胡蝶の羽ばたきを追う

――― 方べきの定理による胡蝶定理の証明 ―――

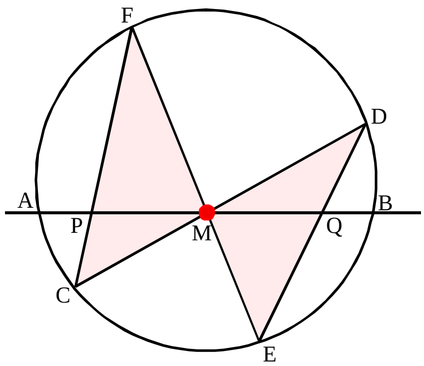
札幌旭丘高校　中村文則

胡の国は，紀元前５世紀頃，現在のイランの地に栄えた国であり西胡とも呼ばれていた．胡は胡弓の幽玄な音色のようにミステリアスな国として知られ，胡麻，胡瓜など「胡」のつく様々なものがシルクロードを通って中国に伝わる．この国に生息する蝶もまた神秘的な生き物であり，前世，現世，来世を飛び交うことができる幻の蝶といわれた．

平面幾何でも胡蝶の名を冠する定理があり，閑雅で美しい．

<胡蝶の定理>

弦 AB の中点を M とし， M を通る２つの弦 CD, EF を端点 C, E が弧 AB の同じ側にあるように引く．弦 CF, ED と弦 AB との交点をそれぞれ P, Q とするとき， AP = BQ である．



円の虫かごに囚われた蝶が羽を広げ，時空に羽ばたこうとしているかのような定理である．真上から見下ろす蝶の様は，古来より家紋として用いられ，よく知られている(右図参照)．

胡蝶の定理の証明は，その神秘性に魅せられた人達により，様々な美しい方法が考えられている．ここでは「方べきの定理」を証明の核に据え，その羽ばたきを眺め，羽ばたきの先にあるものを追っていくことにする．

証明)

点 P から直線 CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2，

点 Q から直線 CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれ H_3, H_4 とする．

弦 CE の円周角より， $\angle CFE = \angle CDE$.

よって， $\Delta FPH_2 \backsim \Delta DQH_3$ であるから，

$$\frac{FP}{DQ} = \frac{PH_2}{QH_3} \quad \cdots ①$$

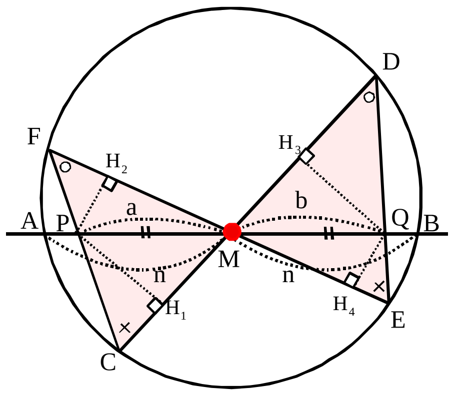
同様に，弦 FD の円周角より， $\angle FCD = \angle FED$.

よって， $\Delta PCH_1 \backsim \Delta QEH_4$ であるから，

$$\frac{PC}{QE} = \frac{PH_1}{QH_4} \quad \cdots ②$$

①，②を辺々掛けて，

$$\frac{FP \cdot PC}{DQ \cdot QE} = \frac{PH_2 \cdot PH_1}{QH_3 \cdot QH_4} = \frac{PH_1}{QH_3} \cdot \frac{PH_2}{QH_4} \quad \cdots ③$$



ここで， $\Delta MPH_1 \backsim \Delta MQH_3$ より， $\dfrac{PH_1}{QH_3} = \dfrac{MP}{MQ}$，

$\Delta MPH_2 \backsim \Delta MQH_4$ より， $\dfrac{PH_2}{QH_4} = \dfrac{MP}{MQ}$

③より，

$$\frac{FP \cdot PC}{DQ \cdot QE} = \frac{PH_1}{QH_3} \cdot \frac{PH_2}{QH_4} = \frac{MP^2}{MQ^2} \quad \cdots ④$$

また，方べきの定理より，

$$FP \cdot PC = AP \cdot PB, \quad DQ \cdot QE = BQ \cdot QA$$

辺々割って，

$$\frac{\mathrm{FP}\cdot\mathrm{PC}}{\mathrm{DQ}\cdot\mathrm{QE}}=\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB}}{\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{QA}} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤より， $\dfrac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{MQ}^2}=\dfrac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB}}{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{QB}}$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}}{\mathrm{PM}^2}=\frac{\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}}{\mathrm{QM}^2} \quad \cdots\cdots(*)$$

$\mathrm{PM}=a,\ \mathrm{QM}=b$，　$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=n$ とおくと，(*)より

$$\frac{(n-a)(n+a)}{a^2}=\frac{(n-b)(n+b)}{b^2}$$

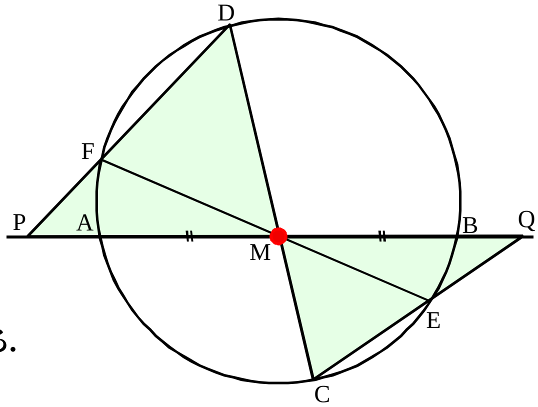
$$\therefore \quad \frac{n^2}{a^2}-1=\frac{n^2}{b^2}-1$$

$n\neq 0$ であるから，　$a=b$．

$\mathrm{AP}=n-a,\ \mathrm{BQ}=n-b$ より，　$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}$　　　　　　Q.E.D

2つの弦の端点の結び方を変えることにより，蝶は虫かごから羽を伸ばし，胡蝶の定理は拡張される．

<胡蝶の定理 2>
弦 AB の中点を M とし， M を通る2つの弦 CD, EF を端点 C, E が弧 AB の同じ側にあるように引く．
直線 DF, CE が直線 AB と平行でないとき，直線 AB と交わる点をそれぞれ P, Q とすると， PA＝QB である．



証明)
点 P から直線 CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_1, H_2}$，
点 Q から直線 CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_3, H_4}$ とする．

弦 FC の円周角より，

$\angle\mathrm{FDC}=\angle\mathrm{FEC}=\angle\mathrm{QEH_4}$ (対頂角)

よって， $\Delta\mathrm{PDH_1}\backsim\Delta\mathrm{QEH_4}$ より

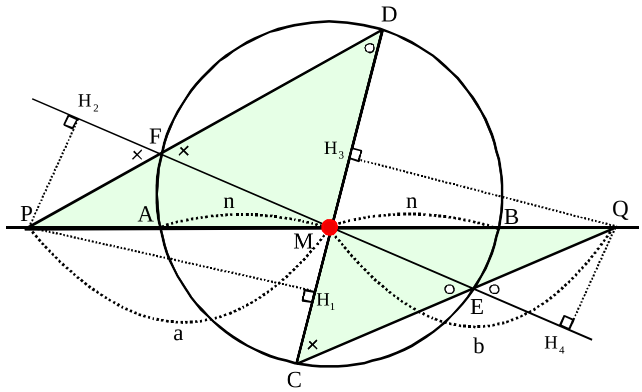
$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{QE}}=\frac{\mathrm{PH_1}}{\mathrm{QH_4}} \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，弦 DE の円周角より，

$\angle\mathrm{DCE}=\angle\mathrm{DFE}=\angle\mathrm{PFH_2}$

よって， $\Delta\mathrm{QCH_3}\backsim\Delta\mathrm{PFH_2}$ より，

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{PH_2}}{\mathrm{QH_3}} \quad \cdots\cdots ②$$



①，②を辺々掛けて，

$$\frac{\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PF}}{\mathrm{QE}\cdot\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{PH_1}\cdot\mathrm{PH_2}}{\mathrm{QH_4}\cdot\mathrm{QH_3}}=\frac{\mathrm{PH_1}}{\mathrm{QH_3}}\cdot\frac{\mathrm{PH_2}}{\mathrm{QH_4}} \quad \cdots\cdots ③$$

また， $\Delta\mathrm{MPH_1}\backsim\Delta\mathrm{MQH_3}$ より， $\dfrac{\mathrm{PH_1}}{\mathrm{QH_3}}=\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}$

$\Delta\mathrm{MPH_2}\backsim\Delta\mathrm{MQH_4}$ より， $\dfrac{\mathrm{PH_2}}{\mathrm{QH_4}}=\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}$

③より，

$$\frac{\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PF}}{\mathrm{QE}\cdot\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{PH_1}}{\mathrm{QH_3}}\cdot\frac{\mathrm{PH_2}}{\mathrm{QH_4}}=\frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{MQ}^2} \quad \cdots\cdots ④$$

また方べきの定理より，

$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$，　$\mathrm{QE}\cdot\mathrm{QC}=\mathrm{QB}\cdot\mathrm{QA}$

辺々割って，

$$\frac{PF\cdot PD}{QE\cdot QC}=\frac{PA\cdot PB}{QB\cdot QA} \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤より，

$$\frac{MP^2}{MQ^2}=\frac{PA\cdot PB}{QB\cdot QA} \quad \therefore \quad \frac{PA\cdot PB}{PM^2}=\frac{QA\cdot QB}{QM^2} \quad \cdots\cdots(*)$$

$PM=a,\ QM=b$ とおき，$AM=BM=n$ とすると，

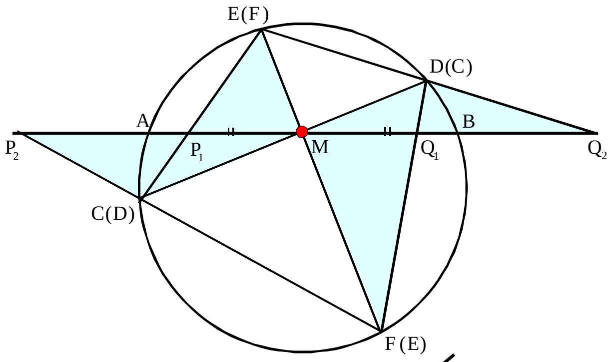
$$\frac{(a-n)(a+n)}{a^2}=\frac{(b-n)(b+n)}{b^2}$$

$$1-\frac{n^2}{a^2}=1+\frac{n^2}{b^2}$$

$n\neq 0$ より，$a=b$

$PA=a-r,\ QB=b-r$ より，$PA=QB$ Q.E.D

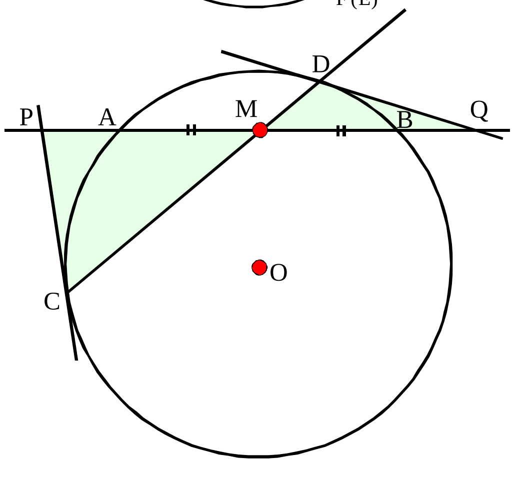
この２つの定理から，弦 AB の中点 M を通る２つの弦 CD, EF の端点である C, E は同じ側にある必要はないことが分る．



<胡蝶の定理 3>

弦 AB の中点を M とし，M を通る２つの弦 CD, EF が直線 AB と交わる点をそれぞれ P, Q とする．
このとき，$PA=QB$ である．

胡蝶の定理 2 において，$E\to C$，$F\to D$ と極限を考えることで，２つの弦 AB, CD が一致する場合については C, D におけるそれぞれの接線に対し定理は成立する．



<胡蝶の定理 4>

弦 AB の中点を M とし，M を通る弦 CD の端点 C, D から引いた接線が直線 AB と交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，$PA=QB$ である．

証明)

点 P, Q から直線 CD に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする．

$\angle CPH_1+\angle PCH_1=\angle R=\angle PCH_1+\angle OCD$ より，

$\angle CPH_1=\angle OCD$

$\angle DQH_2+H_2DQ=\angle R=\angle ODC+H_2DQ$ より，

$\angle DQH_2=\angle ODC$

また，三角形 COD は二等辺三角形より，

$\angle OCD=\angle ODC$

よって，$\angle CPH_1=\angle DQH_2$

$\therefore \quad \Delta CPH_1\backsim\Delta DQH_2$ より $\dfrac{PC}{QD}=\dfrac{PH_1}{QH_2}$ …①

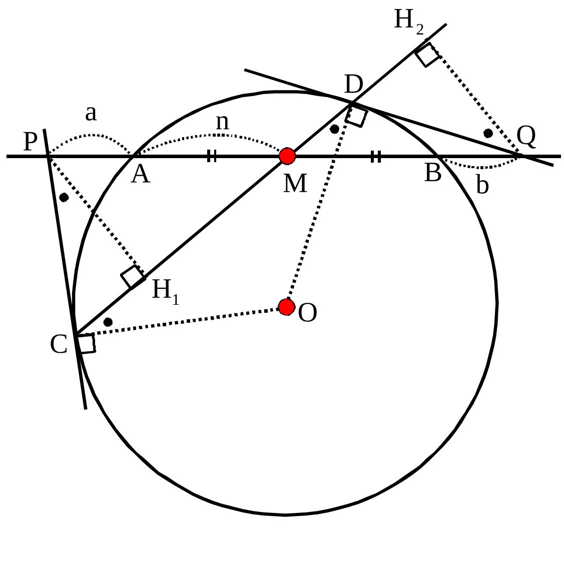
$\Delta PH_1M\backsim\Delta QH_2M$ より $\dfrac{PM}{QM}=\dfrac{PH_1}{QH_2}$ …②

①，②より，$\dfrac{PC}{QD}=\dfrac{PM}{QM}$

また，方べきの定理より，

$PC^2=PA\cdot PB$，$QD^2=QB\cdot QA$

これから $\dfrac{PA\cdot PB}{QB\cdot QA}=\dfrac{PC^2}{QD^2}=\dfrac{PM^2}{QM^2}$



$$\therefore \quad \frac{PA \cdot PB}{PM^2} = \frac{QA \cdot QB}{QM^2} \quad \cdots\cdots(*)$$

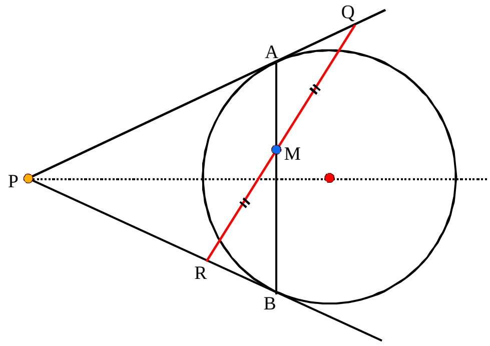
ここで，$AM = BM = n$，$PA = a, PB = b$ とおくと，(*)より，

$$\frac{a(a+2n)}{(a+n)^2} = \frac{b(b+2n)}{(b+n)^2}$$ 変形して，

$$1 - \frac{n^2}{(a+n)^2} = 1 - \frac{n^2}{(b+n)^2}$$ より，$(a+n)^2 = (b+n)^2$

$\therefore a = b$　　以上より　$PA = QB$　　Q.E.D

なお，２接線の交点を極とみると次のように表すことができる．

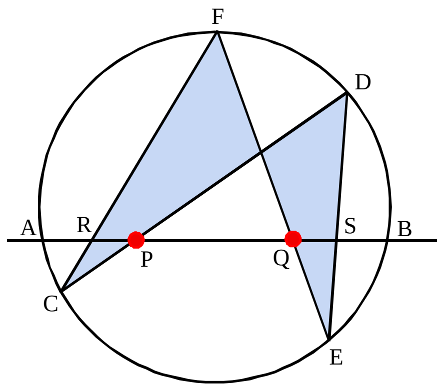


極P から引いた２接線の極線上に，ある弦の中点M があるとき，その弦の延長が２接線と交わる点をQ, R とすると，

$MQ = MR$

である．

胡蝶の定理４は，２つの弦の端点が一致した場合であるが，弦の中点M についても，弦の上の２つの点が一致した場合であると解釈することで拡張することができる．



<胡蝶の定理 5>
弦AB 上に，$AP = BQ$ となるように，P, Q を A, P, Q, B の順にとる．P, Q のそれぞれを通る弦CD, EF を端点C, E が弧AB の同じ側にあるように引く．弦CF, ED と弦AB との交点をR, S するとき，$AR = BS$ である．

証明)

点R から直線CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれH_1, H_2，
点S から直線CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれH_3, H_4 とする．

弦CE の円周角から，$\angle CFE = \angle CDE$

よって，$\Delta RFH_2 \backsim \Delta SDH_3$ より $\dfrac{FR}{DS} = \dfrac{RH_2}{SH_3}$　……①

弦FD の円周角より，$\angle FCD = \angle FED$．

よって，$\Delta RCH_1 \backsim \Delta SEH_4$ より $\dfrac{RC}{SE} = \dfrac{RH_1}{SH_4}$　……②

①，②を辺々割って，

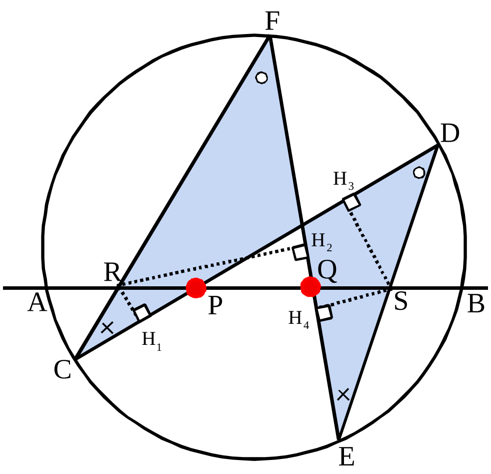
$$\frac{FR \cdot RC}{DS \cdot SE} = \frac{RH_2}{SH_3} \cdot \frac{RH_1}{SH_4} = \frac{RH_2}{SH_4} \cdot \frac{RH_1}{SH_3} \quad \cdots\cdots③$$

ここで，$\Delta PRH_1 \backsim \Delta PSH_3$，$\Delta QSH_4 \backsim \Delta QRH_2$ であるから，

$$\frac{RH_1}{SH_3} = \frac{PR}{PS}, \frac{RH_2}{SH_4} = \frac{RQ}{SQ}$$

よって，③より，

$$\frac{FR \cdot RC}{DS \cdot SE} = \frac{RQ}{SQ} \cdot \frac{PR}{PS} \quad \cdots\cdots④$$



また方べきの定理より，

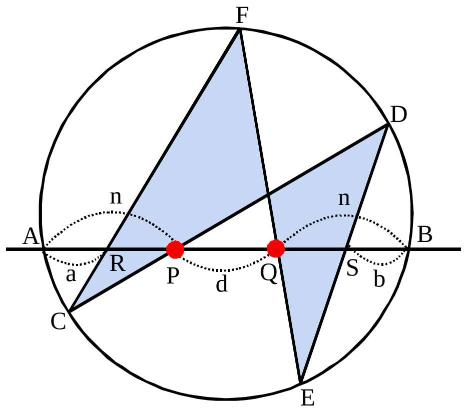
$FR \cdot RC = AR \cdot RB$，$DS \cdot SE = BS \cdot SA$

辺々割って，

$$\frac{FR \cdot RC}{DS \cdot SE} = \frac{AR \cdot RB}{BS \cdot SA} \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤より，

$$\frac{PR \cdot RQ}{PS \cdot SQ} = \frac{AR \cdot RB}{AS \cdot SB} \quad \text{すなわち，} \quad \frac{PR \cdot RQ}{AR \cdot RB} = \frac{PS \cdot SQ}{AS \cdot SB} \quad \cdots\cdots (*)$$



ここで，$AR = a,\ BQ = b$，$AP = BQ = n$，$PQ = d$ とおく．

(*)より，

$$\frac{(n-a)(n-a+d)}{a(2n+d-a)} = \frac{(n-b+d)(n-b)}{b(2n+d-b)}$$

$$\frac{a^2-(2n+d)b+n(n+d)}{a(2n+d-a)} = \frac{b^2-(2n+d)a+n(n+d)}{b(2n+d-b)}$$

$$\therefore \quad -1+\frac{n(n+d)}{a(2n+d-a)} = -1+\frac{n(n+d)}{b(2n+d-b)}$$

これより，$a(2n+d-a) = b(2n+d-b)$

$$a^2-b^2-(2n+d)(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-2n-d)=0$$

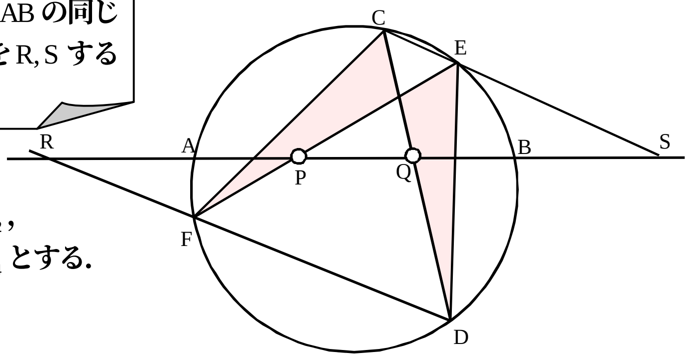
ここで，$a+b-(2n+d) = AR+BQ-AB \neq 0$ であるから，

$a = b \quad \therefore \quad AR = BQ$ Q.E.D

次に，胡蝶の定理３のように弦の端点の結び方を変えてみよう．

<胡蝶の定理 6>

弦 AB 上に，$AP = BQ$ となるように，P, Q を A, P, Q, B の順にとる．P, Q のそれぞれを通る弦CD, EF を端点C, E が弧 AB の同じ側にあるように引く．弦CE, DF と直線 AB との交点をR, S するとき，$AR = BS$ である．



証明)

点R から直線CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれH_1, H_2，

点S から直線CD, EF に下ろした垂線の足をそれぞれH_3, H_4 とする．

$\angle FDC = \angle FEC = \angle SEH_4$ より $\Delta RDH_1 \backsim \Delta SEH_4$

$$\therefore \quad \frac{RD}{SE} = \frac{RH_1}{SH_4} \quad \cdots\cdots ①$$

$\angle DCE = \angle DFE = \angle RFH_2$ より $\Delta RFH_2 \backsim \Delta SCH_3$

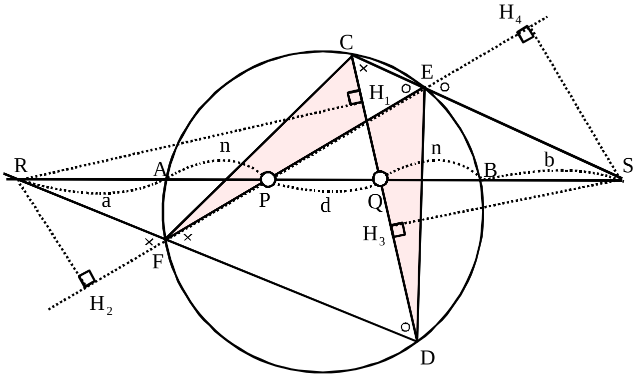
$$\therefore \quad \frac{RF}{SC} = \frac{RH_2}{SH_3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を辺々かけて，

$$\frac{RD \cdot RF}{SE \cdot SC} = \frac{RH_1}{SH_4} \cdot \frac{RH_2}{SH_3} = \frac{RH_1 \cdot RH_2}{SH_3 \cdot SH_4}$$

また，$\Delta QRH_1 \backsim \Delta QSH_3$ より，$\dfrac{RH_1}{SH_3} = \dfrac{RQ}{SQ}$

$\Delta PRH_2 \backsim \Delta PSH_4$ より，$\dfrac{RH_2}{SH_4} = \dfrac{RP}{SP}$



これより，

$$\frac{RD \cdot RF}{SE \cdot SC} = \frac{RH_1}{SH_3} \cdot \frac{RH_2}{SH_4} = \frac{RQ}{SQ} \cdot \frac{RP}{SP} \quad \cdots ③$$

ここで，方べきの定理より，

$RD \cdot RF = RA \cdot RB$，$SE \cdot SC = SB \cdot SA$ であるから，

$$\frac{RD\cdot RF}{SE\cdot SC}=\frac{RA\cdot RB}{SB\cdot SA}\quad\cdots④$$

③，④より，

$$\frac{RA\cdot RB}{SB\cdot SA}=\frac{RQ\cdot RP}{SQ\cdot SP}$$

$$\therefore\quad \frac{RP\cdot RQ}{RA\cdot RB}=\frac{SP\cdot SQ}{SA\cdot SB}\quad\cdots\cdots(*)$$

$AP=BQ=n$，　$PQ=d$　$RP=a, SQ=b$ とおく．

(*)より，

$$\frac{(a+n)(a+n+d)}{a(a+2n+d)}=\frac{(b+n)(b+n+d)}{b(b+2n+d)}$$

これを整理して，

$$\frac{a(a+2n+d)+n(n+d)}{a(a+2n+d)}=\frac{b(b+2n+d)+n(n+d)}{b(b+2n+d)}$$

$$1+\frac{n(n+d)}{a(a+2n+d)}=1+\frac{n(n+d)}{b(b+2n+d)}$$

$$\therefore\quad a(a+2n+d)=b(b+2n+d)$$

$$a^2-b^2+(2n+d)(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b+2n+d)=0$$

$\therefore$　$a=b$　　以上より　$AR=BS$　　　　　　　Q.E.D

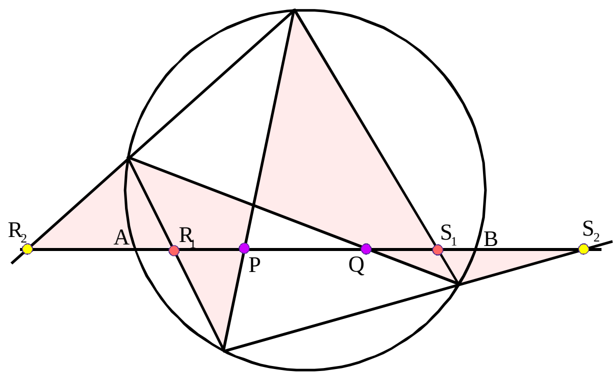
胡蝶の定理 5，6 より弦の端点の結び方に拠らないで，定理が成立することが分る．

<胡蝶の定理 7>

弦 AB 上に，$AP=BQ$ となるように，P, Q を A, P, Q, B の順にとり，P, Q のそれぞれを通る弦 CD, EF を引く．直線 CE, DF が直線 AB と交わる点をそれぞれ R, S とすると，

$AR=BS$

である．

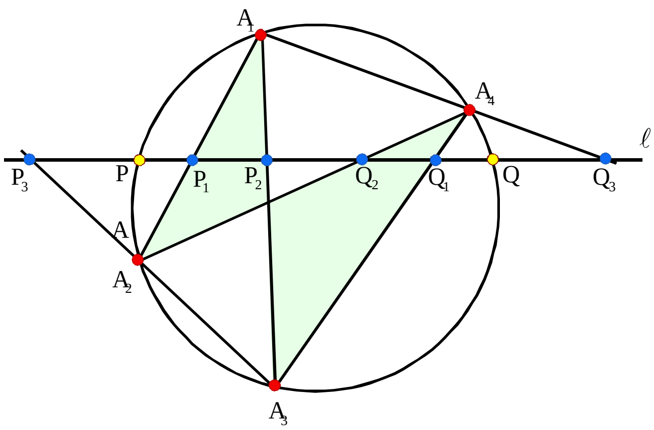


さらにこれらの定理をまとめることで，次の定理を得る．

<胡蝶の定理 8>

円 O と直線 ℓ の交点を P, Q とする．円周上の四角形 $A_1A_2A_3A_4$ において，直線 ℓ と直線 A_1A_2，A_3A_4 との交点をそれぞれ P_1, Q_1 とし，同様に A_1A_3，A_2A_4 との交点を P_2, Q_2，　A_2A_3，A_4A_1 との交点を P_3, Q_3 とする．

このとき，ある $k(k=1,2,3)$ に対して，　$PP_k=QQ_k$ であれば，残りの k に対しても $PP_k=QQ_k$ が成立する．



証明)

胡蝶の定理 5,6 の(*)より，次式が成立する．

$$\frac{P_1P_2\cdot P_1Q_2}{P_1P\cdot P_1Q}=\frac{Q_1P_2\cdot Q_1Q_2}{Q_1P\cdot Q_1Q}\quad\cdots\cdots(\flat)$$

$$\frac{P_3P_2\cdot P_3Q_2}{P_3P\cdot P_3Q}=\frac{Q_3P_2\cdot Q_3Q_2}{Q_3P\cdot Q_3Q}\quad\cdots\cdots(\sharp)$$

$PP_k=p_k, QQ_k=q_k$ $(k=1,2,3)$ とおく．

$p_2=q_2$ のとき，

胡蝶の定理 5 から($\flat$)より，　$p_1=q_1$

胡蝶の定理 6 から((♯)より， $p_3=q_3$
が示される．
$p_1=q_1$ のとき，
$p_1=q_1=n$ とおくと，(♭)より，

$$\frac{(p_2-n)(p_2+d-n)}{n(p_2+q_2+d-n)}=\frac{(q_2+d-n)(q_2-n)}{n(p_2+q_2+d-n)}$$

$$(p_2-n)(p_2+d-n)=(q_2-n)(q_2+d-n)$$

$$p_2{}^2+(-2n+d)p_2+n(n-d)=q_2{}^2+(-2n+d)q_2+n(n-d)$$

$$\therefore \quad p_2=q_2$$

また　胡蝶の定理 6 から(♯)より， $p_3=q_3$
$p_3=q_3$ のとき，
$p_3=q_3=n$ とおくと，(♯)より，

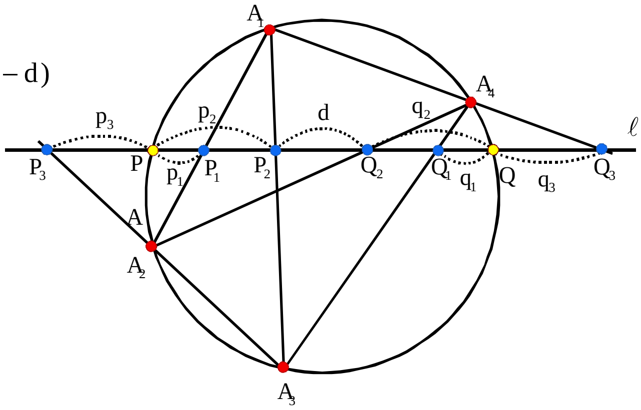
$$\frac{(p_2+n)(p_2+n+d)}{n(n+p_2+q_2+d)}=\frac{(q_2+n)(q_2+n+d)}{n(n+p_2+q_2+d)}$$

$$(p_2+n)(p_2+n+d)=(q_2+n)(q_2+n+d)$$

$$p_2{}^2+(2n+d)p_2+n(n+d)=q_2{}^2+(2n+d)q_2+n(n+d)$$

$$\therefore \quad p_2=q_2$$

また　胡蝶の定理 5 から(♭)より， $p_1=q_1$



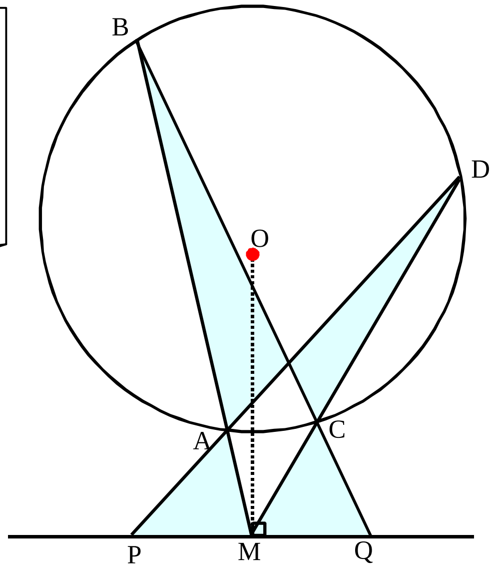
Q.E.D

これらの定理の証明は，それぞれの証明の過程で出現する(*)の性質が胡蝶の羽ばたきの核となっている．
(*)の捉え方により，直線 ℓ 上の交点が変化していくのである．
では，直線 ℓ と円が 2 点で交わらない場合はどうなるだろう．
円によって切り取られる弦は作れないから，弦の両端からの長さを考えることはできない．これを円の中心O から直線 ℓ に下ろした垂線の足M からの長さを基準とすることで，定理の一般化が可能となる．

<胡蝶の定理 9>
円O と直線 ℓ が交わらないとき，中心O から直線 ℓ に下ろした垂線の足を M とし， M を通る 2 直線で作られる円の弦をそれぞれ AB, CD とする．直線 AD, BC と直線 ℓ との交点をそれぞれ P, Q とするとき，

$$MP=MQ$$

である．



証明)
点P から直線 AB, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2
点Q から直線 AB, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ H_3, H_4 とする．
$\angle PAH_1=\angle BAD=\angle BCD=\angle QCH_4$ より， $\Delta APH_1 \backsim \Delta CQH_4$

$$\therefore \quad \frac{PA}{QC}=\frac{PH_1}{QH_4} \quad \cdots①$$

$\angle QBH_3=\angle PDH_2$ より， $\Delta QBH_3 \backsim \Delta PDH_2$

$$\therefore \quad \frac{PD}{QB}=\frac{PH_2}{QH_3} \quad \cdots②$$

①，②を辺々かけて，

$$\frac{PA}{QC}\cdot\frac{PD}{QB}=\frac{PH_1}{QH_4}\cdot\frac{PH_2}{QH_3}=\frac{PH_1}{QH_3}\cdot\frac{PH_2}{QH_4} \quad \cdots③$$

また， $\Delta PMH_1 \backsim \Delta QMH_3$ より， $\dfrac{PH_1}{QH_3}=\dfrac{PM}{QM}$

$\Delta PMH_2 \backsim \Delta QMH_4$ より， $\dfrac{PH_2}{QH_4}=\dfrac{PM}{QM}$

③より，$\dfrac{PA}{QC}\cdot\dfrac{PD}{QB}=\dfrac{PH_1}{QH_3}\cdot\dfrac{PH_2}{QH_4}=\dfrac{PM}{QM}\cdot\dfrac{PM}{QM}$

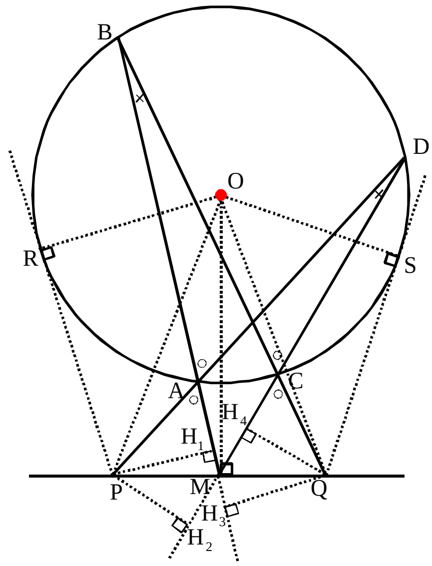
よって，$\dfrac{PA\cdot PD}{QC\cdot QB}=\dfrac{PM^2}{QM^2}$　$\cdots$④

点P,Qより円Oに引いた接線の接点をそれぞれR,Sとすると，
方べきの定理の定理より，

$PA\cdot PD=PR^2$，$QC\cdot QB=QS^2$

$\therefore$ ④より，$\dfrac{PR^2}{QS^2}=\dfrac{PM^2}{QM^2}$

$\therefore$　$\dfrac{PR^2}{PM^2}=\dfrac{QS^2}{QM^2}\cdots(*)$



円Oの半径r，$OM=d$，$OP=p, OQ=q$とおくと，

$PR^2=OP^2-OR^2=p^2-r^2$，$QS^2=OQ^2-OS^2=q^2-r^2$

$PM^2=OP^2-OM^2=p^2-d^2$，$QM^2=OQ^2-OM^2=q^2-d^2$

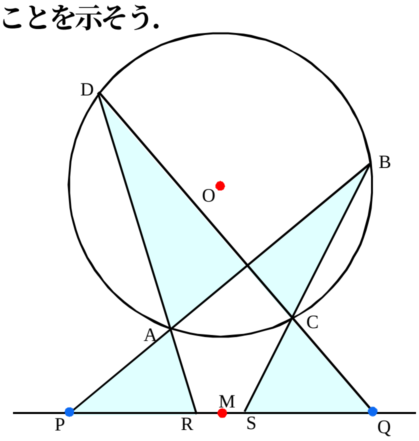
(*)より，$\dfrac{p^2-r^2}{p^2-d^2}=\dfrac{q^2-r^2}{q^2-d^2}$

これより，$1+\dfrac{d^2-r^2}{p^2-d^2}=1+\dfrac{d^2-r^2}{q^2-d^2}$

$\therefore$　$p=q$　これから，ΔOPQは$OP=OQ$の二等辺三角形であり，$OM\perp PQ$より
$MP=MQ$　Q.E.D

なお，直線が円に接する場合については不成立であることは明らかである．
次に，点Mから等距離にある直線上の２点を通る弦についても成立することを示そう．

<胡蝶の定理 10>
円Oと直線ℓが交わらないとき，中心Oから直線ℓに下ろした垂線の足をMとし，直線ℓ上に$MP=MQ$となる２点P,Qをとり，P,Qを通る直線がそれぞれ円と交わるときの弦をAB,CDとする．
直線AD,BCが直線ℓと交わる点をそれぞれR,Sとするとき，
$MR=MS$
である．



証明)
点Pから直線AD,BCに下ろした垂線の足をそれぞれH_1,H_2，
点Qから直線AD,BCに下ろした垂線の足をそれぞれH_3,H_4
とする．

$\Delta APH_1\backsim\Delta CQH_4$より，$\dfrac{PA}{QC}=\dfrac{PH_1}{QH_4}$

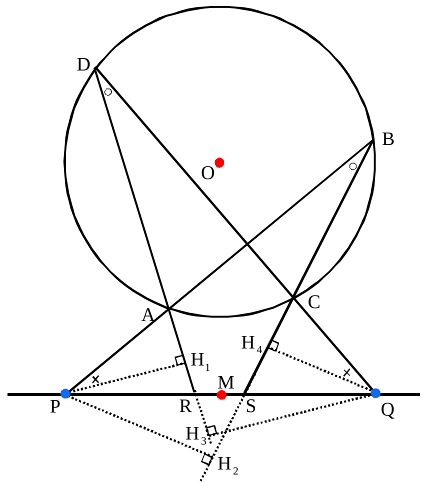
$\Delta BPH_2\backsim\Delta DQH_3$より，$\dfrac{PB}{QD}=\dfrac{PH_2}{QH_3}$

二式を辺々かけて，

$\dfrac{PA\cdot PB}{QC\cdot QD}=\dfrac{PH_1}{QH_4}\cdot\dfrac{PH_2}{QH_3}=\dfrac{PH_1}{QH_3}\cdot\dfrac{PH_2}{QH_4}$　$\cdots\cdots$①

$\Delta PRH_1\backsim\Delta QRH_3$より，$\dfrac{PH_1}{QH_3}=\dfrac{PR}{QR}$

$\Delta PSH_2\backsim\Delta QSH_4$より，$\dfrac{PH_2}{QH_4}=\dfrac{PS}{QS}$



よって，①より，

$$\frac{PA \cdot PB}{QC \cdot QD}=\frac{PH_1}{QH_3}\cdot\frac{PH_2}{QH_4}=\frac{PR}{QR}\cdot\frac{PS}{QS} \qquad \cdots\cdots②$$

ここで，$MP = MQ$ であるから $OP = OQ = d$，円 O の半径を r とすると，
方べきの定理の定理より，

$$PA \cdot PB = \left|d^2 - r^2\right| = QC \cdot QD$$

②の式より，

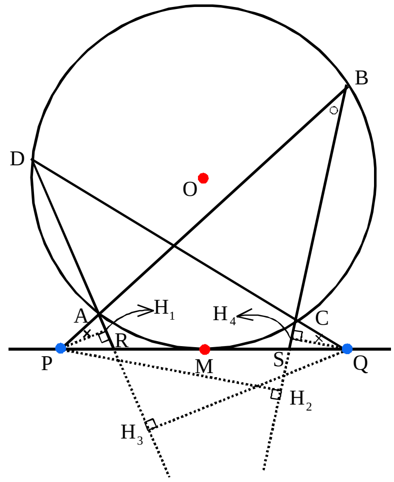
$$\frac{PR \cdot PS}{QR \cdot QS}=1 \quad \therefore \quad PR \cdot PS = QR \cdot QS \qquad \cdots\cdots(*)$$

$MP = MQ = n$，$MR = a,\ MS = b$ とおくと(*)より，

$$(n-a)(n+b)=(n-b)(n+a)$$

$$n^2-(a-b)n-ab = n^2+(a-b)n-ab$$

以上より，$a = b \qquad \therefore \quad MR = MS \qquad$ Q.E.D

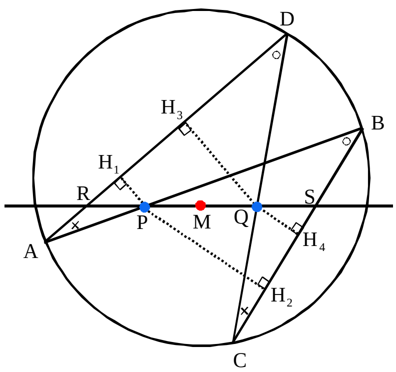
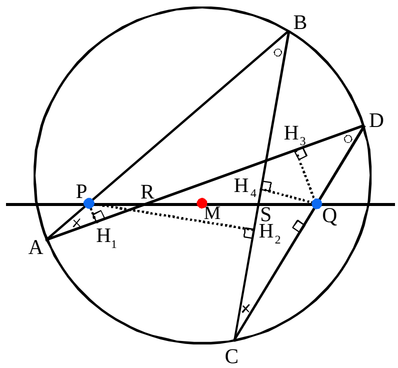
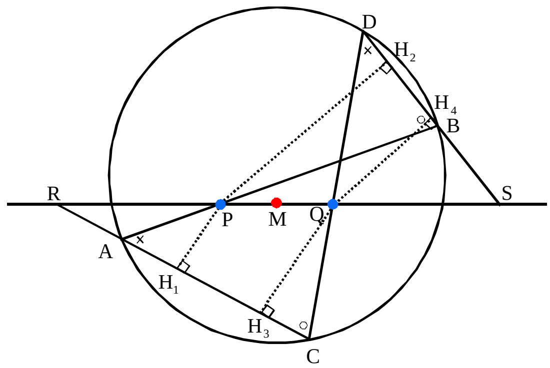


この証明は前述の胡蝶の定理 1～9 の証明と比較すると同じ方べきの定理の利用であっても垂線の引き方で異なっている．

それは前述の証明がいずれも「求める交点から下ろした垂線」を利用しているのに対し，定理 10 は「定点から下ろした垂線」を利用し，方べきの定理を用いている．この求点からの垂線は，弦の中点 M から等距離にある２定点の関する胡蝶の定理 5,6,7, そして直線が円に接する場合に対しても証明をそのままなぞることで(*)の面白い性質

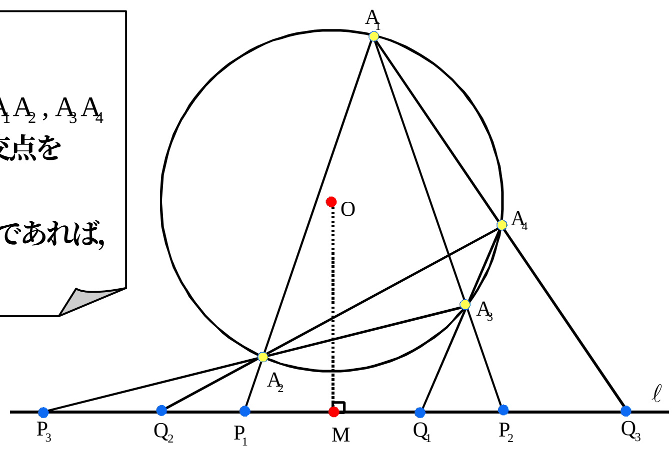
$$PR \cdot PS = QR \cdot QS$$

が導かれ，帰結する．

このように，円と交わらない場合についても成立することより，胡蝶の定理は次のように一般化される．

<胡蝶の定理 11>
円 O から直線 ℓ に下ろした垂線の足を M とする．
円周上の四角形 $A_1A_2A_3A_4$ において，直線 ℓ と直線 A_1A_2，A_3A_4 との交点をそれぞれ P_1, Q_1，同様に A_1A_3，A_2A_4 との交点を P_2, Q_2，A_2A_3，A_4A_1 との交点を P_3, Q_3 とする．
このとき，ある $k(k=1,2,3)$ に対して，$MP_k = MQ_k$ であれば，残りの k に対しても $MP_k = MQ_k$ が成立する．



証明は前述の定理の証明より明らかである．

ここで，一組の P_k, Q_k に対して，$MP_k = MQ_k = 0$ となる場合は，点 M が接点でなければ成立している．

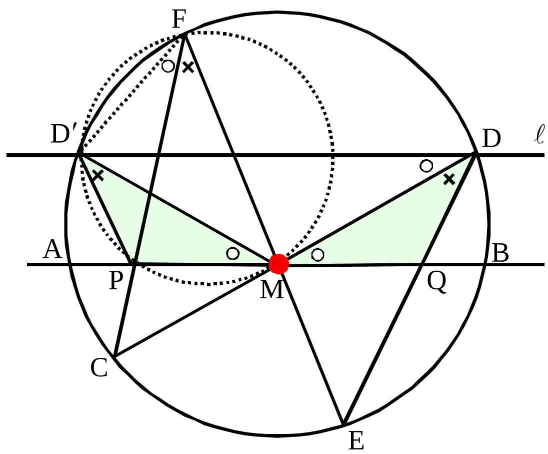
このように，平面上の定円 O の中心から直線 ℓ 上に下ろした垂線の足をバランスの中心とし，定点の組 P_k, Q_k を羽ばたかせることにより，他の２点も同じように羽ばたいていく．
それは，まるで胡蝶が，前世，現世，来世を行き交う姿にも重なるのである．

【胡蝶の定理の平面幾何的な証明】

本文の証明は，方べきの定理を用いることを証明の中軸としている．それぞれの証明の過程に現れる(*)の式は，方べきの定理から派生する面白い性質である．この性質を抽出することで一気に結論が得られることになり，このことに注目したかったのである．しかし，方べきの定理は相似比(辺の長さの比)を辺の積に読み替えることで，解析幾何的な計算を多分に含む結果にもなってしまう．本来の古典幾何的な手法とは遊離してしまった印象は拭えないのも事実である．そこで補助線を利用した証明についても触れておこう．

次の証明は，いずれにおいても，補助線は直線 ℓ に平行で，弦の端点のひとつを通る直線である．この直線に沿って対称となるよう胡蝶の羽の片方をたたむとその姿がみえてくる．

【胡蝶の定理の証明】



点 D を通り弦 AB に平行な直線 ℓ と円との D 以外の交点を D' とする．

ℓ // AB であるから，

$\angle\mathrm{DMB} = \mathrm{D'DM}$ (錯角)

$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ より，$\angle\mathrm{DMB} = \angle\mathrm{D'MA}$

また，$\angle\mathrm{D'DM} = \angle\mathrm{D'DC} = \angle\mathrm{D'FC}$ (円周角)

よって，$\angle\mathrm{D'MA} = \mathrm{D'FC}$ より，$\angle\mathrm{D'FP} = \angle\mathrm{D'MP}$

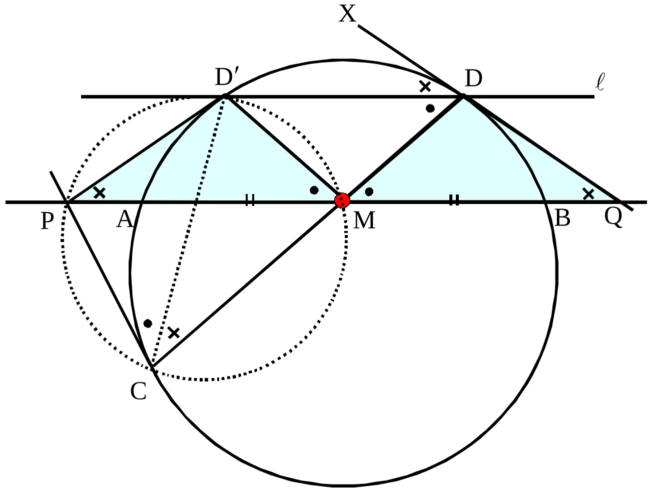
これから，４点 $\mathrm{D'}, \mathrm{P}, \mathrm{M}, \mathrm{F}$ は共円である．

$\therefore\ \ \angle\mathrm{PD'M} = \angle\mathrm{PFM} = \angle\mathrm{CFE} = \angle\mathrm{CDE}$

以上より，$\mathrm{MD'} = \mathrm{MD}$ であるから，$\Delta\mathrm{MD'P} \equiv \Delta\mathrm{MDQ}$

$\therefore\ \ \mathrm{PM} = \mathrm{QM}$ より，$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$ Q.E.D

【胡蝶の定理 4 の証明】



点 D を弦 AB に平行な直線 ℓ と円との D 以外の交点を D' とし，直線QD の D の延長上の点を X とする．

ℓ // AB であるから，

$\angle\mathrm{DMB} = \mathrm{D'DM}$ (錯角)

$\angle\mathrm{D'DM} = \angle\mathrm{D'DC} = \angle\mathrm{D'CP}$ (接弦定理)

$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ より，$\angle\mathrm{DMB} = \angle\mathrm{D'MA}$

よって，$\angle\mathrm{D'MP} = \angle\mathrm{D'MA} = \angle\mathrm{D'CP}$ より，

４点 $\mathrm{D'}, \mathrm{P}, \mathrm{C}, \mathrm{M}$ は共円である．

$\therefore\ \ \angle\mathrm{D'PM} = \angle\mathrm{D'CM} = \angle\mathrm{XDD'}$ (接弦定理)

また，ℓ // AB より，

$\angle\mathrm{XDD'} = \angle\mathrm{DQM}$

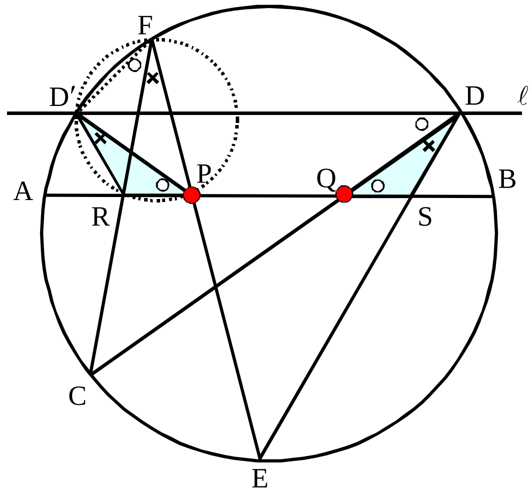
$\therefore\ \ \angle\mathrm{D'MP} = \angle\mathrm{DMQ}$

$\mathrm{MD'} = \mathrm{MD}$ であるから

以上より，$\Delta\mathrm{D'MP} \equiv \Delta\mathrm{DMQ}$

$\therefore\ \ \mathrm{PM} = \mathrm{QM}$ より，$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$ Q.E.D

【胡蝶の定理 5 の証明】



点 D を通り弦 AB に平行な直線 ℓ と円との D 以外の交点を D' とする．

ℓ // AB であるから，$\angle\mathrm{DQB} = \mathrm{D'DQ}$ (錯角)

$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$ より，$\angle\mathrm{DQB} = \angle\mathrm{D'PA}$

また，$\angle\mathrm{D'DQ} = \angle\mathrm{D'DC} = \angle\mathrm{D'FC}$ (円周角)

よって，$\angle\mathrm{D'PA} = \mathrm{D'FC}$ より，$\angle\mathrm{D'FR} = \angle\mathrm{D'PR}$

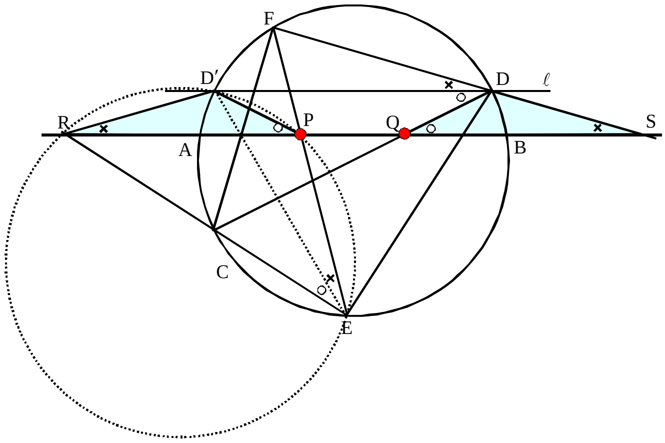
これから，４点 $\mathrm{D'}, \mathrm{R}, \mathrm{P}, \mathrm{F}$ は共円である．

$\therefore\ \ \angle\mathrm{RD'P} = \angle\mathrm{RFP} = \angle\mathrm{CFE} = \angle\mathrm{CDE}$

$\mathrm{PD'} = \mathrm{QD}$ であるから，$\Delta\mathrm{PD'R} \equiv \Delta\mathrm{QDS}$

$\therefore\ \ \mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$ より，$\mathrm{AR} = \mathrm{BS}$ Q.E.D

【胡蝶の定理 6 の証明】



点 D を通り弦 AB に平行な直線 ℓ と円との D 以外の交点を D' とする．

ℓ // AB であるから，

$\angle DQB = D'DQ$ (錯角)

$AP = BQ$ より，$\angle DQB = \angle D'PA$

また，$\angle D'DQ = \angle D'DC = \angle D'EC$ (円周角)

よって，$\angle D'PA = D'EC$ より，$\angle D'ER = \angle D'PR$

これから，４点 D', R, E, P は共円である．

$\therefore \quad \angle D'RP = \angle D'EP = \angle D'EF = \angle D'DF$

$AB // \ell$ より，$\angle D'DF = \angle ASF$ (同位角)

$\therefore \quad \angle D'RP = \angle DSQ$

$PD' = QD$ であるから，$\Delta PD'R \equiv \Delta QDS$

$\therefore \quad AP = BQ$ より，$AR = BS$ 　　　　　Q.E.D

【胡蝶の定理 10 の証明】

点 B を通り直線 ℓ に平行な直線と円との B 以外の交点を B' とする．

$BB' // \ell$ であるから，$\angle BB'Q = \angle PQB'$

$MP = MQ$ より，PB と QB' の交点を N とすると，点 N は OM 上にあり，ΔNPQ は，$NP = NQ$ の二等辺三角形である．

よって，$\angle RQB' = \angle QPB = \angle ABB' = \angle ADB' = \angle RDB'$

(弦 AB' の円周角)

$\therefore \quad \angle RQB' = \angle RDB'$ より，４点 P, S, D, B' は共円である．

弦 RQ の円周角より，$\angle RB'Q = \angle RDQ$

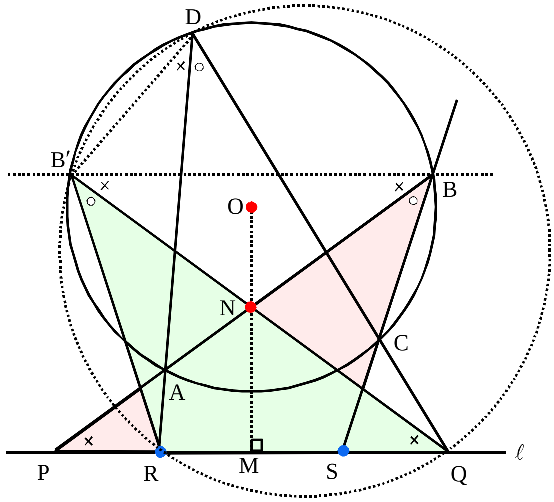
また，弦 AC の円周角より，

$\angle RDQ = \angle ADC = \angle ABC = \angle PBS$

$\therefore \quad \angle PBS = \angle RB'Q$

$PB = QB'$ より，$\Delta PBS \equiv \Delta QB'R$

$\therefore \quad PS = QR$ 　$MP = MQ$ より，$MR = MS$ 　　Q.E.D



源氏物語の第 24 帖の巻名は「胡蝶」である．

この帖で光源氏は養女である玉蔓(たまかずら)に想いを募らす．六条院のはらはら舞い散る花の下で催される春の宴，胡蝶蘭の花のようにひときわ美しい玉蔓に光源氏の心中は穏やかではない．

花園の胡蝶をさへや下草に秋まつ虫は疎く見るらむ

(秋を待つあなたは、花園に舞う胡蝶までもつまらないものと御覧になるのでしょうか)

紫の上はそんなこととは露知らず，仲のよい秋好中宮に歌を詠んでいる．

補助線を用いた胡蝶の定理の証明は，方べきの定理を利用した本文の証明とは異なり，「胡蝶」の帖のように春の陽光を浴び眩く華やかな中で揺れ動く心の機微に触れるような趣を感じさせるのである．

《参考文献》

・円とその応用（穂刈四三二・須田貞之共著 共立出版）

・平面幾何 （小島敏著 SEG 出版）

・ パズルでひらめく補助線の幾何学(ブルーバックス) (中村義作著 講談社)

・ 初等幾何における抽象化と一般化（千歳北陽高校 高倉 亘 HP 数学のいずみ）

※ 本文中の胡蝶の家紋は下記の HP より転載

「家紋の湊」http://www.otomiya.com/kamon/index.htm

本稿は，レポート「方べきの power を解き放つ」中の一例であったが，胡蝶の定理の性質の美しさに魅せられて，独立したレポートとしてまとめたものである．