解の配置問題のちょっとした小手技

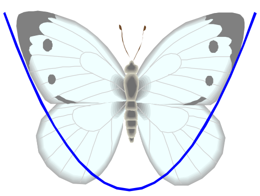
札幌旭丘高等学校　中村文則

てんじくチョウを捕まえろ

<先　生> 今日の授業は、チョウの捕まえ方の勉強です。
<まなぶ> やったー。先生、どこへ行くの。
<先　生> 何か勘違いしてないか。野外観察をするわけではないぞ。
数学を勉強するに決まっているだろ。
<アリス> でも先生はチョウの捕まえ方っていいましたよね。チョウは蝶々のことではないのですか。
<先　生> そう、バタフライとかパピヨンとかいった蝶のこと。もっというと「てんじくチョウ」って種類の蝶。
<まなぶ> てんじくって、インドの天竺ですか。
<かず子> インドの新種の蝶か何かが数学とどう関係するのかしら。
<先　生> だんだん話が脱線していきそうだ。まず、次の問題をみてごらん。

> ２次方程式 $x^2+ax+a+3=0$ の２つの解がともに正であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

<よしお> あれっ、これは、解の配置問題ですね。
<先　生> そう、よくある問題だ。どう解く。
<かず子> アプローチはいろいろ考えられるわね。２次方程式の解と係数の関係を用いてやってみます。
２解を α, β とすると、$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=a+3$
２解はともに正より、$\alpha>0,\ \beta>0$。これから、
$\alpha+\beta>0$、$\alpha\beta>0$
これから、$-a>0,\ a+3>0$　$\therefore$　$-3<a<0$
これが a の値の範囲……。
<まなぶ> ちょっとまった。かず子、実数解の確認が抜けてるよ。
<かず子> そうだった。解と係数の関係を使うといつも判別式のこと、わたし、忘れちゃうのよね。
$x^2+ax+a+3=0$ の判別式を D とすると、
$D=a^2-4(a+3)=a^2-4a-12=(a-6)(a+2)$
実数解をもつから、$D\geqq 0$。よって、$a\leqq -2,\ 6\leqq a$
これから、共通範囲を求めて、　$-3<a\leqq -2$
<先　生> そうだね。かず子の方法も確かにひとつのアプローチだけど、でも、この方法は解の配置が複雑な場合はちょっと使えないよね。それとかず子がいっていたように判別式の見落としも多い。そこで、ここでは他の方法で考えてみよう。
<よしお> ということは、放物線と x 軸の関係を用いる方法ですね。
<先　生> そう、放物線だ。方程式や不等式は x の方程式を関数とみることでグラフ問題として解決できたよね。
$f(x)=x^2+ax+a+3$
とおくと、a の変化によって $f(x)$ は生き物のように動き出す。この $f(x)$ と x 軸との交点の関係を調べていくんだったよね。
<まなぶ> ちょっと、まって先生。嫌な予感がしてきた。まさか、放物線を蝶とみなすって考えてないよね。
<先　生> 察しがいいね。その通りだ。放物線って蝶に似てるだろ
<生徒達> ……………



<かず子> 先生、それはちょっと無理があるかと思うんですけど。
<まなぶ> どこをどうみれば放物線が蝶になるのさ。
<先　生> 似てるだろ(図に描く)。ほら、なっ、この曲線の曲がり方、似てるだろ。文句ないよな。似てるよな！。
<アリス> わっ、わたし、なんとなく見えてきた。
<まなぶ> 妥協したら駄目だよ。ここはピシッと言わないとあとあと大変になるんだから。
<よしお> まあ、とにかく話の続きを聞こうよ。
<先　生> a の値によってパタパタ飛び回るこの蝶の捕まえ方が解の配置の仕方と同じなんだ。
<まなぶ> いよいよ分かんなくなってきた。
<先　生> $f(x)=x^2+ax+a+3$ を蝶に見立てる。
<かず子> 方程式や不等式はグラフに、グラフは方程式や不等式にするというまなぶ的先天性天邪鬼思考ね。
<先　生> そう。これで、$f(x)$ という名前の蝶が飛び始めた。
<まなぶ> 「そう」って、先生、納得しないでよ。

<先　生> 先に進めるよ。次にこの蝶の種類を調べよう。 $f(x)$ を標準形に変形する。

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a+3$$

だから、 $f(x)$ は

軸 $x=-\dfrac{a}{2}$ で、頂点 $\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}+a+3\right)$ である下に凸の放物線(蝶)

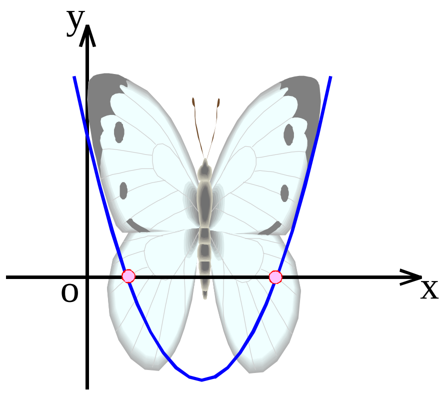
だね。頂点が変化することで、蝶は自由に飛び回るけど、ではこの蝶を捕まえるとしたらアリスならどうする。

<アリス> 蝶々が花弁の止まるのを待って、そうっと近づいて捕ります。

<まなぶ> 僕なら追い掛け回して弱ったところを帽子みたいなのでヒョイってすくって……

<先　生> ムシムシ！

<まなぶ> まさかシャレ？



<先　生> アリスがいったように止まるのを待つってことは、蝶々の位置を、花弁を基準にして大まかに押さえるってことだ。同じことを、放物線でも考えてみる。この場合、花弁を点とみなしてみよう。

<まなぶ> まさか、今度は花弁は点に見えるなっていうんじゃないでしょうね。

<先　生> 見えるわけない。花弁を点とみなすといっているだろ。この点の周囲に蝶がいるように動きを制約するんだ。

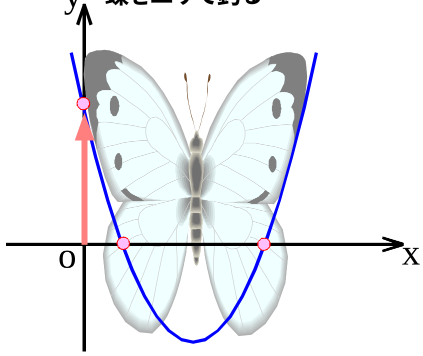
<まなぶ> 「見える」と「みなす」の違いがよく分からないけど、で、どうするのですか。

<先　生> 方程式の解は x 軸との交点の x 座標を考えればいい訳だから、まず、2解がともに正となるように、蝶すなわち放物線を置いてごらん。

<かず子> はい、図のような配置になります。

<先　生> でも、蝶だってジッとしていたくない。そのうち飛んでいってしまうから、なるべくこの位置から動かないようにしたい。どうすればいい。まなぶに置き換えて考えてみると分かりやすい。

蝶をエサで釣る



<かず子> あっ、それなら簡単だわ。まなぶの好物を目の前においておけばいいわ。

<先　生> そう、その通りだ。

<まなぶ> 先生、「そう、そう」って、いちいち相槌を打つの止めて貰えませんか。

<先　生> とにかく、蝶の動きを抑制するために、エサを置く必要がある。それが花弁の中心にある花の蜜ということだね。では、その場所はどこにあるかを考えよう。そこで解の配置の条件を読むと、「2解がともに正」すなわち、ともに0以上ということだから、この0がチェックポイントになる。

<よしお> あっ、分かります。 $x=0$ のときの y 座標、すなわち y 切片が正になればいいということですね。

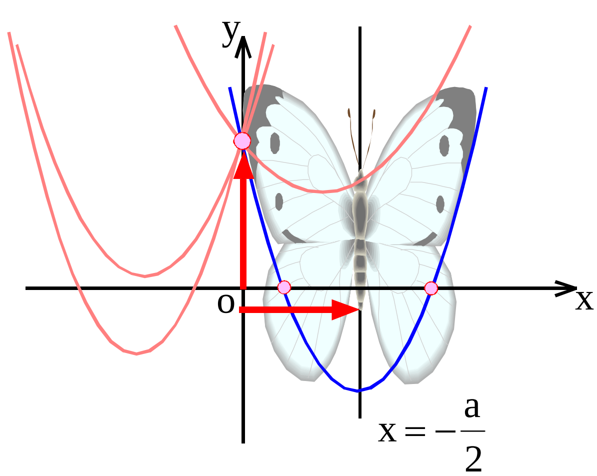
<先　生> 正解。このような点に蜜をおいて蝶の動きを監視すればいいんだ。式で表現すると、

$f(0)>0$ 　よって、 $f(0)=a+3>0$ 　より、 $-3<a$

<アリス> でも先生、これだけでは蝶はまだまだ動けますよね。

<先　生> もちろん。蝶は蜜の回りを飛べるわけだから、2解とも負になるような位置にだって止まることができる。まだまだ不十分だね。さあ、そこでパタパタ動き回る蝶の行動範囲を狭めてやる。どうすればいいだろう。誰かに置き換えて考えるといいかもしれない。

蝶の左右方向の動きを封じる



<まなぶ> 先生、誰かってしっかり僕の名前がルビで振られているような気がするんだけど。

<かず子> 違うわよ。先生は、パタパタといったのであってバタバタではないわ。でもどうすればいいんだろう。

<先　生> ヒントは蝶はどの方向にバタ、じゃなくてパタパタする。

<アリス> 右へいったり左へとか、上へいったり…、ひとつの方向に絞って狭めていけばいいのでしょうか。

<よしお> ということは、左右と上下に絞るということですね。

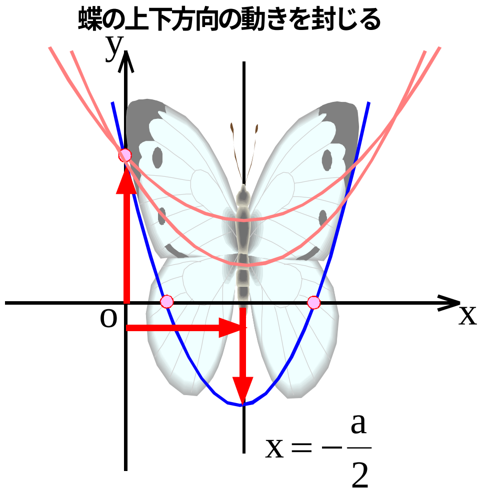
<まなぶ> なるほど。では、まず左右の方向を封じ込めるならば……そうか。軸の位置だ。

<先　生> 解がともに負の位置にならないように、軸の位置を y 軸の右側、すなわち正にすればよい。これによって、蝶の左右の動きが封じられことになる。式で表すと、軸の方程式は、

$x=-\dfrac{a}{2}$ 　だから　 $-\dfrac{a}{2}>0$ 　すなわち　 $a<0$

でも、これだけでは不十分だということはもう分かるね。

<かず子> はい、まだ、上下の方向に動けるから、x 軸に留まらないで、上空に飛んでいる場合も考えられます。
<先　生> では上下の方向はなんで制約すればよい。



<よしお>　左右は x 軸方向だから上下は y 軸方向ですね。この場合は、y 座標に関係するのは頂点の y 座標ということでしょうか。
頂点の y 座標は、x 軸に接するか下方にあればいいから、

$$-\frac{a^2}{4}+a+3\leqq 0 \quad a^2-4a-12\geqq 0 \quad より、$$
$$a\leqq -2,\ 6\leqq a$$

ということですね。
<アリス> 上下、左右の方向に封じ込めたらもう蝶は身動きできないわね。
<先　生> 正確にいうと、少しは動ける。そうでないと a の値の範囲は求まらない。身動きできないようにしたいものもあるけどね。どれだけ動けるか共通範囲を求めてごらん。
<まなぶ> その身動きできないっていうのにもルビ振られていない？
<かず子> ムシムシ。点と軸と頂点の位置からそれぞれ

$-3<a$　…①　$a<0$　…②　$a\leqq -2, 6\leqq a$　…③

だから、共通範囲は、

$$-3<a\leqq -2$$

これが蝶の動ける範囲ですね。
<まなぶ> いま、かず子、テンとジクとチョウテンっていったよな。テン・ジク・チョウ、テンジクチョウ……先生、悪い冗談だよね。いくらなんでもこのレベルの親父ギャグは誰にも受けないよ。
<先　生> 蝶を点でピンポイントに集め、軸で左右方向に追い込み、頂点で上下方向にしか動けないようにする。そうして、まなぶ流に帽子を網にして、ひょいってやる。実に効率的な捕獲方法だろ。何の問題もないよな。
テン・ジク・チョウ　みんなで唱えよう。はい、テン・ジク・チョウ
<まなぶ> なんかテンジクチョウに「一緒に唱えろ」ってルビ振ってないですか、先生。
<アリス> わたしも何か、そう思えてきた。
<よしお> てんでジョークにならない口調、略してテンジクチョー
<かず子> わーっ、よしおまで壊れてきた～！

あとがき

ちょっとふざけ過ぎたかもしれません。

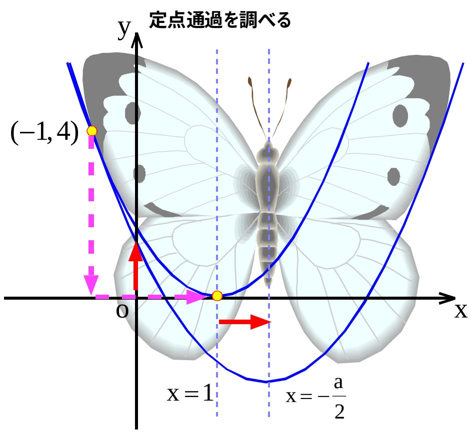
放物線を蝶に見立てるなんてやはり無理があります。でも無理を承知で押し通す。そういう遊び心もたまにはあっていいと思うのです。解の配置は大事な問題だし、放物線の動きをビジュアルに、生き物のように捉える発想力はとても重要なことでしょう。アナログ的に蝶が舞い、解を配置していく様のインパクトは強烈であるし、発展的にイメージを膨らませることもできます。型どおりに教えるのではなく、まずこちら側が数学を遊びたいと思わないとワクワク感ってなかなか心に届かないのではないでしょうか。まず、教室で、遊ぶことから始めてみませんか。

さて、解の配置にはいろいろなパターンがありますが、多くは「てん・じく・ちょう」の順番で順次決定していく方が見通しはいいようです。点の制約から軸と頂点の位置を考える必要がなくなる場合もあります。

例えば、数 α より大きな解と小さな解が一つずつあるときは、軸がどこにあっても構いません。蝶を適当な場所において、頂点をもってぐいっと、下方に引き下げることで、α の前後で x 軸と交わることが確認できるでしょう。頂点の y 座標については、放物線が下に凸の場合は、頂点がグラフの最小点であることから解決します。

$$0>f(\alpha)\geqq 頂点のy座標$$

であることから、点の y 座標が負であれば、頂点については考える必要はないわけです。



解が α と β の間、β と γ の間にある場合も、$f(\beta)<0$ であることから、軸が α と γ の間にあり、さらに頂点の y 座標が負であることも明らかといえます。

なお、「てん」の調べ方として、定点通過を候補にいれておくことも考慮すべきでしょう。本文の問題の場合は、

$y=x^2+ax+a+3$　より、$(x+1)a+(x^2-y+3)=0$　より、

点 $A(-1,4)$ が定点となります。グラフの x^2 の係数は 1 ですから、点 A の y 座標より、軸は点 A から $\sqrt{4}=2$ 以上右の位置にあればいいことが分かります。軸の方程式は、$x=-\frac{a}{2}$ より、$-1+2\leqq -\frac{a}{2}$　∴　$a\leqq -2$

また、$f(0)>0$ であることより、$a+3>0$　∴　$-3<a$

以上より、$-3<a\leqq -2$　となるわけです。

2次方程式の解の配置方法

$ax^2+bx+c=0$　$(a>0)$　グラフ化 ⇒ $\begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c & \text{(放物線)} \\ y=0 & \text{(x軸)} \end{cases}$

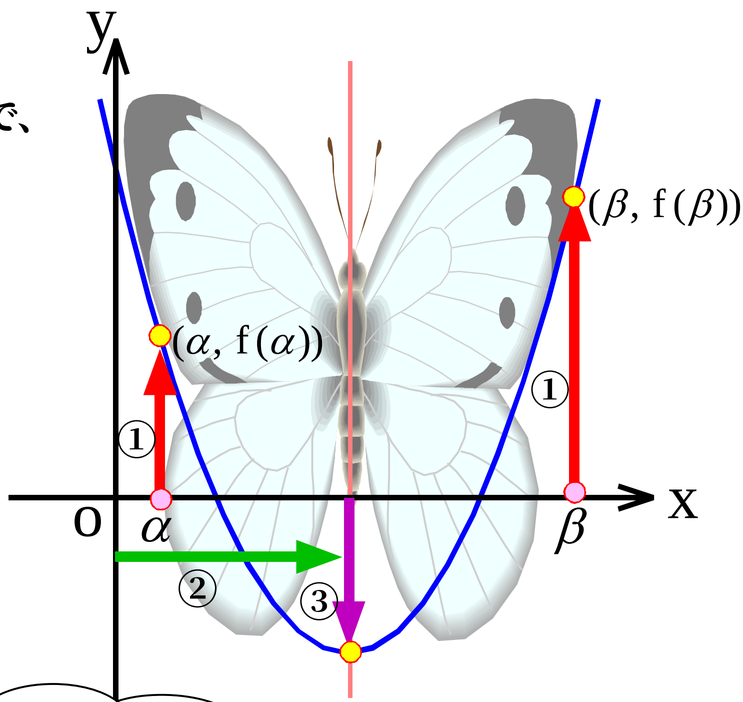
２方程式の解は、左辺の２次式を $y=f(x)$ とし、グラフ化することで、放物線と x 軸との交点の位置から解の配置を調べることができる。

○解の配置を調べる手順

①点 α に対して $f(\alpha)$ の符号

②軸の位置

③頂点の y 座標の値



てんじくチョウ
を捕まえろ!!

捕まえ方マニュアル

蝶の種類　$f(x)=a(x-p)^2+q$　$(a>0)$

Case	解の配置	てん	じく	ちょう
A	2解がともにαより大きい	$f(\alpha)>0$	$\alpha<p$	$q\leqq 0$
B	1つの解はαより大きく、もう1つの解はαより小さい	$f(\alpha)<0$	どこでもよい	$q\leqq f(\alpha)<0$ より必要なし
C	2つの解はαとβの間にある (α＜β)	$f(\alpha)>0$,　$f(\beta)>0$	$\alpha<p<\beta$	$q\leqq 0$
D	1つの解はαとβの間に、もう1つの解はβとγの間にある (α<β<γ)	$f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)>0$	点の条件より必要なし	$q\leqq f(\beta)<0$ より必要なし

てんじく蝶の標本