、$$

$$\frac{4^2+x^2-7^2}{4}+\frac{2^2+x^2-5^2}{2}=0$$

これを解いて $AD=5$ です。

確かにこの解法だと応用ができますね。

<かず子>　まなぶ的な発想でいうと「柳の下に二匹目のドジョウを狙える」ということですね。

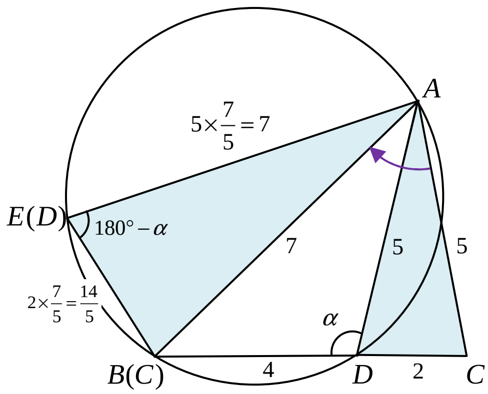
<まなぶ> なるほど、だからホカクなのか。

<かず子>　懲りないわね。

<先　生> 「柳の下にドジョウ」はいつも柳の下にドジョウがいるわけではないという意味だけどね。でもこの考え方ではさらに三匹目のドジョウを狙うこともできる。面白い変形をしてみよう。

三角形 ADC を頂点 A の回りに回転させて、右図のように辺 AC を AB に重ねる。そして $AB=AC$ となるように三角形 ADC を相似の三角形に拡縮する。

点 D を E に置き換えよう。ここで四角形 $AEBD$ をみると、$\angle AEB$ と $\angle ADB$ は補角の関係にあるから四角形は円に内接している。すなわち三角形の問題が円に内接する四角形の辺などの要素を求める問題に変わってしまう。



<まなぶ> 本当に何か面白くなってきた。車がロボットに変形するトランスフォーマーって映画あったよね。それみたいだ。

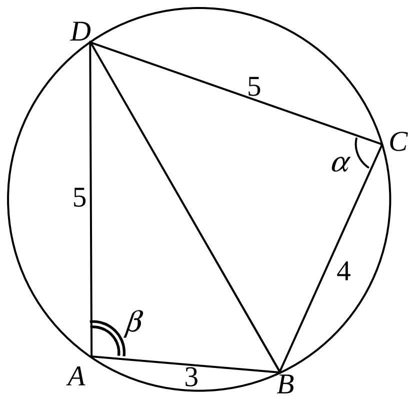
<かず子> でも先生、最初の三角形の問題に比べるとずいぶん面倒になってしまったように思うんですけど。

<まなぶ> 何言ってるんだい。そうではなく、逆に円に内接する四角形の問題は三角形の問題にトランスフォームできるというように考えてみろよ。

<アリス> そうですね。さすが最小努力の達人、まなぶですね。

<まなぶ> それ、褒めているのだろうか。

<先　生> では一つ問題を解いて確認してみようか。



> Ex）円に内接する四角形 $ABCD$ があり、
>
> $AB=3,\ BC=4,\ CD=DA=5$
>
> である。このとき対角線 BD の長さを求めよ。

みんなはどうアプローチする。

<かず子> $\angle BCD=\alpha,\ \angle DAB=\beta$ とすると、補角の関係から、

$$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

となります。$BD=x$ として余弦定理を用いると、

$$\frac{5^2+4^2-x^2}{2\times5\times4}+\frac{5^2+3^2-x^2}{2\times5\times3}=0 \quad より、\quad 3(41-x^2)+4(34-x^2)=0$$

これを解いて、$x=\sqrt{37}$

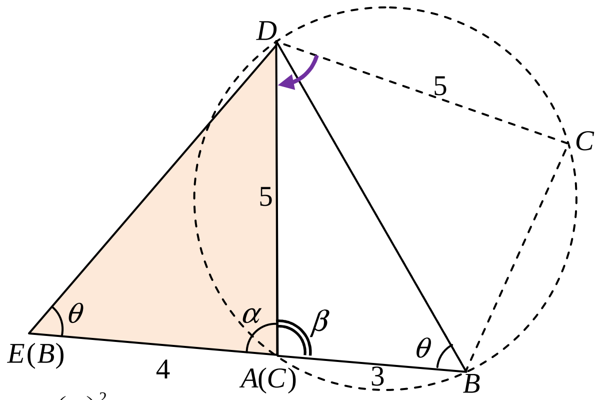
<よしお>最初の問題(2)の解法も使える。この図では $AD=CD$ だから、この２つの辺(弦)の円周角は等しい。

$\angle CBD=\angle ABD=\theta$ とすると、

$$\cos\theta=\frac{3^2+x^2-5^2}{2\times3\times x}=\frac{4^2+x^2-5^2}{2\times4\times x} \quad より、\quad 4(x^2-16)=3(x^2-9)$$

これを解いて、$x=\sqrt{37}$

<アリス>　私は三角形にトランスフォームしてみます。



三角形 DBC を頂点 D の回りに時計回りに回転させ、辺 CD が辺 AD に重なるようにします。$AD=CD$ だから拡縮はいらないですね。回転した頂点 B を E に置き換えて三角形 DEB へのトランスフォームは完了です。あとは DB を求めるんですけど…あれ、この三角形は $\angle DEA=\angle DBC$ だから二等辺三角形になります。なんだ、それなら簡単です。点 D から辺 EB に下ろした垂線の足を H とします。

$$EH=\frac{1}{2}EB=\frac{7}{2}、\ AH=AE-EH=\frac{1}{2}$$

これから、

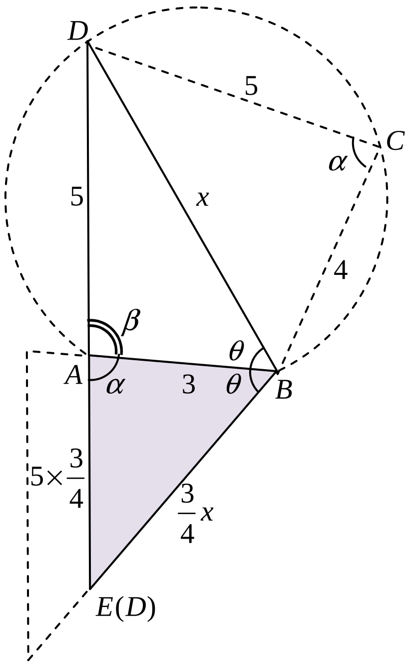
$$DB^2=BH^2+HD^2=BH^2+(DA^2-AH^2)=\left(\frac{7}{2}\right)^2+5^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=37$$

これを解いて　$DB=\sqrt{37}$

<まなぶ> へぇー、三角比を使わないで三平方の定理だけでできてしまうんだ。

アリス、美味しいところもっていったね。

それなら僕は別のトランスフォームだ。三角形 DBC を回転させるのは同じだけど、頂点 B の回りに反時計回りする。



辺 BC が辺 AB に重なるまで回転し、三角形 BCD を相似比 $\frac{3}{4}$ で縮小する。最後に頂点 D を E に置き換えると三角形 BDE ができあがってトランスフォーム完了。

さて、この三角形で $\angle DBA=\angle EBA$ だから、BA は $\angle DBE$ の二等分線になっている。これから角の二等分線の長さを求める公式を用いると、

$$BA^2=BD\cdot BE-AD\cdot AE$$

ここで、

$$AE=\frac{3}{4}CD=\frac{15}{4},\ BE=\frac{3}{4}BD=\frac{3}{4}x$$

これを代入して、

$$3^2=x\times\frac{3}{4}x-5\times\frac{15}{4}$$

これを解いて、$x=\sqrt{37}$

<かず子> まなぶは、どこまでも、どこまでもその公式に固執したいのね。

<先　生> まあ、公式を使えるように解法を引き寄せる工夫と努力をすることも大事といえるけどね。

<まなぶ> でもこのトランスフォームのように図形を動かして考察する方法っていままでなかった。

やっぱりアリスや僕のようにグローバルな視点に立っていないと面白さが分からないと思う。きっと二人の相性はいいんだろうな。

<かず子> まなぶはトランスフォームで一番大事なことを忘れているわ。

<まなぶ> 何のこと。

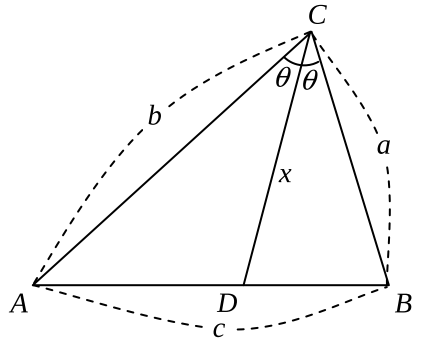
<かず子> トランスフォームは補角の関係がなければ２つの三角形はつながらないのよ。補角は互いに補いあう関係にあるということでしょ。

<先　生> なるほど。まなぶと誰がトランスフォームしても２つの三角形の辺は水平にならず尖ってしまい、さらに複雑な図形になるだけってことか。

<まなぶ> なに一人で納得してるんですか。

あとがき

角の二等分線の問題から始まり、四角形から三角形へのトランスフォームにまで話題が発展してしまいました。
本文の前半は、角の二等分線の長さを求める統一的な解法を余弦定理から考察しています。でもこれを面積比較から進めていくとどうなるでしょうか。



右図において三角形の面積比較をすると、

$$\Delta CAB = \Delta CAD + \Delta CBD$$

であることから、

$$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{2}bx\sin\theta + \frac{1}{2}ax\sin\theta \quad \cdots ①$$

ここで二倍角の公式より、$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
①に代入すると、

$$2ab\cos\theta = bx + ax$$

これから、

$$x = \frac{2ab}{a+b}\cos\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

ここで、三角形 ABC に余弦定理を用いると、

$$\cos 2\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

また、半角の公式より、

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{4ab}$$

(*)に代入すると、

$$x = \frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4ab}} = \sqrt{ab}\times\sqrt{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2} \quad \cdots(**)$$

これを整理すると、$CD = \dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$
三辺の長さだけで角の二等分線の長さは求められるのです。
これは、面積比較そのものが角の二等分線である条件を用いているので、角の二等分線の性質

$$CA:CB = AD:BD \quad \cdots\cdots ②$$

は必要ないことなるからです。したがってこちらの方がより三角比的なアプローチといえるでしょう。
また、さらに②を用いると、$AD:BD = b:a$ より

$$AD = \frac{b}{a+b}AB = \frac{bc}{a+b}, \quad BD = \frac{a}{a+b}AB = \frac{ca}{a+b}$$

(**)を変形して、

$$x = \sqrt{ab - ab\left(\frac{c}{a+b}\right)^2} = \sqrt{ab - \frac{bc}{a+b}\times\frac{ca}{a+b}}$$

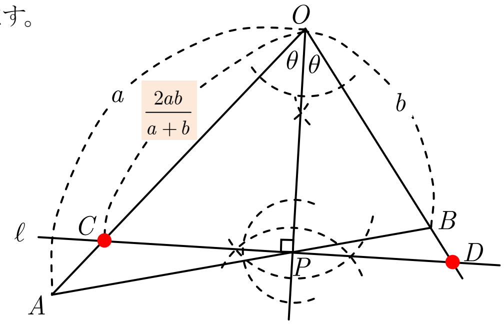
以上より、まなぶが譲らなかった公式、

$$CD^2 = CA\cdot CB - AD\cdot BD$$

が得られます。

ところで、(*)をみると $\dfrac{2ab}{a+b}$ は a と b の調和平均を表しています。すなわち、$\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{CD}{\cos\theta}$ とすると、(*)を用いて２辺の長さが a, b であるときにその調和平均の値を作図できることが分かります。

- $OA = a,\ OB = b$ である三角形 OAB を描く。
- $\angle AOB$ の二等分線を作図し、辺 AB との交点を求め P とする。
- 点 P を通り、OP に垂直な直線 ℓ を作図する。
- 直線 ℓ と OA、OB との交点をそれぞれ C, D とする。



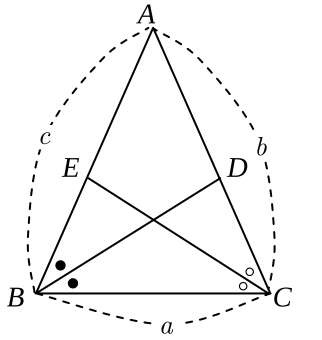
このとき、OC, OD が調和平均の値を示す長さになります。

右の作図から、$a \geqq b$ ならば、$a \geqq \dfrac{2ab}{a+b} \geqq b$ であることが分かります。

調和平均の作図はいろいろ知られていますが、角の二等分線と垂線だけでできるこの方法は、その中でも分かりやすい作図ではないでしょうか。

また、3辺の長さから角の二等分線の長さが求められることから、(**)を用いると有名なシュタイナー・レームスの定理を証明することができます。

三角形 ABC において、角 B,C の二等分線とその対辺 AC,AB との交点をそれぞれ D,E とする。このとき、 $BD=CE$ ならば、$AB=AC$ である。



「2つの内角の二等分線の長さが等しい三角形は二等辺三角形である」という性質ですが易しいようで難しい証明問題として知られています。

証明)　$AB=c, BC=a, CA=b$ とする。

$$BD^2=\frac{ca(a+b+c)(c+a-b)}{(c+a)^2}、\quad CE^2=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

$BD=CE$ より、

$$\frac{ca(a+b+c)(c+a-b)}{(c+a)^2}=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

よって、$c(a+b)^2(c+a-b)=b(c+a)^2(a+b-c)$

$$c(a+b)^2(c+a)-bc(a+b)^2=b(c+a)^2(a+b)-bc(c+a)^2$$

$$(a+b)(c+a)\{(c(a+b)-b(c+a)\}-bc\{(a+b)^2-(c+a)^2\}=0$$

$$(a+b)(c+a)\cdot a(c-b)-bc(2a+b+c)(b-c)=0$$

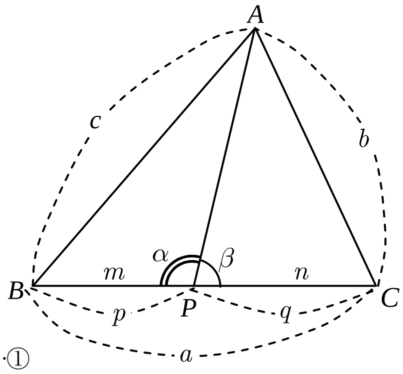
$$\therefore\quad (b-c)\{a(a+b)(c+a)+bc(2a+b+c)\}=0$$

これより、$b=c$ を得る。

以上より、$AB=AC$ である。

Q.E.D

さて、本文では、補角による解法を用いると頂点から対辺に引いた線分の長さを求められることを説明していますがこの関係を整理してみましょう。



右図のように、

$AB=c,\ BC=a,\ CA=b$　そして　$BP=p,\ PC=q$ 、$AP=x$

とおきます。$\angle BPA=\alpha,\ \angle CPA=\beta$ とすると、$\alpha+\beta=180°$ より

$$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

三角形 ABP と三角形 ACP に余弦定理を用いると、

$$\frac{p^2+x^2-c^2}{2px}+\frac{q^2+x^2-b^2}{2qx}=0$$

$$q(p^2+x^2-c^2)+p(q^2+x^2-b^2)=0$$

よって、

$$x^2=\frac{b^2p+c^2q-pq(p+q)}{p+q}=\frac{b^2p+c^2q}{p+q}-pq \quad (なお、\ p+q=a)\ \cdots①$$

ここで、$p=q$ とすると、

$$x^2=\frac{b^2p+c^2p}{2p}-p^2=\frac{b^2+c^2}{2}-p^2$$

$b^2+c^2=2(x^2+p^2)$ であるから、

$$AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$$

これから、中線定理が得られます。

また、$c:b=p:q$ とすると、$bp=cq$ より、

$$x^2=\frac{b(bp)+c(cq)}{p+q}-pq=\frac{b(cq)+c(bp)}{p+q}-pq=bc-pq$$

$$AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$$

すなわち、角の二等分線の長さの公式が得られます。

さらに、$p:q=m:n$ とすると、

$$x^2=\frac{p}{p+q}b^2+\frac{q}{p+q}c^2-pq=\frac{m}{m+n}b^2+\frac{n}{m+n}c^2-pq$$

$$AP^2=\frac{nAB^2+mAC^2}{m+n}-BP\cdot CP \quad \cdots ②$$

ここで、$pn=qm$ であることから、

$$pq=\frac{(m+n)pq}{m+n}=\frac{(mq)p+(np)q}{m+n}=\frac{np^2+mq^2}{m+n}$$

以上より、

$$AP^2=\frac{nAB^2+mAC^2}{m+n}-\frac{nBP^2+mCP^2}{m+n} \quad \cdots ③$$

これら①②③の性質をスチュワートの定理といいます。

スチュワートの定理の証明はベクトルで考えると次のようになります。

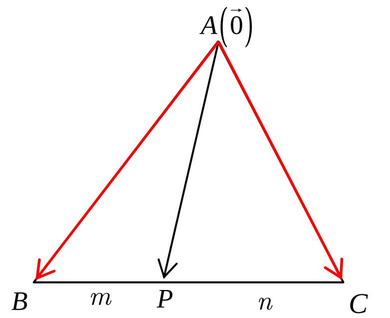
三角形ABCにおいて、

$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とします。

このとき、辺BCを$m:n$の比に分ける点Pの位置ベクトルは、

$$\overrightarrow{AP}=\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$$

これから、$\left|\overrightarrow{AP}\right|$ は容易に求めることができます(斜交座標の小手技参照)。



本文の後半は、円に内接する四角形を補角の関係を用いて三角形にトランスフォームしています。

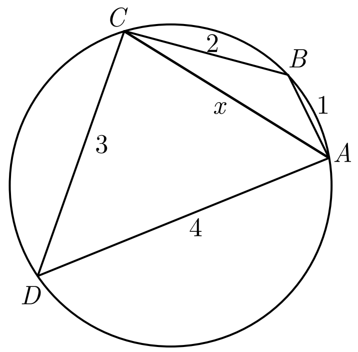
すなわち、四角形は三角形の問題になり、その解法も三角比から平面幾何(スチュワートの定理)、そしてベクトルの問題にトランスフォームしていくのです。

でもだからといって、円に内接する四角形をベクトルで解こうとはしないでしょう。図形を移動するという手法が面白いというだけなのです。例えば、センター試行テストでも出題された次の問題を解いてみましょう。

Ex) 円に内接する四角形$ABCD$があり、

$$AB=1,\ BC=2,\ CD=3,\ DA=4$$

である。このとき対角線ACの長さを求めよ。



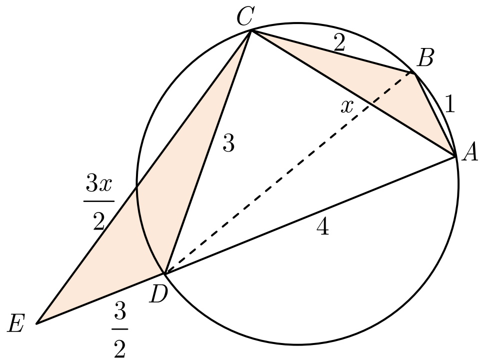
解法は、$\angle CDA=\alpha$ と $\angle CBA=\beta$ が補角の関係から、

$$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

より求められます。

これをトランスフォームしてみましょう。

三角形CABを頂点Cの回りに回転させ、CBがCDに重なり長さが等しくなるように相似比$\frac{3}{2}$で拡縮して図の三角形CEDを作ります。



$CA=x$ とすると、$CE=\frac{3}{2}CA=\frac{3}{2}x$、$ED=\frac{3}{2}AB=\frac{3}{2}$

$\angle CDE=\alpha,\ \angle CDA=\beta$ とすると、補角の関係より、

$$\cos\alpha+\cos\beta=0$$

よって、

$$\frac{\left(\frac{3}{x}\right)^2+3^2-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2\times\frac{3}{2}\times 3}+\frac{3^2+4^2-x^2}{2\times 3\times 4}=0$$

これを解いて $x^2=\frac{55}{7}$ 　以上より $AC=\sqrt{\frac{55}{7}}$

さて、この解答はずいぶん無駄なことをしているのがわかると思います。トランスフォームをしなくても、円に内接する四角形で補角の関係を使えば済むことなのです。スチュワートの定理では直接求めることができますが、角の二等分線ほど分かりやすい公式ではありません。結局トランスフォームは面白いだけの「遊びの解法」ということになってしまいます。

しかし、問題でさらにもう一つの対角線BDの長さを要求している場合はどうでしょうか。

これを求めるにはBDで分けられた２つの三角形BCDと三角形ABDでまた同じように補角の関係を使う、あるいはACが求められたことより三辺の長さが決定した三角形ABCから外接円の半径を計算し正弦定理でBDを求めるといった解法が考えられるでしょう。

ではこれを三角形にトランスフォームした図形でみるとどうでしょうか。

$\angle ECD = \angle ACB$ であり、$\angle DCA$ を共有することから、$\angle ECA = \angle DCB$。
また、弦 CD に対する円周角より、$\angle CBD = \angle CAD$
これから、$\Delta CEA \backsim \Delta CDB$ となります。
すなわち、トランスフォームでできた三角形 CEA は、元の四角形 $ABCD$ が対角線で分けられた三角形 CDB に相似になっているのです。
そしてこれから、

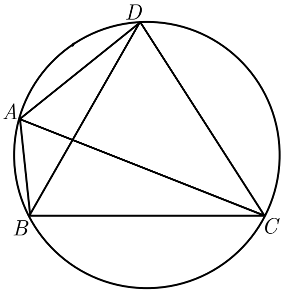
$$CB : BD = CA : AE$$

以上より、

$$BD = \frac{CB \cdot AE}{CA} = 2 \times \frac{11}{2} \times \sqrt{\frac{7}{55}} = \sqrt{\frac{77}{5}}$$

簡単な相似比から求められます。
そしてこれは、円に内接する四角形の４辺の長さと１つの対角線の長さが与えられたとき、残りの対角線の長さが求められたということであり、これは次の定理の証明が保証されたということなのです。

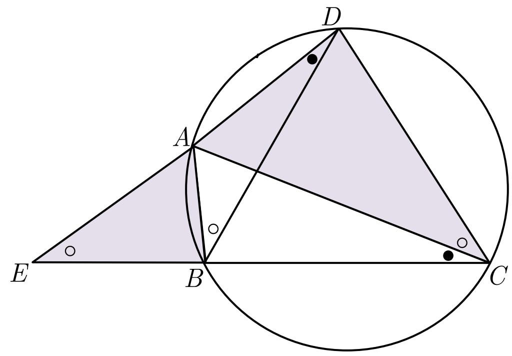
> 円に内接する四角形 $ABCD$ において、
> $$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$
> が成立する。



２組の向かい合う辺の積の和は対角線の積に等しいこの性質を「トレミーの定理」といいます。
トレミーの定理の幾何学的な証明は巧妙な補助線による美しい解法が知られており「補助線の幾何学」を代表するものです。
その補助線は、例えば $\angle CDB > \angle ADB$ のときは、$\angle ADB = \angle CDE$ となる点 E を対角線 AC 上にとりますが、$CDB < \angle ADB$ のときは、$\angle CDB = \angle ADE$ となる点を AC 上にとり、場合分けが必要になります。
これをトランスフォームした三角形で証明してみましょう。

証明)
三角形 ACD を頂点 A の回りに回転し、AD の長さが AB の長さに等しくなるように相似比 $\frac{AB}{AD}$ で拡縮して図の三角形 AEB を作ります。補角の関係から３点 E, B, C は一直線上にあり、

$$EB = CD \times \frac{AB}{AD}$$



ここで、$\angle ABD = \angle ACD = \angle AEB$
また、$\angle ADB = \angle ACE$（円周角）
2 角が等しいことより、$\Delta AEC \backsim \Delta ABD$
これより、

$$AD : BD = AC : EC = AC : \left(\frac{AB \cdot CD}{AD} + BC \right)$$

$$\therefore \quad AC \cdot BD = AD \times \left(\frac{AB \cdot CD}{AD} + BC \right) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

以上より、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Q.E.D

場合分けを必要としないトレミーの定理の証明ができました。
遊び心から始めたトランスフォーメーション(変換ではなく変形)解法の思いがけない副産物です。