# 多面体定理のちょっとした小手技

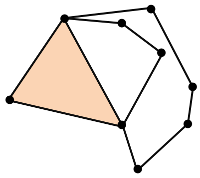
札幌旭丘高等学校　中村文則

## おいらの２月は…

<よしお> 先生、質問があるのですが、多面体の面、辺、頂点の間には次の関係が成り立っているんでしたよね。

> 凸多面体の面(Face)、辺(Edge)、頂点(Vertex)の数を $F, E, V$ とすると、
> $$F - E + V = 2$$
> が成立する。

<まなぶ> ああ、おいらの２月の定理ってヤツだな。
<アリス> 何ですか、それ。
<まなぶ> 確かオイラーって数学者が見つけた定理だろ。$F, E, V$ の値を計算すると２になるから、フェブが２、ということは、フェブラリーは２月だから、２月の定理だろ。
<かず子> アホらし。大体、フェブラリー(February)のスペルが違っているじゃない。
<まなぶ> 語呂合わせだよ。細かいことは気にしない。でも、よしお、この定理に何か問題でもあるのかい。
<よしお> この定理は、５ つの正多面体や幾つかの準正多面体について成り立つことは、実際に調べてみて分かったけど、すべての凸多面体について成立することは証明していないですねよ。
<先　生>２月の定理か、なるほどね。
<かず子> 先生、何、感心しているんですか。よしおの質問、聞いていましたか。実は私も気になってたんです。今まで学んだ定理はどれも、まず「定理の証明ありき」だったと思うんです。それに対して多面体定理は幾つかの例だけで結論を導き出してるわけでちょっと乱暴じゃないかしら。
<先　生> そうだね。確かに説明足らずだったかもしれない。それでは今日はその証明をしてみよう。
そのためにはちょっと準備が必要になる。多面体定理を平面で考えるとどうなると思う。
<まなぶ>　先生のいっていること変だよ。「多面体」の定理なんだから平面で考えられる訳はないでしょ。
<先　生> でも多面体は展開することで平面の上に置くことができるだろ。そしてその場合は、面、辺、頂点は平面図形とみて数えることはできる。その展開図は後で考えることにして、例えば三角形では「おいらの２月」はどうなっているだろうか。
<アリス> 先生、おいらの２月、気に入っちゃったんですね。三角形は簡単です。面が１つ、辺が３つ、頂点が３つだから、
$$F - E + V = 1$$
だわ。
<かず子> 簡単というより、そんなの調べる必要もないわ。だって、$n$ 角形は、面が１つで、辺と頂点はどちらも $n$ なんだから１になるのは当たり前よね。
<よしお> でも平面図形の面は１つだけとは限らないよ。複数の面をもつような図形の場合はどうなるんだろう。
<先　生> それが次に考えることだ。先ほどの三角形に適当に幾つかの面を加えて新たに図形を作ってみよう。
<まなぶ> よし、僕がやってみる。三角形に、凸四角形と凹五角形を加えてみよう。
えーっと、面は３、辺は 11、頂点９だから、　$F - E + V = 3 - 11 + 9 = 1$
これもおいらの２月は１月になってしまった。

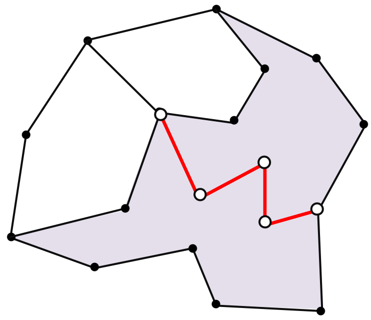


<かず子> 浅知恵が破綻した瞬間ね。だいたい、凸とか凹とか混ぜすぎよ。でも、これだけヘンな組合せでも成立しているんだから、どんな組合せでも成り立つことは分かるわ。
<アリス> それでも確認できているのはその変な図形だけで、多面体定理の場合と同じで予測に過ぎないことになるわ。よしおの問題が解決できたことにはならないですよね。
<先　生> その通り。そこで、ちょっと見方を変えてみよう。まなぶの作った変な図形を、組み立てたとみるのではなく、外枠である凹七角形の内部に折れ線で面を分割してできたとする。
<まなぶ> なんか、みんな僕のことを敵視していない。まあ、それでも僕の個性的な作品は作れることは分かる。
<先　生> そこで、外枠の図形が $n$ 本の線分できているとしよう。その場合の点は何個ある。
<よしお> $n$ 角形の頂点と辺の関係と同じですよね。だから $n$ 個です。
<先　生> そうすると、この図形では面１、辺 $n$ 、頂点 $n$ だから、$F - E + V = 1$ は成立しているね。
では、次に図形の内部にある点から２点を選び、$m$ 本の線分(折れ線)で結んでできる図形を考えてみよう。
面、辺、点はそれぞれ何個になるだろうか。
<かず子> 面は元の図形が２分割されるから２個ね。辺は新たに $m$ 本の線分を加えたのだから $m + n$ 本だわ。
<アリス> あとは頂点ね。もとの図形は $n$ 個で、そのうちの ２ 個を使って内部を結んでいるのよね。だから $m - 2$ 個を加えればいいのかしら。
<まなぶ> アリス、ちょっと違うよ。例えば右図で線分を３つに分割するには、線分を２箇所で切るだけでいいだろ。だから、頂点の数は $m - 1$ 本だと思う。ということは、全部で $(n + m - 1)$ 本だ。

<よしお>　では最後に、このときの面、辺、点の関係を調べてみます。

$$F-E+V=2-(m+n)+(m+n-1)=1$$

やはり、成立していますね。



<先　生> さらに同じように図形上にある 2 点を結んで繰り返し続けてもこの関係は保たれる。そこで、図形が $f$ 個の面に分割され、辺が $e$ 個、頂点が $v$ 個で、

$$F-E+V=f-e+v=1$$

の関係が成立しているとする。次に、図形の閉じた領域(面)の中から 2 点を選び、$n$ 本の折れ線で結ぶと、新たに作られた図形の面($F'$)、辺($E'$)、頂点($V'$)の関係は、

$$F'=f+1、E'=e+n、V'=v+n-1$$

になる。これから、

$$F'-E'+V'=(f+1)-(e+m+n)+(v+m+n-1)=f-e+v=1$$

<アリス> 1 月になりますね。でも、この場合も最初の $F=f, E=e, V=v$ は成立すると仮定しただけだから、本当に成り立っているかどうかわからないのではないでしょうか。

<よしお> それで先生は最初に大きな外枠を考えたのだと思う。その外枠の中に 1 つの折れ線を加えても成り立っていた。閉領域である面に対して折れ線を加えることを続けていけば、先ほどの仮定した状態になる。元がはっきりしているから成立するということですね。これで平面についてはスッキリしました。

<まなぶ> 問題はそれを空間ではどう証明すればいいかということ。そう考えれば何も解決していないようにも思うけど。

<先　生> そんなことはない。いまみんながやったことは、平面では外枠である面は線分を用いて分割できたということだ。同じように、空間は面で分割すればいいということになる。

<まなぶ> うーん、何をいっているか分からない。

<かず子> 私は、分かるような気がする。そのことが、最初に先生がいっていた多面体の展開図を考えるということですね。

<先　生> その通り。それでは多面体を展開して「おいらの 2 月」の証明を試みよう。まず、多面体の 1 つの面をハサミで切り取って内部がみえるようにする。

<アリス> 先生、どうして切り取る必要があるんですか。展開図を考えればいいだけだと思いますが。

<よしお> でも、展開図にしてしまうと、それは平面図形だから、フェブは 1 月になってしまうよ。

<先　生> 展開して考えてはいくのだけど、よしおがいうとおり、平面図形にしてしまうと意味はなくなる。立体図形のまま、空間の視野に立って展開図をみる必要があるんだ。

<まなぶ> それで 1 つの面を切り抜いて穴を開けたということか。そこから内部をみることができるしね。

<先　生> もうひとつ大事なことは、面を一つ切り取ると、元の立体図形の面の個数は 1 つ減るけど、辺と頂点の個数は変わらないということだ。

<かず子> なるほど。もともと辺や頂点は他の面と共有していたわけだから、取り除いても個数は変わらないのね。

<先　生> さあ、それでは切り取ってできた穴から中を覗きこんでみようか。

<まなぶ> 穴から覗くのか。凄くドキドキするな。

<かず子> なんか、まなぶがいうと、とっても嫌な気持ちになる。

<先　生> 正四面体はどのように見えるかな。

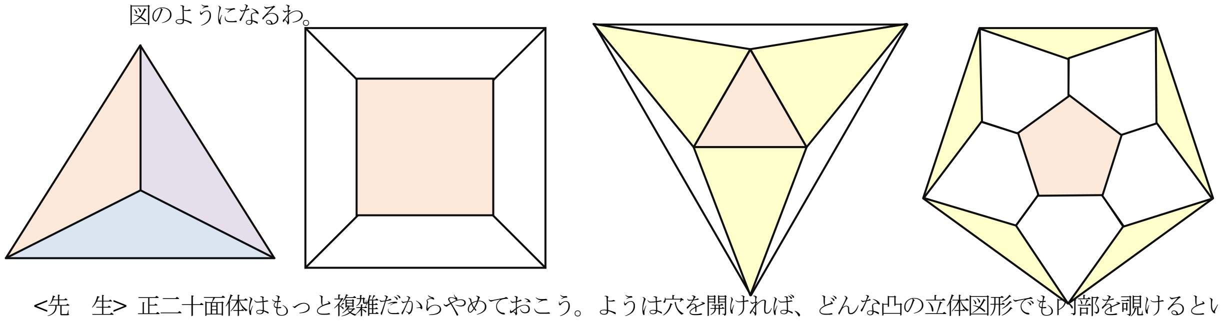
<アリス> 簡単だわ。正三角形を重心で分けた 3 つの合同な二等辺三角形のように見えるわ。

<まなぶ> 立方体は、サンのある窓から外にあるものをジーっと覗いているような感じた。

<かず子> どうして、窓を見ているって簡潔にいえないのかな。正八面体と正十二面体はちょっと複雑。内側がよく見えないわ。

<まなぶ> もっと、ぐいっと穴に視線を近づけてやればみえるだろ。離れすぎなんだよ。

<かず子> ほっておいて。まなぶに言われるとだんだん見たくなくなる。えーっと、やっぱり複雑ね。イラストを書くと下図のようになるわ。



<先　生> 正二十面体はもっと複雑だからやめておこう。ようは穴を開ければ、どんな凸の立体図形でも内部を覗けるということは分かると思う。そして、その見えた図形が平面図形として対応できるいうことなんだ。

<アリス> でも実際は平面ではなく、面は曲がってますよね。それでもいいんですか。

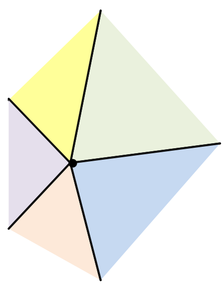
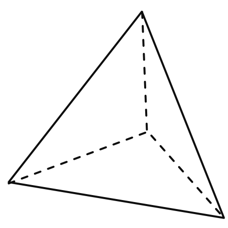
<先　生> 先ほど平面で考えた図形を紙に描き、紙を曲げたり、あるいと外枠に沿って切り、折っても面、辺、頂点の関係は変わらないだろ。すなわち平面で描いた図形と同じ関係が成立するということなんだ。

<まなぶ> ということは、フェブは 1 月が成り立つ。

<かず子> 正確には、$F-E+V=1$ ということね。

<よしお> それが言えたら、あとは分かります。最後に蓋をすればいいのですね。
<まなぶ> どういうこと。
<よしお> 1 つの面を切り取ったとき、面($F$)、辺($E$)、頂点($V$)で個数が変わったのは面が 1 つ減っただけだよね。すなわち、覗きこんだ平面図形で成立する面($F'$)、辺($E'$)、頂点($V'$)の関係は、 $F'=F-1$ 、 $E'=E$ 、 $V'=V$
ここで、フェブの 1 月を用いると、 $F'-E'+V'=1$
すなわち、 $(F-1)-E+V=1$
だから、 $F-E+V=2$ 　となる。
結局、平面で成立しているオイラーの定理を用いて、最後に面の蓋をすれば、フェブの 2 月になったということ。
<まなぶ> そうでしょ。やっぱりフェブは 2 月にきまってるんだよな。

## 一番痛くない正多面体ボールはどれだろう？…

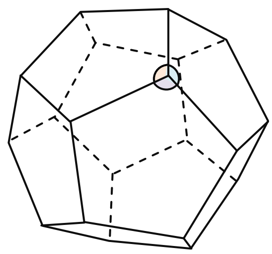
<先　生> オイラーの多面体定理を用いて、ちょっと面白いことを考えてみよう。いま、球の替りに正多面体をボールにして投げた場合、キャッチしたときに一番痛くないのはどの正多面体だろうか。
<かず子> そんなの当たり前だわ。一番痛いのは正四面体で一番痛くないのは正二十面体でしょ。
<まなぶ> その答え、本当に当たり前すぎるのでは。先生がボールを直球で投げることなんかないよ。いつもいやらしく変化する球なんだから、痛いのは正四面体でも、痛くないのは違うと思うな。
<先　生> およそ、数学らしからぬ推測というか、邪推だな。ただし、残念ながら、その予想は正しい。ところでその痛さなんだけど何を基準に測ればいいと思う。
<アリス> あのー、それは頂点の尖り具合とは違うのですか。
<かず子> まなぶが変なことというから、アリスが疑心暗鬼になってるでしょ。アリス、尖り具合でいいと思うよ。
<先　生> その尖り具合は平面では正 $n$ 多角形の 1 つの内角の大きさということになるね。正 $n$ 角形のひとつの内角は何度だろうか。
<よしお> 正 $n$ 角形の外接円の中心 $O$ と頂点を結ぶと $n$ 個の合同な二等辺三角形ができ、その中心角は $\dfrac{360^\circ}{n}$ だから、三角形の内角の和から引いて、 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$ になります。
<先　生> $n≧3$ であり、$n$ が大きくなると、内角の角度も大きくなるから尖り方もだんだんと小さくなっていくね。ということはその尖り方は、1 つの内角に対する外角で測ることもできる。
<まなぶ> なんでそんな面倒なことをするのですか。内角でも全然問題はないと思うけど。
<先　生> それは内角の和と外角の和を考えてみれば分かる。内角の和は、 $\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right)\times n=180^\circ n-360^\circ$
これに対して、外角の和は $360^\circ$ であることは知っているね。このように外角の和は一定だから、他の多角形の角度と比較するときにこちらの方が分かり易いといえる。そこで尖り具合を表すものとして外角の大きさを「尖り度」とよぶことにする。同様に、立体図形でも一つの頂点に集まっている多角形の内角の和を $360^\circ$ から引いた角度を尖り度として考えよう。
<アリス> どうして $360^\circ$ なの。

<先　生> 平面図形の内角の大きさは $180^\circ$ より小さくなければならない。$180^\circ$ だと尖りができないし、それを超えると凹多角形になってしまう。だから外角は $180^\circ$ から内角の大きさを引いた値になる。立体図形の場合は展開図を考えてごらん。頂点の周りの角度の和が $360^\circ$ だと、折ることができないよね。ということは尖りを作ることができないということだ。したがって $360^\circ$ から引くことになる。
<よしお> 尖り度は $0^\circ$ より大きくなければ立体は作れないし、大きくなるほど尖り方が鋭くなるということですね。ところで先生、ひょっとしたら、多面体の場合についても尖り度の和は一定になるのでしょうか。
<先　生> いい質問だね。実はその通りなんだ。それを示すためにオイラーの多面体定理が利用できる。そのことは後で触れるとして、試しに正多面体の尖り度を求めてみようか。
まず、正四面体だけど、面は 4 つある。辺の数は、面の形は正三角形であるから一つの三角形で 3 本。これが 4 面あることより、 $4\times3=12$ 本になる。だけど正四面体のすべての辺は 2 つの正三角形の辺を共有しているから、
$12\div2=6$ 本ということになる。では頂点は何個あるかな。

<かず子> 同じように考えればいいわ。面である正三角形の頂点の個数は 3 個でこれが 4 面あるから 12。えーっと、これを何で割ればいいのかしら。
<まなぶ> かず子、面倒に考え過ぎだよ。だって正四面体の形状を考えてみれば頂点が 4 であることは明らかだろ。
<先　生> そうだね。でも、正四面体のひとつの頂点に幾つの面の頂点が共有しているかを調べることは尖り度を調べるた

めに重要なことだ。図形からは3つということが分かるね。だから、頂点の個数は、$12 \div 3 = 4$ としても得られることになる。さて、その尖り度だけど、一つの頂点が3つの三角形の頂点を共有しているということは、その頂点の周りの角度の和は、$60° \times 3 = 180°$ ということだ。だから、尖り度は、$360° - 180°$ だ。

では、正十二面体についても同じように考えてごらん。

<まなぶ> これは面倒だな。図形をみて分かるのは面の数が12個ぐらいだ。

<かず子> あのね、正十二面体なんだから12、図形をみる必要すらないでしょ。辺は正十二面体の面が正五角であることから分かるわ。辺の総数は$12 \times 5 = 60$ で、正十二面体のすべての辺は2面の辺を共有するから、$60 \div 2 = 30$ 。随分多いのね。



<アリス> 最後に頂点ですね。頂点の総数も60だわ。結局、辺も頂点も総数は同じなのね。

頂点に集まっている面は右の図形をみると3つね。ということは、$60 \div 3 = 20$ 。これで、頂点数が求められたわ。

<よしお> 最後に尖り度ですね。正五角形の内角は、$180° - \dfrac{360°}{5} = 108°$ 。だから、尖り度は $360° - 108° \times 3 = 36°$ ということですね。

<先　生> 残りの正多面体も調べて後で表にまとめてよう。さて、それではいよいよ尖り度の和は何度になるか正多面体だけでなくすべての凸多面体について調べるぞ。

まず、多面体にちょっと手を加える。多面体の面はいろいろな形の多角形が用いられているね。その多角形の対角線を結んで分割する。そうすると、多面体のすべて面は三角形とみることができる。

<かず子> 凄い発想ですね。たとえば正十二面体は正五角形が12枚で作られているけど、その五角形を対角線で分けると3つの三角形になるから、正十二面体は三角形36枚を面に持っている多面体と考えていいということですね。

<先　生> そうだね。そうみてもオイラーの多面体定理が成立していることは先程の展開の考え方から分かると思う。

面の数を$F$ 、辺の数を$E$ 、頂点の数を$V$ とすると、$F - E + V = 2$ ということだ。

さて、ここで、面$F$ と辺$E$ の関係はどうなっているだろう。

<アリス> 先ほどの正十二面体と同じ考え方ですね。三角形である面の数が$F$ だから辺の総数は$3F$ 。多面体のすべての辺は面の2辺を共有しているから、$E = \dfrac{3F}{2}$ となります。

<先　生> これから、オイラーの多面体定理を用いると、

$$V = -F + E + 2 = -F + \frac{3}{2}F + 2 = \frac{1}{2}F + 2$$

辺と頂点の数が、面である三角形の個数で表現できたことになる。

ここで頂点の周りの角の大きさの和は何度だろう。

<かず子> 頂点に集まっている面の個数が分からないからだせないと思います。

<先　生> 頂点の周りの角をすべて集めたら何に等しくなる。

<まなぶ> 分かった。結局、面であるすべての三角形の内角の和になる。ということはひとつの三角形の内角の和は$180°$ でそれが$F$ 個あるわけだから、$180°F$ ですね。

<先　生> そうだね。そしてひとつの頂点に対して$360°$ から引いたものが尖り度だから、頂点の個数$V$ だけ$360°$ から引くことになる。尖り度を$T$ とすると、

$$T = 360°V - 180°F = 180°(2V - F) = 180°\left\{2\left(\frac{F}{2} + 2\right) - F\right\} = 720°$$

尖り度の和は必ず$720°$ になることが導かれたね。いままでのことを正多面体に関してまとめると表のようになる。さあ、それでは最初の質問に戻ろう。正多面体ボールをキャッチして一番痛くないのはどれだ。

<まなぶ> 一番痛いのは手触りから正四面体なのは明らかだけど、尖り度をみるとはっきりするのか。確かに尖り度は$180°$ で一番大きい。これに対して最小の角度は正十二面体の$36°$ だ。正十二面体が一番痛くないということか。

<先　生> 尖り具合の影響を与えるのは面の個数ではなく、頂点の個数ということだね。頂点の個数が多いほど球に近い形ということだ。

<まなぶ> なるほどね。だから、かず子がまあるいのは、たくさんカドが立っているからなのか。

<かず子> どうやら、私が用意しなければいけないのは正四面体ボールのようね。

| 項目 / 多面体 | 面の形 | 頂点共有の面数 | 面数 (Face) | 辺数 (Edge) | 頂点数 (Vertex) | F−E+V | 尖り度 (角不足) | 尖り度の和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | 正三角形 | 3 | 4 | 6 | 4 | 2 | 180° | 720° |
| 正六面体 | 正方形 | 3 | 6 | 12 | 8 | 2 | 90° | 720° |
| 正八面体 | 正三角形 | 4 | 8 | 12 | 6 | 2 | 120° | 720° |
| 正十二面体 | 正五角形 | 3 | 12 | 30 | 20 | 2 | 36° | 720° |
| 正二十面体 | 正三角形 | 5 | 20 | 30 | 12 | 2 | 60° | 720° |

# あとがき

平成 24 年度より学習指導要領の全面改訂を受け、数理教育の充実を目指して教科「数学」が先行実施することになった。

統計分野、整数論といった新たな分野が起こされた。知識・技能の活用力の育成や数学のよさを認識するために、数学的活動がより一層望まれ、その一環として「課題学習」が数学ＩＡに位置づけられた。

本稿の内容もまた、新しい単元であり、従前の図形問題をより一層深め、平面・空間図形を多角的に捉えることで、数学のよさを理解させるものである。ただ、他の新設の分野は過去には教科書に掲載されたものではあるが、「オイラーの多面体定理」は初出である。それゆえ現場の指導も戸惑うものかもしれない。なおかつ、定理の証明については正多面体の面、辺、頂点の数を調べるだけで「推測」するものであり、正多面体が五種類しかないことの証明も割愛されている(研究としては載っているが)。「仏造って魂入れず」である。

面、辺、点の数にどうしてこのような関係が成立するかを正多面体で調べ、そこから性質を予想・組立て、そして証明する道筋こそが、活用力の育成であり、数学のよさの認識であるはずなのだが、その証明がまったく触れられていないのである。そこで、今回の小手技は、これを盛り込むことにした。

ただ、三社の出版社の記載内容を確認し、多面体定理の「証明はない」と判断したのだが、後でＫ社は掲載していることが判明した。これまでは、教科書の学習内容はマキシマムでありすべて共通内容であったのだが、今回の改訂からミニマムになり、各社の記載内容の範囲と深さは様々になったことが、このように１社のみ掲載といった状況を生み出した。

Ｋ社の証明方法は、平面図形におけるオイラーの定理を帰納的に示し、空間に拡張するものであるが、そのことは後述する。実は本稿もその方針で進めたが、途中、掲載している出版社があることが分かったため、証明過程において、図形の見方を変えることで流れに工夫を加えることにした。

一般的にはオイラーの多面体定理の証明は、平面から空間へと思考を拡張し、移していくものである。面 $(F)$ 、辺 $(E)$ 、頂点 $(V)$ に対して、 $F-E+V$ の値が１から２へと変化するのである。如何にも次元が上がったようで、興味深い。

まず、平面での $F-E+V=1$ の証明は、図形をつなぎ合わせることで関係を予想する。

仮に、図形の面、辺、頂点の数をそれぞれ、 $F=f,\ E=e,\ V=v$ とすると、 $f-e+v=1$ となることを前提とするわけである。次に、この図形に新たに $m$ 角形である面を加える。そうすると、面の数はひとつ増え、 $F=f+1$ になる。辺については新たに加えた面が元の図形と $r$ 個の共有辺をもつとすると、増える辺の数は $(m-r)$ より、 $E=e+(m-r)$ である。

最後に頂点の個数であるが、共有辺が $r$ 個であれば、共有点は $r+1$ 個になるから、増える頂点の数は $(m-r-1)$ 。

よって、 $V=v+(m-r-1)$ 。これから、

$$F-E+V=(f+1)-(e+m-r)+(v+m-r-1)=f-e+v=1$$

平面において、予想が成立することが示された。Ｋ社の証明もこれを踏襲する。しかしながら、正確には、この論法では初期値を何にするかという問題は生じる。それは、数学的帰納法的な証明であるため、数学Ａではその説明は難しく、他社の教科書では割愛したのかもしれない。

さて、平面から空間と思考を拡張する中で直線上でのオイラーの定理はどうなるかというと、頂点の本数は辺の本数より１つ多いことから、 $V=E+1$ より $-E+V=1$ 。ここで、 $F=0$ であることから、 $F-E+V=1$ 。同様の関係が成立する。この関係は和算では植木算として知られるものである。これを本文では、外枠で囲まれた(折れ線で作られた)図形をまず考え、その内部に折れ線の仕切りを入れ、閉領域を面として捉えている。初期値が明確になり、さらに点と辺の個数の数え方も分り易くなる。

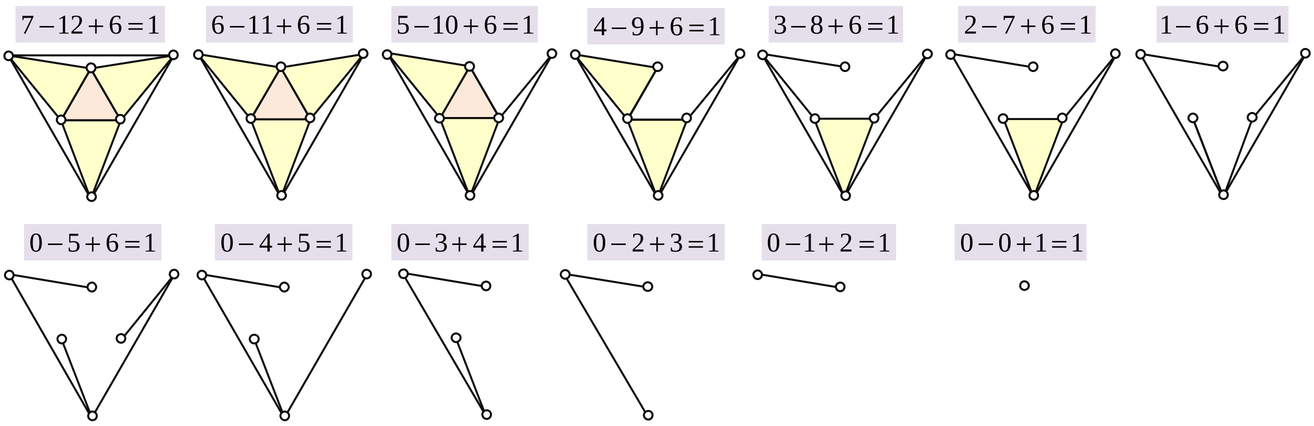
なお、証明としては、「面を切り取っていく」という逆の発想もあり得だろう。

下図は、本文で用いた正八面体の蓋を除いた平面図形である。上段の図は左から順に１辺ずつ消すことで面をなくしている。このとき「面と辺は１つずつ減っていく」が頂点は不変である。その値の変化を $F-E+V=1$ の式で表している。

下段の左図ですべての面はなくなり、辺と頂点だけとなる。あたかも、樹木の葉が落ちて、分岐する枝になったようである。次に枝を切り落としていくと、今度は「辺と頂点が１つずつ減っていく」。そして最後には点(根)だけが残るのである。

この変化の様は規則正しく、また美しい。 $F,E,V$ の＋、－、＋の符号の意味するところ自然に読み取れるのである。

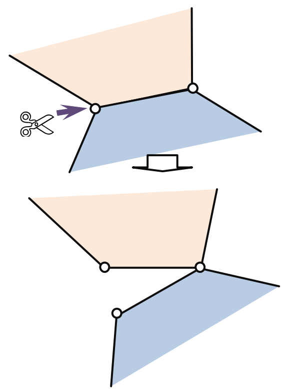
スライドを作成し、プレゼンテーションをした後、巻き戻せば、樹木が生成していくことだろう。



そして次に、平面で成立するオイラーの定理$F-E+V=1$を用いて、空間のオイラーの多面体定理の証明を本文では考察していく。その方法は、立体図形を平面に落とすわけであるが、そのために、立体図形を切り開く。

そこで、立体図形のひとつの面を切り取り、このときできた穴を広げ、強引に平面上で多角形が繋がっている状態に加工するのである。これは立体が伸縮自在のゴム膜のようなもので作られていると仮定することで可能になる。しかし実際は誰もがそのような素材を頭の中に描き、加工をイメージできるわけではない。

そこで本文では、視線を穴に近づけ「穴の中を覗き込む」ことで、展開図全体を見て、それは平面図形と同等であるとした。

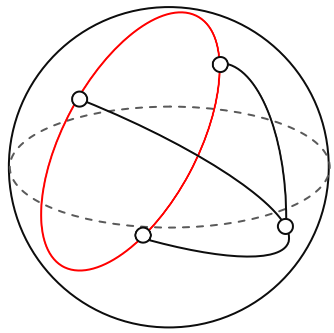


なお、平面のオイラーの定理が面を切り落とし、面から直線、そして点というように次元を下げていったように、空間でも可能である。穴が空いた立体図形の辺にハサミを入れて図形を開いていくのである。辺を切っても面の数は変わることはない。これに対して穴の切り口以外のすべての辺は2つの面の2辺を共有している。そのため1辺を切り開くと2辺になり、ハサミを入れた部分の頂点も2つに分かれる。辺$E$と頂点$V$がハサミを入れる度に1個ずつ増えるが、$F-E+V$の値は変わらないのである。

そうして、平面上に展開できるようになるまで切り離さずに開くのであるが、ここでひとつ問題が生じる。すべての立体図形ははたして1枚の紙の上に展開可能であろうか。この疑問があるゆえ、本文では取り上げてはいないが、証明法としては前述の葉・枝を切り落とす平面の場合と対比でき、面白いものといえるだろう。

また、次のような証明を考えることもできる。

立体図形は、辺を曲げて考えれば、球面内で生成するものである。そこで球面内に折れ線で外枠だけの立体図形を作り、点を結び領域として面を作っていくのである。この方法は、本文の平面での論法とまった同じであり、立体図形を平面に落とす必要はなくなる(平面でのオイラーの定理の証明も必要はなくなる)。



具体的には次のようにする。球面上を折れ線で一周して結ぶ。折れ線は小円とみなせて球面は2つに面に分割されるが、この段階ではまだ立体図形はできない。次に折れ線上にある2点を選び、新たな折れ線で球面上を結ぶ。この操作を続けると立体図形が構築される。右図では、四面体が作られている。

最初の小円を作るとき、面$(F)$、辺$(E)$、頂点$(V)$を調べると、$F=2$である。

辺は、折れ線が$m$個で繋がるときは、$E=m$であり、頂点の数も$V=m$である。

これから$F-E+V=2$が成立する。次に小円から2点を選び、$n$個の折れ線で結ぶとき、

$F=2+1=3$、$E=m+n$である。また、頂点は新たに$m-1$個増えるから、$V=m+(n-1)$

これより、$F-E+V=3-(m+n)+(m+n-1)=2$である。以下この操作を続け、本文の証明を辿ればよい。

これは平面と同様の証明を空間についても与えるものであるが、平面は空間の一部と考えれば当然の帰結ではある。

すなわち、平面におけるオイラーの定理は、外枠の内部に対して面、辺、頂点の個数を数えるが、外枠の外部についても一つの平面とみなすと、$F-E+V=2$となり空間と同じ関係が成立するのである。外部に広がる平面という面は、無限の果てでつながれば球面になる。そう考えると、立体図形に穴を開ける必要はないことに気がつく。

すなわち、一つの面を辺に沿って切り、1辺だけ残しておいてから開くのである。その面は蝶番のある蓋になる。このとき、面の個数は変わらず、辺と頂点は辺を切った回数だけ2倍になる。立体を開いて展開するには、この蓋の部分は、展開した平面図形の外側を覆う平面になるように伸ばし引っ張ってやればいいだけなのである。

本文の後半は、尖り度に関する問題である。立体図形の形状や性質は、オイラーの多面体定理より導かれる尖り度から得られるものも多い。

「尖り度の総和は$720°$」である性質をデカルトの定理という。

平面上の角(平面角)は、1点から延びる半直線が回転して作られる円弧の部分であり、その角度は半径1の弧の長さに対応させる(この角度をラジアン(rad)という)。これに対して空間における角(立体角)は、空間内の点から延びる半直線が回転して作られる錐面の部分であり、その角度は半径1の球の錐面の面積で与えられる(この角度をステラジアン(sr)という)。平面における外角の和が$360°$になることは、すべての外角を平面上の任意の点(正多角形であれば外接円の中心)に集めることで示され、単位円の円周であることより$2\pi(rad)=360°$である。空間では、尖り度を1点(正四面体であれば外接球の中心)に集めると、半径1の球の表面積$4\pi(sr)$になる。これから、尖り度の総和が$720°$であることは理解できるだろう。

オイラーの多面体定理を用いると、正多面体は五種類しかないことが証明できるが、尖り度からも調べることが可能である。さらにデカルトの定理から、形状、面、辺、頂点の個数すべてを求めることができる。以下、示そう。

正多面体のひとつの頂点の周りに正$n$角形が$m$個集まっているとする。

正$n$角形の内角は、$180°-\dfrac{360°}{n}$であるから、頂点の周りの角度の総和は、$m\left(180°-\dfrac{360°}{n}\right)$である。

これから尖り度$t$は、

$$t=360°-m\left(180°-\frac{360°}{n}\right)=\frac{180°(2m+2n-mn)}{n}$$

で与えられる。

ここで、多面体ができるためには尖り度が必要であるから、$t>0°$である。これから

$$2m+2n-mn>0$$
式を変形すると、$(m-2)(n-2)<4$
以上より、

$$(m-2,n-2)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$$
$$\therefore \quad (m,n)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$$

である。

これから、$n=3,4,5$、すなわち、面の形状は、正三角形、正方形、正五角形の 3 つであり、組合せの数から、正多面体の種類は5つと推測できる。しかし、実際に多面体が作られている保証はない。

さらに、$m,n$ を用いて、面の数 $f$、辺の数$e$、頂点の数$v$ をそれぞれ表してみよう。

尖り度の和は$720°$ であるから、$vt=720°$　より、

$$v=\frac{720°}{t}=\frac{4n}{2m+2n-mn}$$

また、正$n$ 角形の頂点数の総和を考えると、$nf=mv$　より、

$$f=\frac{m}{n}v=\frac{4m}{2m+2n-mn}$$

同様に、正$n$ 角形の辺数の総和から、$nf=2e$　より、

$$e=\frac{n}{2}f=\frac{2mn}{2m+2n-mn}$$

以上より、$s=2m+2n-mn$ とおくと、

$$f=\frac{4m}{s},\quad e=\frac{2mn}{s},\quad v=\frac{4n}{s}$$

である。
では、正多面体の種類を求めてみよう。

$(m,n)=(3,3)$ のとき、$s=3$ より、$f=4, e=6, v=4$　…正四面体
$(m,n)=(3,4)$ のとき、$s=2$ より、$f=6, e=12, v=8$　…立方体
$(m,n)=(3,5)$ のとき、$s=1$ より、$f=12, e=30, v=20$　…正十二面体
$(m,n)=(4,3)$ のとき、$s=2$ より、$f=8, e=12, v=6$　…正八面体
$(m,n)=(5,3)$ のとき、$s=1$ より、$f=20, e=30, v=12$　…正二十面体

正多面体の面は、正三角形、正方形、正五角形で作られる五種類しかないことが示された。
多面体ができるためには尖り度$t$ は、$t>0°$ である必要があった。$t=0°$ のときは、尖らない。
これから、$t=0°$ のときは、頂点の周りに隙間なく多角形が敷き詰められることになる(平面充填)。
その証明はピタゴラスが与えているが、これも尖り度から求められるものである。

$t=0°$ のとき、$2m+2n-mn=0$
これを変形して、

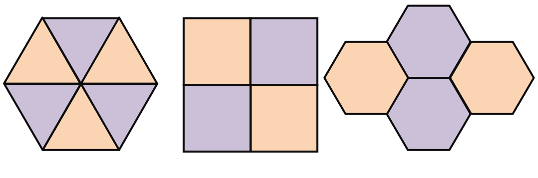
$$(m-2)(n-2)=4$$

$m≧3,\ n≧3$ であることから、

$$(m-2,n-2)=(1,4),\ (2,2),\ (4,1)$$

これより、

$$(m,n)=(3,6),\ (4,4),\ (6,3)$$



これは、正三角形は6枚、正方形は4枚、正六角形は3枚で頂点の周りの角度の和は$360°$ になり、余った角度はないため平面を埋め尽くすことができる。これらの1つの正多角形のみで平面が敷き詰められるとき、その平面全体を正平面充填形(Regular Tessellation)という。

では複数の正多角形で平面充填はできるだろうか。

まず、内角が最小である角は、正三角形の$60°$ であり、内角は$180°$ より小さいからく、平面充填するための多角形の個数は、3個以上6個以下であるが、6個の場合は正三角形6つの組合せである。

平面充填が可能な正多角形を、$a_k$ $(1≦k≦n,\ a_k≧3)$ とすると、内角の総和が$2\pi$ であることより、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{a_k}\right)\pi=2\pi \qquad (n=3,4,5)$$

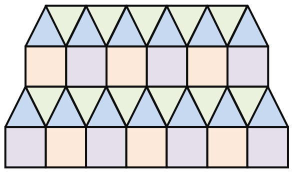
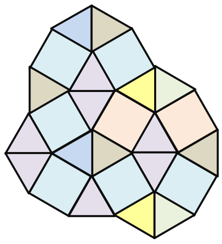
これより、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n-2}{2} \qquad (n=3,4,5)$$

である。これを満たす $a_k$ の組でプラトンの正平面充填形でないものは次の８通りである。
(括弧内は、頂点の周りの正多角形の順序を表す)

①正三角形４枚　正六角形１枚　…(3,3,3,3,6)
②正三角形３枚　正方形２枚　…(3,3,3,4,4)
③正三角形３枚　正方形２枚　…(3,3,4,3,4)
④正三角形１枚　正方形２枚　正六角形１枚　…(3,4,6,4)
⑤正三角形２枚　正六角形２枚　…(3,6,3,6)
⑥正三角形１枚　正十二角形２枚　…(3,12,12)
⑦正方形１枚　正六角形１枚　正十二角形１枚　…(4,6,12)
⑧正方形１枚　正八角形２枚　…(4,8,8)

平面がこれらの正多面体で敷き詰められるとき、その平面をアルキメデスの平面充填形という。
なお、②と③は２種の同じ枚数の正多角形で作られているが、頂点の周りの配置が異なる。1 つの正三角形と正方形を入れ替えただけでまるで違ったモザイク模様が描かれるのである。

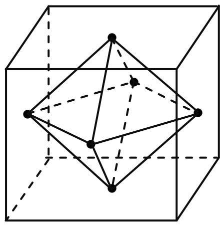
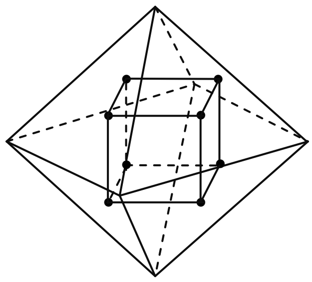
本文の最後に載せた表は、正多面体の面の形状、面・辺・頂点の数、尖り度についてまとめたものであるが、正六面体と正八面体の辺数は同じであり、面数と頂点数が入れ替わった配置になっている。
同じことは、正十二面体と正二十面体についてもいえる。これが成立するのは、正多面体の面数 $f$ と頂点数 $v$ の関係、

$$f=\frac{4m}{s},\quad e=\frac{2mn}{s},\quad v=\frac{4n}{s}\qquad (s=2m+2n-mn)$$

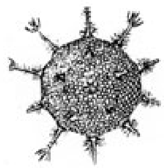
から明らかである。これもまた、オイラーの多面体定理、デカルトの定理の恩恵である。
なお、$m=n$ のときは正四面体であり、このときはカップルとなる立体はない。このように、

正四面体　⇔　正四面体
正六面体　⇔　正八面体
正十二面体　⇔　正二十面体

といった対の関係を正多面体の双対性という。
双対の立体は、各面(正多角形)の外接円の中心をとり、これらを頂点とする多面体を考えると作ることができる。作られた双対立体の面の中心はもとの正多面体の向かい合う頂点を結んだ直線上に位置している。右図は、正六面体と正八面体の双対を示したものである。

正多面体は、プラトンの立体(Platonic solid)ともいわれる。
古代ギリシアの哲学者プラトンは、世界は、「火・空気・水・土」の 4 つの元素でできていると信じ、著書「ティマイオス」の中で、火は正四面体、空気は正八面体、水は正二十面体、土は立方体であるとし、残った正十二面体は宇宙全体を表していると考えた。正十二面体がもっとも球、すなわち完全に近い正多面体であり、面である正五角形には自然界の調和美である黄金比が秘められていることを知っていたのだろう。プラトンは正多面体が 5 種類しかないことを知ってはいたが、証明をしていたかどうかは定かでない。書物にその証明を記したのは、ユークリッドであり、原論の最終章(第 13 巻)の最後の命題としてクライマックスを飾り、証明を結んでいる。
プラトン以前ではピタゴラスも正多面体について知っており、どの時代にあってもその存在の痕跡を残しているのである。それは、正多面体は自然界に多く存在する形であり、自然が形作る産物そのものであるからだろう。古くはスコットランドで、新石器時代に作られたと見られる正多面体の玉石がみつかっている。それは、生物の遺伝子や鉱物の結晶に形状が引き継がれているからなのかもしれない。

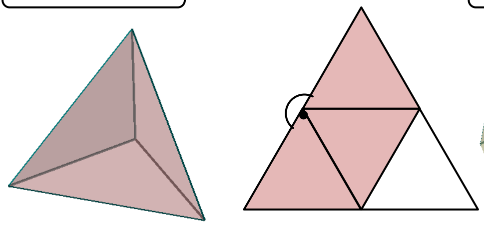


正四面体であるオオマツヨイグサの花粉、立方体であるダリアの花粉、正八面体であるダイアモンドの結晶、正十二面体であるカスミソウの花粉、正二十面体である黄鉄鉱の結晶。
そして、右図の原生生物である放散虫には５種類の正多面体すべての形状が見られるのである。
これほど興味深い単元が、いままで眠っていたのは信じられないことである。「眠っていた」ことは、多面体を扱っている書物から知ることができる。本文およびこのあとがきの内容は、遠山　啓著、全集「数学のひろば」(ほるぷ出版)の中の第４集「３次元の世界(立体幾何)」に依るところが大きい。中学生以上を対象に書かれた本であり、小手技シリーズのように、会話文を通して数学の話題が語られるが、その内容の深さはいまの大学生にも難しいかもしれない。オイラーの多面体についても円環体(トーラス)上にまで話は及ぶのである。ただ、この書籍は残念ながら絶版である。
また、高木貞治著「数学小景」も、そのページの半分はオイラーの一筆書きや多面体に関する話題で占められており、ハミルトンの世界周遊戯のパズルの解答も軽妙に語られる。この本はエッセイとして執筆されたものであり、江戸弁の口調を通し、ママさん、お嬢さん、お婆さんといった読者を対象にし、プラトンでさえ「恋にも名を貸した彼氏」と揶揄しながらも緻密に、論理的に話が進められるのである。こちらの方は、2002 年に復刻版が岩波現代文庫より出されている。
どちらの本も昭和の頃の書物である。すなわち、空間的な思考の柔らかさや応用力はその頃は若者たちに根付いていたということなのである。3D が当たり前の世の中ではあるが、ある意味それは 2D のイメージであり、想像、創造からは遠く離れたものなのかもしれない。

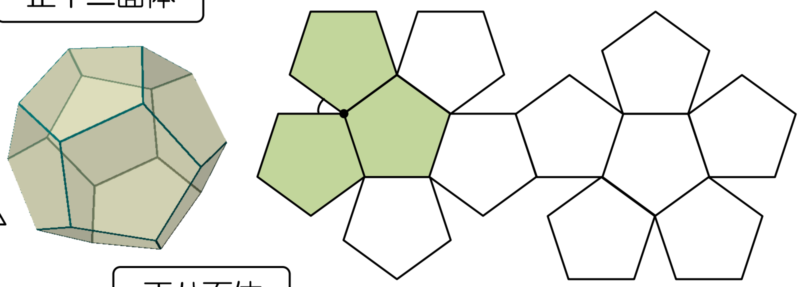
# ◆正多面体の面・辺・頂点の性質

**正十二面体と正二十面体のボールはどちらが当たると痛い!!!**

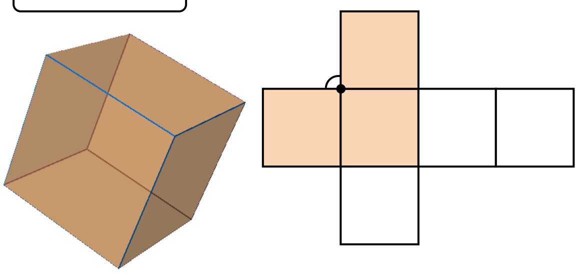
正四面体



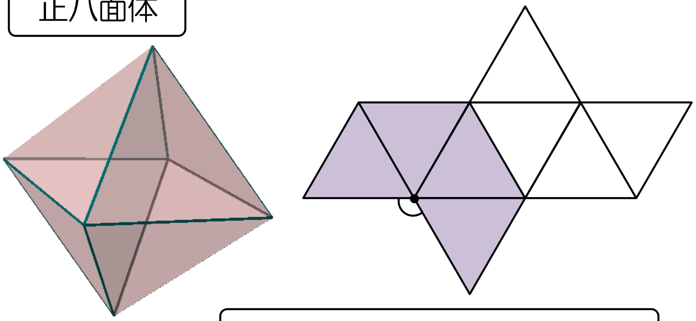
正十二面体



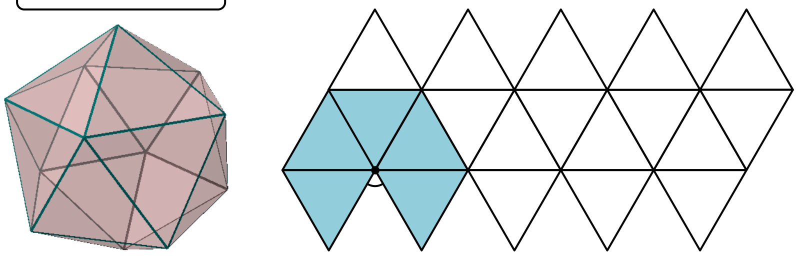
正六面体



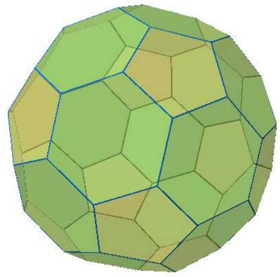
正八面体



正二十面体



準正多面体…角切り二十面体



◆正多面体の面・辺・頂点・尖り度

| 多面体 ＼ 項目 | 面の形 | 頂点共有の面数 | 面数 (Face) | 辺数 (Edge) | 頂点数 (Vertex) | $F-E+V$ | 尖り度 (不足角) | 尖り度の和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | 正三角形 | 3 | 4 | 6 | 4 | 2 | 180° | 720° |
| 正六面体 | 正方形 | 3 | 6 | 12 | 8 | 2 | 90° | 720° |
| 正八面体 | 正三角形 | 4 | 8 | 12 | 6 | 2 | 120° | 720° |
| 正十二面体 | 正五角形 | 3 | 12 | 30 | 20 | 2 | 36° | 720° |
| 正二十面体 | 正三角形 | 5 | 20 | 30 | 12 | 2 | 60° | 720° |

◆正多面体の面・辺・頂点の関係

○ オイラーの定理

平面 …… $F-E+V=1$ 　　空間 …… $F-E+V=2$

○ デカルトの定理

平面 …… 図形の尖り度の和は360° 　　空間 …… 図形の尖り度の和は720°

※尖り度は、角度が大きいほど尖っていることを示す。だから、正十二面体の方が正二十面体より尖っていないので痛くない。正十二面体はもっとも球に近い正多面体である。