

隣接二項漸化式のちょっとした小手技2

札幌新川高等学校 中村文則

無理を通せば道理が引っこむ

<先生>まずは、前回の復習です。隣接二項漸化式

$$a_{n+1} - pa_n = f(n)$$

の一般解は、平衡値を求めて両辺の項のバランスをとることで求められたね。 $f(n)$ が定数と n の一次式の場合については考えたけど、今日は、 $f(n) = qr^n$ ($q \neq 0$) の形のものの一般解について、調べてみよう。

ex) 次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 5, a_{n+1} - 3a_n = 2^n$$

では、まなぶ、解いてごらん。

<まなぶ>最初に a_n と a_{n+1} を とおきます。

$$a - 3a = 2^n$$

与式との差をとって、 $a_{n+1} - a = 3(a_n - a)$ 。ここで $a = -2^{n-1}$ だから、

$$a_{n+1} + 2^{n-1} = 3(a_n + 2^{n-1}) \quad \dots\dots(*)$$

そして、最後にバランスをとります。左辺の 2^{n-1} を 2^n に換えて、右辺を調整すると.....、あれっ？
先生、どうやって調整したらいいかわかりません。

<先生>左辺を2倍したわけだから、右辺も2倍すると考えても、どうやら、うまくいきそうにないですね。困った。誰か、アイデア下さい。

<かず子>取りあえず、変形された式を予想すればいいんじゃないでしょうか。

左辺は 2^n で、右辺は 2^{n-1} になればいいんだから、たぶん

$$a_{n+1} + b2^n = 3(a_n + b2^{n-1}) \quad \dots\dots()$$

となれば問題は解決すると思います。

<先生>うん。なんか良さそうだね。では、この式を満たす b はどうやったら求められるだろう。

<よしお> () を変形して、

$$a_{n+1} - 3a_n = -b2^n + 3b2^{n-1}$$

$$a_{n+1} - 3a_n = b2^{n-1}$$

この式と与式の右辺を比較して、 $b = 2$ を得ます。よって、

$$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$$

<先生>その通り。どうしたんだらう。今日はみんなやけに冴えてるね。さあ、どうやら、バランスがとれたね。では、残りの解答をまなぶにまとめてもらおう。

<まなぶ>はい。

数列 $\{a_n + 2^n\}$ は公比3の等比数列で、初項は、 $a_1 + 2 = 7$ 、よって一般項は、

$$a_n + 2^n = 7 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2^n$$

<先生>本当にみんな冴えてる。素晴らしいね。幸せな気分で今日は終れそうです。

<まなぶ>先生、質問なんですが。この場合、(*)は結局は使っていないことになりませんが、何の意味があったんですか？

<先生>.....。

Note)

かなり、虚構性の強い内容になってしまいましたが、この場合の(*)は、確かに結果としては不要になってしまいます。敢えて、理由を付けるのなら式()を導くためのイメージ作りということになるでしょう。値 2^{n-1} を振り分けて、 $b2^{n-1}$ を作ると考えればよいわけです。ただそれ以上に実は、この解法は大きな発展性を含みもっています。

一般に $a_{n+1} - pa_n = qr^n$ の解法は、マニュアル的にはその両辺を p^n または q^n で割ることにより求められますが、特性方程式の概念を発展させるのであれば、特解(特性解)を理解する必要があると思います。

例えば、隣接二項漸化式

$$a_{n+1} - pa_n = f(n)$$

を解くためには、

$$t_{n+1} - pt_n = f(n) \dots\dots\dots()$$

なる式を用意します。二式の差をとると、

$$a_{n+1} - t_{n+1} = p(a_n - t_n)$$

と変形できますから、 $\{a_n - t_n\}$ は公比 p の等比数列となり、一般解

$$a_n = t_n + (a_1 - t_1)p^{n-1}$$

が得られます。

この()の式を満たす数列 $\{t_n\}$ の1つを特解といいますが、このとき $f(n)$ が定数のとき()は特性方程式を意味している訳であり、特解は平衡値となります。結局、本文の小手技は、間接的に、(*)のイメージ付けからこの()を求めたことになっている訳です。

具体的に、本文の ex) の問題で考えると、

$$t_{n+1} - 3t_n = 2^n$$

に対して、 $t_n = a \cdot 2^n$ とおくと、

$$a \cdot 2^{n+1} - 3a \cdot 2^n = 2^n$$

両辺を 2^n で割って、

$$2a - 3a = 1$$

これから、 $a = -1$ 。よって、 $t_n = -2^n$ より、

$$a_n = -2^n + 7 \cdot 3^{n-1}$$

となります。

それでは、この特解による解法を利用して、次の問題を解いてみましょう。

ex) 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。
 $1, 3 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 7 \cdot 2^3, \dots, (2n-1) \cdot 2^{n-1}$

解) 和を S_n とおくと、

$$S_n = 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \dots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$$

これから、

$$S_{n+1} - S_n = (2n+1) \cdot 2^n$$

よって、この隣接二項漸化式の一般解を求めればよいことになります。

$$t_{n+1} - t_n = (2n+1) \cdot 2^n \dots\dots\dots$$

二式の差をとって、 $S_{n+1} - t_{n+1} = S_n - t_n$

これから、 $S_n - t_n = S_1 - t_1 = a_1 - t_1 = 1 - t_1$

また、を満たす特解を、 $t_n = (an + b) \cdot 2^n$ とすると、 に代入して、

$$\{a(n+1) + b\} \cdot 2^{n+1} - (an + b) \cdot 2^n = (2n+1) \cdot 2^n$$

$$2(an + a + b) - (an + b) = 2n + 1$$

$$(a - 2)n + (2a + b - 1) = 0$$

n の恒等式とみると、 $a = 2, b = -3$

よって、 $t_n = (2n - 3) \cdot 2^n$ ですから、

$$S_n = t_n + (1 - t_1) = (2n - 3) \cdot 2^n + 3$$