曲線外から引いたグラフの接線の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○傾き模様は如何ほどに？

<先　生> まず，次の問題を普通に解いてみようか．

> ex) 曲線　$f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$　に曲線外の点 P(3,1) から引いた接線の方程式を求めよ．

<まなぶ> なんか引っかかる言い方だよな．フツーってことは，フツーに微分して，フツーに接線の公式に代入して求めるってことですか．

<先　生> そう，フツーにやって，フツーに．

<よしお> なんか二人のやりとりはもどうかと思いますけど．とにかく，まず微分をして接線の傾きを求めます．「ビブンのことはビブンでしろ」っていうし．

<かず子> あれっ，どうしたの，よしお，フツーじゃないよ．へぇーっ，フツーじゃない，よしおもいるんだ．

<まなぶ> なにを訳の分からんことを……．

<アリス> それは，「微分のことは自分でする」ってことですか，それとも「自分のことは自分で」，「微分のことは微分で」，あーっ，なんかコンガラカッテ……．

<よしお> けっして駄洒落をいったつもりではないから気にしないで，まあ，まなぶの場合は「自分のことは自分で」ということになるだろうけどね．

<まなぶ> 駄洒落はとにかくとして，なんか皮肉には聞こえるけどね．とにかく微分すると，

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}$$

<かず子> 次に接点の座標を A(a, f(a)) とすると，接線の方程式は，

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

この公式に代入すると，

$$y=-\frac{1}{(a-3)^2}(x-a)+\frac{2a-5}{a-3}\qquad\cdots\cdots(*)$$

あとは，与えられている点 P を代入して…．

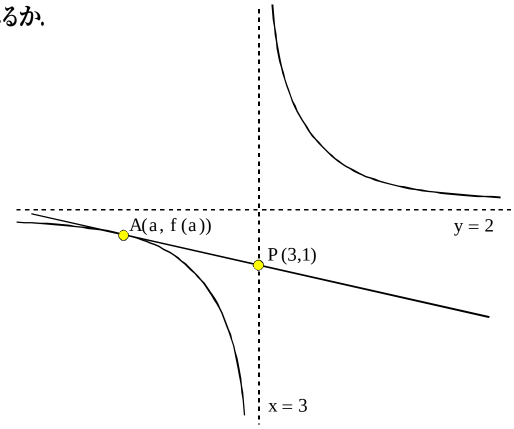
<よしお> ちょっと待って．その前に式の整理をしなくては．以前，3次関数の接線を求めたとき，接線を表す直線を標準形に直したほうが問題を解くときに考えやすかったと思うんだ．

<まなぶ> そういえば，そんなこといってたな．ちょっと面倒そうだけど，整理してみるか．

$$y=-\frac{1}{(a-3)^2}x+\frac{a}{(a-3)^2}+\frac{2a-5}{a-3}$$

$$=-\frac{1}{(a-3)^2}x+\frac{a+(2a-5)(a-3)}{(a-3)^2}$$

$$=-\frac{1}{(a-3)^2}x+\frac{2a^2-10a+15}{(a-3)^2}$$



<かず子> そして最後に点 A(3,1) を代入して，

$$1=\frac{-3}{(a-3)^2}+\frac{2a^2-10a+15}{(a-3)^2}$$

分母を払って，

$$(a-3)^2=2a^2-10a+12$$

$$a^2-4a+3=0$$

因数分解できるわ．

$$(a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore\quad a=1,3$$

<アリス> この a の値を接線の方程式に代入するんですね．あっ，でも $a=3$ のときは分母が 0 になるからだめだわ．

だから，$a=1$ を代入して，

$$y=-\frac{1}{(-2)^2}x+\frac{2-10+15}{(-2)^2}$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

<まなぶ> ということで，先生，フツーに求めましたよ．

<先 生> いいですね．それでは次にもっと解法の手順をフツーに考えてみようか．

<かず子> えっ，なにか，この解法にフツーでないところがあるってことですか．

<先 生> 解法はフツーだよ．解答の手順をフツーにしてみようということ．

<まなぶ> なんかよく分からないな．フツーじゃない先生がいっていることだから，フツーの基準がよくわからない．

<先 生> まなぶも似たようなものだけどな．

<よしお> 先生，今の発言はフツーにフツーじゃないってことを肯定していますよ．

<かず子> 先生，話を進めてください．

<先 生> そうだね．まず，この問題で接線を求めるために必要なものはなんだろう．

<まなぶ> それはもちろん，接線の傾きに決まってる．

<先 生> 傾きを求めるだけであれば，かず子がつくった(*)の式で十分であり，何もこの式を整理する必要はない．ためしに，(*)の式に点 P を代入して a の値を求めてごらん．

<かず子> はい，代入すると，

$$1=\frac{-1}{(a-3)^2}(3-a)+\frac{2a-5}{a-3}$$

次に，分母を払って整理すると，

$$a-3=1+2a-5$$

あれっ！，a の2次方程式にならないわ．

$$a=1$$

がすぐに求められる．なんか，こっちの方がラクだわ．

<アリス> でも，この方法だと，このあと(*)に a の値を代入して接線を求めるのが少し面倒ですね．

<よしお> そうでもないかもしれないよ．なんとなく，先生が言おうとしていることが分かってきた．この問題では傾きだけを求めれば十分ということをいいたいのですよね．

<先 生> その通り．この問題では必要なものは傾きだけなんだ．

<まなぶ> でも，傾きが分かったって，直線の方程式を求めるには y 切片を計算しなくちゃ……，あっ，そうか，y 切片である必要はないんだ．点 P も使えるってことですよね．

<かず子> そうか．直線は，傾きと直線上の点が与えられていれば決定するものね．そうすると，傾きは，

$$f(1)=\frac{-1}{(1-3)^2}=-\frac{1}{4}$$

だから，点 $P(3,1)$ を通る直線と考えて，

$$y=-\frac{1}{4}(x-3)+1$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

<アリス> なんか少しは計算がラクになったような気がする．でも先生，そうすると，(*)の式って結局，傾きを求めるためだけに作ったってことになりますよね．

<まなぶ> そうだよね．大仰に式を作っても，傾きがでてしまったら，後は点 P を使って接線をだしているんだから，せっかく作った式がなんかとってもモッタイナイよな．

<アリス> いい言葉ですね．日本のモッタイナイって考え方，わたし，とっても好きです．

<先 生> モッタイナイかどうかは別にして，まなぶのいうように，この解答にはまだ無駄があり，解答の手順はフツーではないんだ．もう少しスリム化できる．もう一度確認するけど必要なのは傾きだ．そこのところを焦点にして考えてみよう．

<よしお> (*)の式は，a の値を求めるための方程式を作るために利用されているわけですよね．ということは，微分係数以外に傾きを表す式が分かれば，関係式が作れますね……，そうか，ここでも点 P が使えるぞ．

<まなぶ> 僕も分かった．点 P と接点 A を結ぶ直線の傾きを考えればいいんだ．

$$f'(a)=PA\text{の傾き}$$

ってことだ．

$$PA\text{の傾き}=\frac{f(a)-1}{a-3}=\frac{\frac{2a-5}{a-3}-1}{a-3}=\frac{a-2}{(a-3)^2}$$

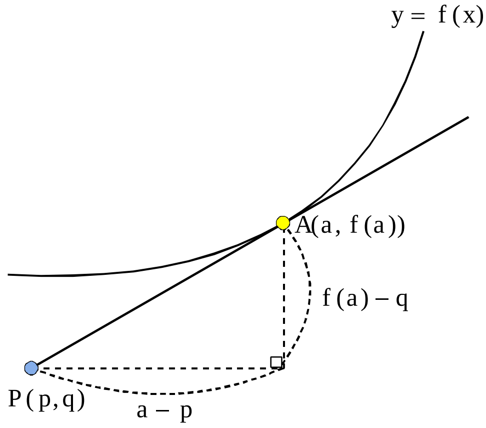
これから，

$$f'(a)=-\frac{-1}{(a-3)^2}=\frac{a-2}{(a-3)^2}$$

分子をみるとすぐに解けるぞ．

$$-1=a-2$$

$$\therefore \quad a=1$$



<かず子> 傾きだけを考えていったら, なんかとっても簡単に求められたわ.
<先　生> 次の問題で, 確認してみよう.

ex) 曲線　$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$　に原点から引いた接線の方程式を求めよ.

<かず子> まず, よしおの言うように, ビブンのことはビブンでして,

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

よって, 接点を $A(a,\ f(a))$ とすると, 接線の傾きは,

$$f'(a)=\frac{e^a(a-1)}{a^2}$$

<アリス> 次に接線をこの段階で求めてしまうのはモッタイナイから, 直線OAの傾きを考えて,

$$f'(a)=\frac{e^a(a-1)}{a^2}=\frac{\frac{e^a}{a}-0}{a-0}=\frac{e^a}{a^2}$$

よって,

$$a-1=1$$
$$\therefore\quad a=2$$

となります. だから, 傾きは

$$f'(2)=\frac{e^2}{4}$$

以上より, 原点を通ることより接線の方程式は,

$$y=\frac{e^2}{4}x$$

となります. すごくモッタイナクナイ解答ですね.
<先　生> 曲線外から引いた接線に関する問題を解くときに, 何を求めなければならないかと考えたら「かたむき」っていうことに気がつくはずだ. その方向性, すなわち「考え方の傾き加減」を見失わなければ自然と解答がみえてくる.
人の心もそうだろ. 相手がどういう想いに傾いているかってことをちょっと考えてみれば見えなかったものが見えるようになるものだ. 男性諸君, 分かるだろうか.
<まなぶ> フツーでない先生の傾き加減が恐ろしくて考えられないフツーの僕らの考え方の傾きを分かって欲しいですね.

<あとがき>

この小手技は実にフツーのことをやっている.
$y=f(x)$ に曲線外の点 $P(p,q)$ から引いた接線の方程式は, 接点を $A(a,\ f(a))$ とすると,

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

この式に点 P を代入すると,

$$q=f'(a)(p-a)+f(a)\qquad\cdots\cdots(*)$$

$p\neq a$ であるから, 変形して,

$$f'(a)=\frac{f(a)-q}{a-p}\qquad\cdots\cdots(**)$$

となり, フツーに, 本文で扱った式に帰着できることになる.
本文では上の(*)の式は必ずしも必要なのかといっているだけであり, これを省き, 接線の傾きだけを追っていけば, 思考のスリム化ができ, (**)の式に辿り着く. その筋道をフツーにしたということである.
曲線外の点が与えられた場合の問題にはこの方法が有用であることが分かる.

ex) .曲線 $y=e^{-x^2}$ に点 $P(p,0)$ を通る接線が２本引けるとき,　p の値の範囲を求めよ.

解)　$y=f(x)$ とおき, 接点を $A(a,\ f(a))$ とする.

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

より, 直線 PA の傾きを考えて,

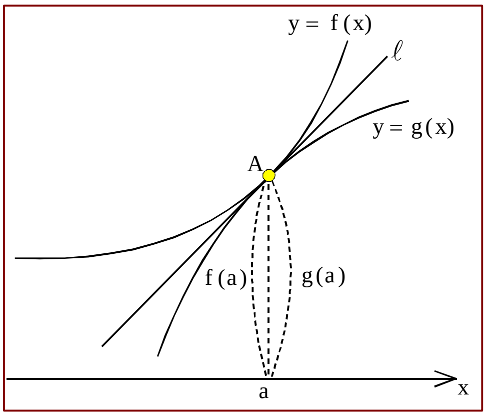
$$-2ae^{-a^2}=\frac{e^{-a^2}-0}{a-p}$$

$e^{-a^2}>0$ であるから, $-2a(a-p)=1\quad\therefore\quad 2a^2-2pa+1=0$
a の2次方程式の判別式を D とすると,

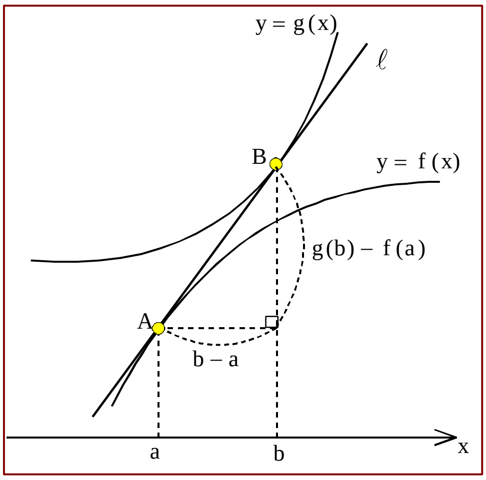
$D/4 = p^2 - 2$
異なる2つの実数解をもてばいいから $D>0$.
これより, $p<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<p$ ……(答)

共通接線問題にこの方法を応用してみよう.
2つの曲線 $y=f(x),\ y=g(x)$ の共通接線は, 2つ場合が考えられる.

(A)2曲線が接する
接点Aの x 座標を $x=a$ とすると,
$$f(a)=g(a)$$
また, 点Aの接線の傾きを考えて,
$$f'(a)=g'(a)$$



(B) 2曲線がともにある直線に接する
2曲線 $f(x), g(x)$ の接点をそれぞれ $A(a, f(a)),\ B(b, g(b))$ とすると,
それぞれの接線の方程式は,
$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$y=g'(b)(x-b)+g(b)$$
この2つの接線は一致するから, 傾きと y 切片を比較して,
$$f'(a)=g'(b) \quad \cdots\cdots ①$$
$$f(a)-af'(a)=g(b)-bg'(b) \quad \cdots\cdots ②$$



(A),(B)をみると, (A)の条件が整理されているのに対し, (B)はずいぶん分かりにくい.
(B)の条件を本文のように考えると, 接線の傾きは, 直線ABの傾きに等しいことより,
$$f'(a)=g'(b)=\frac{f(b)-g(a)}{b-a}$$
とまとめられ, 式が図形的な意味をもってくる. この式は①と②をまとめて整理すると得られるが, 傾きだけを追っていけば自然と導かれるのである.

ex) 2曲線 $f(x)=e^x,\ g(x)=\log x+2$ に共通な接線の方程式を求めよ.

解) $f(x),\ g(x)$ の接点を, それぞれ $A(a, f(a)), B(b, g(b))$ とする.
$$f'(x)=e^x,\ g'(x)=\frac{1}{x} \quad より$$
$$e^a=\frac{1}{b}=\frac{(\log b+2)-e^a}{b-a}$$
$$b=e^{-a} \quad より \quad e^a=\frac{\log e^{-a}+2-e^a}{e^{-a}-a}$$
$$\therefore\ e^a(e^{-a}-a)=-a+2-e^a$$
$$1-ae^a=-a+2-e^a$$
$$(e^a-1)(1-a)=0$$
$$\therefore\ a=0,1$$
$a=0$ のとき, $f'(0)=1$, 接点 $A(0,1)$ より, 接線は $y=x+1$
$a=1$ のとき, $f'(1)=e$, 接点 $A(1,e)$ より, 接線は $y=ex$ ……(答)

ところで, 本小手技の登場人物の相関図だが, 本文には, 今後を予想させるkey-wordとなる言葉を文中に潜ませてある.
よしおの「ビブンのことはビブンでしろ」
よしおに優等生のイメージを抱いていたかず子の気持ちが少し揺らぐ. もっとも, これは高木貞治先生の有名な言葉であり, 先生はけっして冗談や駄洒落としていった訳ではない. よしおもどこかでそのことを知っていて引用しただけであり, よしおが変わったわけではないのかもしれない.
まなぶの「モッタイナイ」
アリスもまたこの言葉でまなぶの中に日本をみる. まなぶの「モッタイナイ」は, 単にケチであるというだけかも知れないのだが, アリスはそのことを知る由もない.
これらの言葉により, 二人の乙女の心の傾き加減は微妙に変化していく. 今後, 2人の男子に対する見方により傾きは共通接線となるのか, はたまた…….