不思議数との出会いの覚書

0から9までの数字で作られた
帽子を被って笛を吹きジャッジをする
数字の神様

555^2

………速算を操る数

555×555 の値を速算できますか？例えば、

$$555^2=(5\times111)^2=25\times111^2=25\times12321$$

111^2 の性質が見えてきてこれはこれで面白いけど、速算とまではどうも。
そこで次の性質を利用してみましょう。

$5^2=25$, $15^2=225$, $25^2=625$, $35^2=1225$, $45^2=2025$, $55^2=3025$, $65^2=4225$, ……

一の位が5である2桁の数の平方ですが、下2桁はどれも25になっています。では、百十の位の数の規則性は分かりますか。平方する数の十の位の数に、1を加えた数を掛けた数になっています。例えば 35^2 の十の位は3ですから、

$$3\times(3+1)=12$$

これが平方数の百十の位の数ということです。この原理は簡単に示せます。平方する2桁の数を

$$10a+5\quad(1\leqq a\leqq9)$$

とすると、

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$$

この $a(a+1)$ が計算の秘密の部分になります。この性質はもう少し拡張することができます。
次の式の掛け算を考えてみましょう。

十の位の数が同じで一の位の数の和が10である２桁の２数の掛け算

式で表現すると、

$$(10a+b)(10a+c)\qquad(\text{ただし、}b+c=10\text{、}1\leqq b,c\leqq9)$$

となります。

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10(b+c)a+bc=100a^2+100a+bc=100a(a+1)+bc$$

ここにも $a(a+1)$ が登場しましたね。これから速算方法は、

2数の一の位どうしを掛けて、十の位の数とその数に1を加えた数の積を百の位以降に配置

ということになります。このことを用いると、例えば、

$34\times36=1224$、$48\times42=2016$、$73\times77=5621$

といった速算が可能となるのです。
では、次のような場合はどうすればいいか分かりますか。

一の位の数が同じで十の位の数の和が10である２桁の２数の掛け算

同じように計算式を立ててみましょう。

$$(10a+c)(10b+c)\qquad(\text{ただし、}a+b=10\text{、}1\leqq a,b\leqq9)$$

$$(10a+c)(10b+c)=100ab+10c(a+b)+c^2=100ab+100c+c^2=100(ab+c)+c^2$$

これから、

一の位の数を平方し、十の位どうしの積に一の位の数を加えたものを百の位以降に配置

ということになります。例えば、63×43 は、$6\times4+3=27$ で、$3^2=9$ より2709となります。これも面白い性質ですね。

$75\times35=2625$、$26\times86=2236$

簡単にできてしまいますね。
そろそろ問題の 555^2 の計算をしてみましょうか。この数の一の位の数5を平方すると下２桁は25です。
あとは、55×56 の計算。

$$55\times56=55\times(55+1)=55^2+55=3025+55=3080$$

以上より、

$$555^2=308025$$

となります。

$$\frac{2}{5}$$

$\frac{2}{5}=0.4$ であり何の変哲もない数に思えますが、

$$\frac{2}{5}=\frac{26}{65}=\frac{266}{665}=\frac{2666}{6665}=\frac{26666}{66665}=\frac{266666\cdots 6}{66666\cdots 65}$$

と変形できるとなると、ただ事ではありません。
分子・分母が、1333333333……333で約分できるわけですが、このような分数が他にもあったら凄いですね。
調べてみましょうか。
分数を、

$$\frac{q}{p}=\frac{10^n q+(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+x)}{10^{n+1}x+10^n x+\cdots 10x+p} \qquad p\neq q、1\leqq p,q,x\leqq 9$$

とします。

$$(\text{右辺の分子})=10^n q+\frac{x(10^n-1)}{9}$$

$$(\text{右辺の分母})=\frac{10x(10^n-1)}{9}+p$$

ですから、式を変形すると、

$$q\{10x(10^n-1)+9p\}=p\{9\times 10^n q+x(10^n-1)\}$$

整理をして、

$$9(10^n-1)pq=10qx(10^n-1)-px(10^n-1)$$

$$\therefore\quad 9pq=(10q-p)x$$

となります。ここで、$p\neq q$ より、$10q-p$ は9の倍数にならないから、x は3の倍数です。

$$x=3k\quad(k=1,2,3)$$

とおくと、

$$9pq+3pk-30qk=0$$

$$(3p-10k)(3q+k)=-10k^2$$

$3p<10k$、$3q+k\geqq 3+k$ であることに注意し、p,q の値を求めます。

$k=1$ のとき、
これを満たす p,q は存在しません。

$k=2$ のとき、

$$(3p-20)(3q+2)=-40$$

より、$(p,q)=(4,1),(5,2)$

$k=3$ のとき、

$$(p-10)(q+1)=-10$$

より、$(p,q)=(5,1),(8,4)$

以上より、

$$\frac{1}{4}=\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666\cdots 6}{666\cdots 64}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{19}{95}=\frac{199}{995}=\frac{1999\cdots 9}{999\cdots 95}$$

$$\frac{4}{8}=\frac{49}{98}=\frac{499}{998}=\frac{4999\cdots 9}{999\cdots 98}$$

新しい仲間が見つかりました。

76^2

何が不思議なのでしょうか。計算すれば明らかになります。

$\underline{76}^2 = 57\underline{76}$

分かりますか？。下二桁の数字は平方しても変わっていません。百の位が異なり下2桁が76の2数の掛け算についても、

$3\underline{76} \times 4\underline{76} = 1789\underline{76}$

同じ現象が起こります。掛けても位の数が変わらない原理を探ってみましょう。

まず、1桁の数の場合は、

$\underline{1}^2 = \underline{1},\ \underline{5}^2 = 2\underline{5},\ \underline{6}^2 = 3\underline{6}$

一の位が、1, 5, 6の場合はこの性質を満たしています。

一の位が6の場合について、以下、考えてみます。

下2桁が平方しても変わらない3桁の2数を、

$P = 100a + 10k + 6$、$Q = 100b + 10k + 6 \qquad (1 \leqq a, b \leqq 9,\ 0 \leqq k \leqq 9)$

とします。

$PQ = 10000ab + 1000(a+b)k + 600(a+b) + 100k^2 + 120k + 36$

ここで、下2桁の数を決定するのは

$120k + 36 = 100k + 20k + 36$

これが、もとの数の下2桁$10k+6$と一致するためには、

$20k + 36 \equiv 10k + 6 \pmod{100}$

$10k + 30 \equiv 0 \pmod{100}$

$\therefore\ k = 7$ で下2桁の数は76となります。

次に、下3桁が平方しても変わらない4桁の2数を、

$P = 1000a + 100k + 76$、$Q = 1000b + 100k + 76$

とすると、

$PQ = 1000000ab + 100000(a+b)k + 76000(a+b) + 10000k^2 + 2 \times 7600k + 76^2$

下3桁を決定するのは、

$2 \times 7600k + 76^2 = 15000k + 200k + 5000 + 776$

より、

$200k + 776 \equiv 100k + 76 \pmod{1000}$

$100k + 700 \equiv 0 \pmod{1000}$

$\therefore\ k = 3$ で下3桁の数は376です。

同様に、下4桁の場合は、

$2 \times 376000k + 376^2 = 770000k + 2000k + 141376$

より、

$2000k + 1376 \equiv 1000k + 376 \pmod{10^4}$

$1000k + 1000 \equiv 0 \pmod{10^4}$

$\therefore\ k = 9$ より下4桁の数は9376.

これを続けていくと、

……7109376

と、順次求めることができます。

同じように、一の位が5の場合については、

……2890625

となります。一の位が1の場合は、残念ながらこの性質は2桁以上では成立しません。

ところで、このことから不思議な結果が得られます。

方程式、

$x^2 = x$

の解は、$x = 0, 1$ですが、無限の数を含めて考えた場合には、

$x = \cdots\cdots 7109376,\ \cdots\cdots 2890625$

も解であり、なんと、2次方程式の解が4個になってしまうのです。

1001

…………リフレインするコピー数

ちょっと運試しを。
3桁の適当な自然数を何か考えて紙に書いてください。
次に、いま考えた数の後ろに続けて同じ数を書いて6桁の数にしてください。
例えば考えた数が841ならば、

　　841841

を作るということです。では、その6桁の数を7で割ってください。
このラッキーセブンで割った余りは、0，1，2，3，4，5，6のいずれかになりますね。
その余りの数だけあなたに500円硬貨を進呈しましょう。考えた数がラッキーナンバーならば、
あなたは最大で6枚の500円硬貨を受け取ることができるのです。

　　…………………………

さて、あなたはどれだけの500円硬貨を手に入れることができましたか。
えっ、割り切れてしまった？。それは、アンラッキーでしたね。まあ、人生、そんなこともありますね。

　　…………………………

例として考えた数字841の場合はどうなるでしょうか。

　　841841÷7＝120263

やはり、割り切れてしまいます。実は、どんな3桁の数を考えても割り切れてしまうのです。絶対500円硬貨は貰えないというサギみたいな運試しでした。この仕組みが分かりますか。
3桁の数を続けて書いて6桁にするということは、3桁分だけ位を移して書くことだから、
1001を掛けることと同じなのです。

```
       abc
A     1001
----------
       abc
    abc
----------
    abcabc
```

となるわけです。
ここで、

　1001＝7×13×11

ですから、7で割り切れることは当然なのです。この問題は、7を13や11に変えてやっても損をしないことが分かりますね。
　このように、数字1001は3桁の数を上位に3桁分だけずらしてコピーする不思議な働きをもっています。
　1001は、1000より1だけ多い数字ですが、インドでは、11，101，1001のように10，100，1000にそれぞれ1を加えた数を吉祥数といいます。完成された1000などの数に1を加えることは、完成を超越した数、すなわち無限数と扱われ、寺院への寄付金や祝いの席での祝儀などの祭礼の際にはこういった吉祥数で支払う風習があるようです。
　また、数字1001のように、逆から読んでもまったく同じ数字になる数を回文数といいますが、回文数はシェヘラザード数とも呼ばれます。もちろん、「千一夜物語」のヒロイン、シェヘラザード姫の名前をとったわけですが、アラビアンナイトがなぜ1001夜なのか、ここにも数字1001のミステリーが潜んでいるんでしょうね。
　さて、1001は、3桁の数字を3桁分ずらしてコピーするわけですが、それでは、4桁、5桁、……ずらすにはどうしたらいいかは分かりますね。10001，1000001，……を掛ければ同じように懐の痛まないサギの運試しができます。

10001＝　73×137
100001＝　11×9091
1000001＝101×9901
10000001＝　11×909091

ちょっと、割り算がしんどい値になってしまいますね。
ところで、このコピー数を用いると0と1だけで構成される美しい数のピラミッドを作ることができます。
(1を並べて作られる数をレピュニット数<repeated unit ⇒repunit>といいます)

11×1	＝	11
101×11	＝	1111
1001×111	＝	111111
10001×1111	＝	11111111
100001×11111	＝	1111111111
1000001×111111	＝	111111111111

7×11×13

値を計算すると、

7×11×13＝1001

そう、前回登場したコピー数ですが、素因数分解により、この数のさらにミステリアスな性質が浮かび上がってきます。

あなたは、7の倍数はどうやって見分けたらいいか知っていますか？
7以外の数字、2，3，4，5，6，8，9の倍数判定は誰でも知っていますね。
7の倍数については、3桁の数は、
百の位の数を2倍した数を、十一の位の2桁の数に加えた数が7の倍数かどうかで判定できます。
例えば、546は、

46＋5×2＝56

ここで、56は7の倍数だから、546は7の倍数です。その理由は簡単です。3桁の数を

$$N = 100a + 10b + c \qquad (1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b, c \leqq 9)$$

とすると、

$$N = 98a + (2a + 10b + c) = 7 \times 14a + (2a + 10b + c)$$

これより、N が7の倍数であるとき、$2a + 10b + c$ も7の倍数であるわけです。
では、4桁以上の数についてはどう判定すればいいのでしょう。調べてみましょう。

$$N = \sum_{k=1}^{2n} (a_{k-1} \times 10^{3(k-1)}) \qquad (a_{k-1}\text{は3桁の整数})$$

とします。

$$N = a_0 \times 1 + a_1 \times 10^3 + a_2 \times 10^6 + a_3 \times 10^9 + \cdots + a_{2n-2}10^{6k-6} + a_{2n-1} \times 10^{6k-3}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-2} \times 10^{6k-6} + a_{2k-1} \times 10^{6k-3})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \{(a_{2k-2}(10^{6k-6} - 1) + a_{2k-1}(10^{6k-3} + 1) + (a_{2k-2} - a_{2k-1})\}$$

ここで、$(10^{6k-3} + 1)$ は7の倍数になっています。数学的帰納法で証明してみましょう。

$k = 1$ のとき、$10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 11 \times 13$ より、7の倍数。

$10^{6k-3} + 1 = 7m$ （m は自然数）とすると、

$$10^{6(k+1)-3} + 1 = 10^{6k-3} \cdot 10^6 + 1 = (7m - 1)10^6 + 1 = 7 \cdot 10^6 m - 999999 = 7 \cdot 10^6 m - 7 \times 142857$$

$\therefore$ $10^{6k-3} + 1$ は7の倍数になります。

同様に、帰納法により $10^{6k-6} - 1$ が7の倍数であることも証明できますが、合同式を使うともっと簡単に説明できます。
1001の素因数分解から、

$$10^3 + 1 \equiv 0 \pmod 7 \quad \therefore \quad 10^3 \equiv -1 \pmod 7 \quad \text{より} \quad \left(10^3\right)^{2k-1} \equiv -1,\ \left(10^3\right)^{2k} \equiv 1 \pmod 7$$

となります。

このことより、$\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-2} - a_{2k-1})$ の値を計算することで、7の倍数判定ができるのです。

7の倍数判定法
① 3桁の数 …… 十一の位で作られる2桁の数に百の位の数を2倍して加えた数が7の倍数
② 4桁以上の数 …… 下の位から3桁ずつ順に、奇数番目は加え、偶数番目は引いた数が7の倍数

例えば、164197523については、

164197523 ⇒ (②で判定) 523－197＋164＝490 ⇒ (①で判定) 90＋2×2＝98＝7×14

よって、7の倍数であることが分かります。
同じように、1001の素因数11や13についても倍数判定ができます。

$10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$、$10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$

から、7の場合と同様の操作で倍数判定をしてもいいことになります。

14961845184 ⇒ 184－845＋961－14＝284＝11×13×2

これより、14961845184は11かつ13の倍数です。
(ちなみに、11の倍数判定は下の位から奇数番目の位の数を加え、偶数番目の位の数を引くことでもっと簡単に判定できます)

各位に同じ数字が並ぶ3桁の数(ゾロ目の数)をひとつ考えてください。
次に、その数から余りが3桁になるような適当な3桁の数を考えて引いてください。
その余りからまた適当な3桁の数を引いて、余りが3桁になるようにしましょう。
最初に引いた3桁の数、2番目に引いた3桁の数、最後の余りである3桁の数を並べて9桁の数を作ります。
その９桁の数を 37 で割ってみてください。
割り切れますね。どうしてでしょうか。

ゾロ目の数を７７７、1番目，2番目に引く数をそれぞれ３１２，２１６としてやってみましょう。

```
  777          465
 P 312  ⇒   P 216  ⇒  312216249  ⇒  312216249 C 37 x 8438277
  465          249
```

確かに割り切れています。ゾロ目の数に潜む秘密を暴いてみましょう。
3桁のゾロ目の数を

$$N = a\times 10^2 + a\times 10 + a = 111a \qquad (1 \leqq a \leqq 9)$$

とします。最初に引いた数、2番目引いた数、最終的な余りである3桁の数をそれぞれb, c, d とすると、

$N - b - c = d$ より、 $N = b + c + d$

作られる9桁の数M は、

$$\begin{aligned} M &= 10^6 b + 10^3 c + d \\ &= (10^6 - 1)b + (10^3 - 1)c + d \\ &= 999999b + 999c + b + c + d \\ &= 999999b + 999c + N \\ &= 999999b + 999c + 111a \end{aligned}$$

ここで、

９９９９９９＝３７×２７０２７，　９９９＝３７×２７，　１１１＝３７×３

ゾロ目の数が37の倍数になることより、M は37で割り切れるのです。
もちろん、すべてのゾロ目の数が37で割り切れるわけではありません。桁数が3の倍数になっている場合です。このことは、
　桁数が3の倍数である各位が1であるゾロ目(レピュイット数)は37の倍数
ということに基づいています。

１１１＝３７×３
１１１１１１＝３７×３×１００１
１１１１１１１１１＝３７×３×１００１００１
１１１１１１１１１１１１＝３７×３×１００１００１００１

気がつきましたか。37の背後にはコピー数みたいなものがうごめいているようですね。
面白い心理テストをひとつ。

> 1から50までの間の2桁の数をひとつ思い浮かべてください。
> ただし、どの桁も奇数でかつ同じ数字ではないようにしてください。
> 例えば、11なんていうのはだめですよ。
> さて、私が持っている紙にはあなたの考えた数が書いてあります。

ここで、おもむろに、あらかじめ紙に書いてあった紙をあなたは見せます。
そう、37と書いた紙を。
この文を読んでいるあなたは、きっと37だろうと考えるから違う数字を思い浮かべるでしょう。
でも、何も知らない多くの人は37を思い浮かべるのです。
このテストはマジシャンの間では「心理応用トリック」と呼ばれています。
「どの桁も奇数で同じ数字ではない」とすることで、十の位の数は1または3に制限されます。一の位は十の位で考えた数以外の奇数の4通りより、その場合の数は2×4＝8通りしかありません。さらに、例として11を提示したことにより、気持ちは30台の数字へ動き、比較的誰もが好きな7を一の位にしてしまいます。
深層心理にも37はちょっとした悪戯をしかけているのです。

$$\frac{6729}{13458}$$

……数字が織り為す小町の戯れ

何が面白いのか分かりますか。そうです。分子・分母に数の並びは1～9の数字が1回ずつ使われています。でもそれだけならこういう数はいくらでも作れますね。この分数が凄いのは、さらに約分ができるのです。

$$\frac{6729}{13458}=\frac{1}{2}$$

計算の結果が単位分数(分子が１の分数)になります。でも、もっと不思議なのはこれから。1～9までの数字を1回ずつ用いて、単位分数$\frac{1}{n}$ $(n=2,3,\cdots 9)$ のすべてを表すことができるのです。

$$\frac{5823}{17469}=\frac{1}{3},\ \frac{3942}{15768}=\frac{1}{4},\ \frac{2697}{13485}=\frac{1}{5},\ \frac{2943}{17658}=\frac{1}{6},\ \frac{2394}{16758}=\frac{1}{7},\ \frac{3187}{25496}=\frac{1}{8},\ \frac{6381}{57429}=\frac{1}{9}$$

見事としかいいようがありません。なおこの表し方は一意的ではなく、すべての$\frac{1}{n}$の表現方法は89通りもあり、$\frac{1}{8}$の場合はなんと46通りもの表し方が可能なのです。ではn＝1のときはどうなのかと気になりますが、不可能なことは分かりますね。でも、

$$\frac{148}{296}+\frac{35}{70}=1$$

1～9に0を加えて2つの分数の和にすることにより表現することはできるのです。
ところで、これらの分数の逆数を考えると、1から9までの数字を用いて2から9までの整数を作るというパズルになります。
こういった遊びは日本では小町算としてよく知られています。
小町算は、数の並びと計算結果が小野小町のように美しいとか、小町算で遊んでいたらそのうち時間を忘れて歳をとってしまうことを小町の詠んだ「花の色はうつりにけりないたずらに　我が身世にふるながめせしまに」になぞらえたとか、私のところに100 日通い続けたら結婚してあげるわよといった小町の言葉を信じて九十九夜まで通い続け、最後の日に雪に埋まり凍死した深草少将の100 日の口惜しい思いに掛けたとか、まあそのいわれはいろいろとあるみたいですが、とにかく小野小町の名前から名づけられた江戸時代の庶民のパズルです。

> 1から9までの数字を並べた適当な間に＋－を入れて100になるようにしなさい。
>
> **1□2□3□4□5□6□7□8□9**

例えば、

123＋4－5＋67－89＝100

×÷も認めると、

1÷2÷3×456＋7＋8＋9＝100

( )による優先順位を認めると、

(1＋2)÷3×4×(56÷7＋8＋9)＝100

さらには、逆に並べた987654321の数字の間に加減乗除を入れて100になるようにすると、

98－76＋56＋3＋21＝100

いろいろなパターンで楽しむことができます。
ヨーロッパでは、1から9までの数を1回ずつ使って帯分数がセンチュリー(1世紀、100年)になるようにするセンチュリー・パズルというのがあります。

$$96\frac{2148}{537}=100,\quad 91\frac{5823}{647}=100\quad \cdots\cdots$$

あちら版は、数字の大きさの順には拘らなくてもいいわけです。
次の並びもまたユニークです。

51249876×3＝153749628
32547891×1＝195287364
16583742×9＝149253678
8745231×96＝839542176

両辺が1から9までの一揃いの数字で作られています。これもまた、小町算といっていいでしょう。左辺を右辺で割ったら1になるとみることもできます。
数字を並べて遊ぶという発想は、古今東西、どの国にあっても庶民の知的好奇心をくすぐっていたみたいですね。

123456789

……………………数字たちとポルカを踊ろう

数字1から9を順に並べた9桁の数、123456789には面白い性質があります。円周率の小数第？億位に123456789という並びが現れるといったことは必然・偶然かは分かりませんが、この数に3の倍数以外の数を掛けてみると……。

123456789×1＝123456789
123456789×2＝246913578
123456789×4＝493827156
123456789×5＝617283945
123456789×7＝864197523
123456789×8＝987654312

計算結果はすべて 1～9 までの数字が順番を変え、シャッフルされて現れてきます。まるで相手を変えてポルカを踊るよう。さらに逆順にして 987654321 に3の倍数以外(1を除く)を掛けると、今度は0が加わり、0～9までの数字が踊りだします。

987654321×2＝1975308642
987654321×4＝3950617284
987654321×5＝4938271605
987654321×7＝6913580247
987654321×8＝7901234568

次に、8を抜いて、8桁の数12345679について同じように3の倍数以外の数を掛けてみましょう。

12345679×1＝12345679　……　1が入って8が抜ける
12345679×2＝24691358　……　8が入って7が抜ける
12345679×4＝49382716　……　7が入って5が抜ける
12345679×5＝61728395　……　5が入って4が抜ける
12345679×7＝86419753　……　4が入って2が抜ける
12345679×8＝98765432　……　2が入って1が抜ける

数字が1つ抜けては別の数字が入って踊りだします。先ほどの123456789に掛けた3の倍数以外の積と比較してみましょう。数字が1つ抜けただけでその並びは一致しています。また、その抜けた数と掛けた数の和をとるとすべて9となっています。

さらに、12345679に9を掛けると、

12345679×9＝111111111

各位の数字がすべて1に変わってしまい、はい、ここで休憩。さらに続けて3の倍数以外の数を掛けてみましょう。

12345679×10＝123456790
12345679×11＝135802469
12345679×13＝160493827
12345679×14＝172839506
12345679×16＝197530864
12345679×17＝209876543
……………………………………
12345679×43＝530864197
12345679×44＝543209876
……………………………………
12345679×77＝950617283
12345679×79＝975308641
12345679×80＝987654320

新しく0が加わり9桁の数となりますが、その並びは各位の数をつないでグルッと輪にしてみると、0を基準にして1～9を掛けた数と同じ並びが現れてきます。そして、80を掛けると最大の数となり、81を掛けると、

12345679×81＝999999999

お疲れ様、お辞儀をして、数達のダンスはこれでお・し・ま・い。

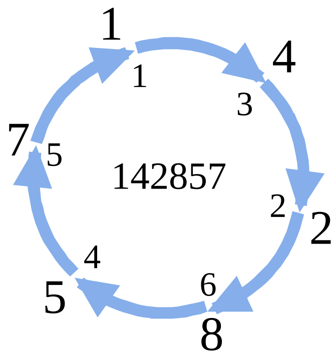
142857

………繰り返し繰り返し巡るダイヤル数

1～9の数字から3の倍数を除いた6桁の数。何か怪しいと思うでしょ。
1から6までの数を順番に掛けてみると、

142857×1＝**1**42857
142857×2＝**2**85714
142857×3＝**4**28571
142857×4＝**5**71428
142857×5＝**7**14285
142857×6＝**8**57142

142857×1＝**1**42857
142857×3＝**4**28571
142857×2＝**2**85714
142857×6＝**8**57142
142857×4＝**5**71428
142857×5＝**7**14285



142857の各位の数を、小さい数字から並べた1, 2, 4, 5, 7, 8の順にその数字を先頭に数が現れています。
さらに、1の位と最高位の数を結び円形にすると、すべて142857の並びになっていて、そして最後に、

142857×7＝999999

踊りが止みます。まだまだ、あります。142857の142と857の間に＋を入れてみましょう。

142＋857＝999

また9がでてきました。左から2つ置きの2数の和をとると

1＋8＝9, 4＋5＝9, 2＋7＝9

すべて9になります。このことは14285に1から6の数字を掛けて得られた数についてもみな成り立っています。
つぎに、142857を9で割ってみましょう。

142857÷9＝15873

割り切れましたね。この数に、7の倍数を掛けると、

15873×　7＝111111
15873×14＝222222
15873×21＝333333
15873×28＝444444
………………………
15873×63＝999999

これはよく考えれば当たり前ですが、でも綺麗ですね。
ところで前に紹介した12345679にも同じ性質がありました。

12345679×81＝999999999

このことは実は、それぞれの式は、

$$\frac{1}{7}=\frac{142857}{999999}、\frac{1}{81}=\frac{12345679}{999999999}$$

とみると、

$$\frac{1}{7}=0.142857142785\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}、\frac{1}{81}=0.012345679012345679\cdots=0.\dot{0}1234567\dot{9}$$

であることを表しています。

　すなわち、142857と12345679は、それぞれ$\frac{1}{7}$と$\frac{1}{81}$を小数点展開したときの循環節になっているのです。これらの数の性質はすべて循環節の性質であり、例えば142857に2を掛けることは、分数$\frac{2}{7}$を小数点展開することであり、20を7で割った商を最初の数として踊りが始まります。

最後に、$\frac{1}{81}$から面白い循環節をもつ分数をつくってみましょう。

$\frac{1}{891}=0.\dot{0}0112233445566778\dot{9}$　0から7までは2つずつ現れ89と続く。循環節の長さは18

$\frac{1}{8991}=0.\dot{0}0011122233344455566677788\dot{9}$　0から7までは3つずつ現れ889と続く。循環節の長さは27

$\frac{1}{89991}=0.\dot{0}00011112222333344445555666677778888\dot{9}$　0から7までは 4 つずつ現れ8889と続く。循環節の長さは36

まだまだ踊りは続きそうですね。

3087

4桁の数で各位の数字の並びが連続している整数を考えてみましょう。
例えば5678です。次に、この数字に3087を加えてみます。

5678＋3087＝8765

なんと、数字の並びが逆転してしまいました。他の4桁の数字ではどうでしょうか。

2345＋3087＝5432
3456＋3087＝6543
……………………
6789＋3087＝9876

並びが連続する4桁の数は、どれも同じことが起こります。見方を変えれば、位の高い方から連続して数字が小さくなる4桁の数から、その数字の逆の並びの4桁の数を引くと常に3087になるということです。どうしてこんな現象が起きるのでしょう。
数字の一の位から順に連続して増える4桁の数をP、その逆の並びの数をQとします。

$$P=1000(a+3)+100(a+2)+10(a+1)+a=1111a+3210 \qquad (1\leqq a\leqq 6)$$
$$Q=1000a+100(a+1)+10(a+2)+(a+3)=1111a+123$$

これから、

$$P-Q=3210-123=3087$$

値は、a に関係のない定数になっています。このことがリバーシブル現象を引き起こしているようです。
この性質は数字が連続する9桁までの整数すべてに対していえます。

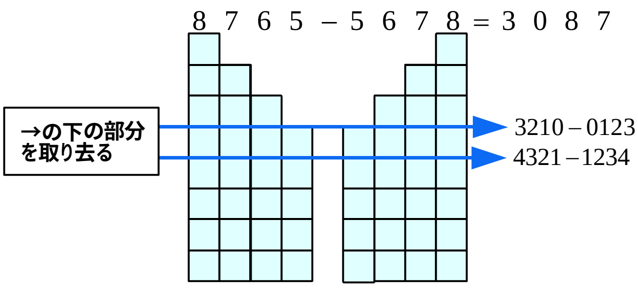
$$P=\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)10^{k-1} \qquad (1\leqq n\leqq 9、1\leqq a\leqq 10-n)$$
$$Q=\sum_{k=1}^{n}(a+n-k)10^{k-1}$$

とすると、$P>Q$ だから、

$$P-Q=\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)10^{k-1}$$

この和を求めることはできますが、最大9桁の数だから、計算することは野暮というもの。a を含まない式、すなわち、a の値に無関係な数となることが分かるだけで十分です。具体的には、

$$P-Q=\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)10^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 10^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)10^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)10^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}(n-k)10^{k-1}$$



であることより、n 桁の連続数の差は、構成する最小数を a とすると、各位が a または $a+1$ のゾロ目をそぎ落とした連続数の差として表されるのです。これから、

2桁の数は	21−12	＝	10−1	＝9
3桁の数は	321−123	＝	210−12	＝198
4桁の数は	4321−1234	＝	3210−123	＝3087
5桁の数は	54321−12345	＝	43210−1234	＝41976

美しい数の並びが作られます。最大の9桁の数については、

987654321−123456789＝876543210−12345678＝864197532

1～9 のすべての数字が1回ずつ現れる美しい値となります。
この数字は、数123456789のところで触れた、

123456789×7＝864197523

に似ていますね。これも数のお茶目な悪戯でしょうか。

1089

$1089 = 33^2$

ただの平方数である1089はしばしばマジックの主役として登場します。

> ３桁の各位の数字がみな異なる数を思い浮かべてください。さて、その数の一の位と百の位を入れ替えた３桁の数を考えて、その数と、もとの数の差を計算してください。(大きい数から小さい数を引きましょう)。計算できましたか。では、その３桁の数の一の位と百の位を入れ替えて、今度は入れ替える前の数に足してください。できましたか？。その数をよくみてください。私があなたの計算した数を当てて見ましょう。それは……。

それは、1089です。

このパズル、一人に一回しか通用しません。実は、必ず1089になるのです。

例えば、327という数字で考えて見ましょう。まず、一の位と百の位を入れ替えて、元の数との差をとると、

723－327＝396

次にまた一の位と百の位を入れ替えて和をとると。

693＋396＝1089

確かになります。このマジックの種明かしをしてみましょう。

3桁の数を

$P = 100a + 10b + c \quad (a < c)$

とします。次に、百の位と一の位を入れ替えた数は、

$Q = 100c + 10b + a$

ですから、その差 R は、

$R = Q - P = 100(c - a) + (a - c)$

ここで、$a - c < 0$ は負の数ですから、十の位から数を借り、その十の位は百の位から数を借りると、

$R = 100(c - a - 1) + 90 + (10 + a - c)$

百十一の位の数はそれぞれ、

$c - a - 1, 9, 10 + a - c$

となります。ここで、また百の位と一の位を入れ替えると、

$S = 100(10 + a - c) + 90 + (c - a - 1)$

R と S の和 T を求めると、

$T = R + S = 100 \times 9 + 90 \times 2 + 9 = 1089$

となります。この式をみると結局は、

$1089 = 999 + 90$

の計算をしているだけだということが分かります。

さて、この魔法数にはまだ面白い性質が潜んでいます。

この数に1から9までの数を順に掛けてみましょう。

①1089×1＝1089
②1089×2＝2178
③1089×3＝3267
④1089×4＝4356
⑤1089×5＝5445
⑥1089×6＝6534
⑦1089×7＝7623
⑧1089×8＝8712
⑨1089×9＝9801

千と百の位は①から順に増え、一十の位は9から順に減っていき、したがって、①と⑨、②と⑧、③と⑦、④と⑥の数字の並びが逆になっています。⑨は逆順に並べた数が元の数の倍数であることを表し、この性質は、4桁の数では、1089と2178しかありません(2178×4＝8712)。この数について、G.H.ハーディはちっとも深刻でない数だけど、素人はびっくりするだろうと述べています。そして極め付きは、

$1089 = 33^2 = 65^2 - 56^2$

右辺の数の並びに注目してください。2桁の数でこんな芸当ができるのは、この数以外にないのです。

2925

…………秩序を破壊する数

電卓で、

39×75

を叩いてください。次に、

3×975

を叩いてみましょう。不思議なことに、どちらも計算結果は

2925

になります。

$2925 = 3^2 \times 5^2 \times 13$

素因数分解の組合せがこんな悪戯をしたのですが、電卓でキーを打ち間違えることはよくあること。そのとき、間違えた計算と同じ答えになったらちょっとびっくりしますね。四則演算のルールに反発する不穏分子は数の世界にもいるのです。

いくつか、例を挙げましょう。

$83 \times 32 = 8 \times 332 = 2656 \qquad 9 \times 8175 = 981 \times 75 = 73575$

$17 \times 515 = 1751 \times 5 = 8755$

割り算にも登場して貰いましょう。

$8 \div 4 + 1 = 8 - 4 - 1 \qquad 20 \div 10 + 4 = 20 - 10 - 4$

指数も加わると

$2^5 \cdot 9^2 = 2592 \qquad 31^2 \cdot 325 = 312325$

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3 \qquad 9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$

階乗も登場して

$145 = 1! + 4! + 5! \qquad 40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$

括弧( )も入れると、

$81 = (8+1)^2 \qquad 4913 = (4+9+1+3)^3$

$1679616 = (1+6+7+9+6+1+6)^4$

さらには

$2025 = (20+25)^2 \qquad 6832014336 = (68320+14336)^2$

ちょっと尋常ではなくなってきました。

分数でもあります。

$$\frac{9}{2} \times \frac{9}{7} = \frac{9}{2} + \frac{9}{7} \qquad \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8}$$

ここまでくると数の社会も無法地帯。

演算子がみな反乱を起こし始め、混沌が支配し始めます。

でも、さすがに

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a+b}{x+y} \qquad (a, b, x, y > 0)$$

はありません。なぜならこれを認めてしまうと、

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{a+b}{x+y} \text{ より、} \quad (ay+bx)(x+y) = xy(a+b)$$

整理して、 $ay^2 + bx^2 = 0$

これを満たす a, b の組はないのです。数達もこの計算だけはやっちゃいけないと思っているようです。

でも、次の問題ではどうなるでしょう。

箱Aには白球5個と赤球2個、箱Bには白球3個と赤球1個が入っています。

箱A，Bの中から赤球1個を取り出す確率は、それぞれ $\frac{2}{7}, \frac{1}{4}$ ですね。

つぎにAとBの球を別の箱にまとめて入れると、箱の中には白球８個と赤球３個になります。

この箱の中の赤球１個を取り出す確率は $\frac{3}{11}$ です。どちらの試行も赤球1個を取り出す確率ですから、

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{7+4}$$

一見、正しそうに見えますね。

結局、数達の遊び心を屁理屈で歪めてしまうのは、いつも人間の側なのです。

1729

…………数学者との出会いの数

1900 年台初頭、イギリスの著名な数学者G. H. ハーディの話。

病床の友人、数学者ラマヌジャンを見舞いに行く途中、乗ったタクシーのナンバーは1729の4桁番号であった。私にとって、その数はどうでもいい退屈な数字であったが、よくない前兆を表す数字ではないことを願った。そのことをラマヌジャンに告げると、彼は「それは大変面白い興味ある数ですよ。2組の3乗数の和で2通りに表せる最小の数じゃないですか」

ラマヌジャンの数に対する特異な記憶力を物語るエピソードです。確かに、

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

と表せるのです。このことを瞬時に計算したラマヌジャンを、当時の天才数学者リトルウッドは「自然数のひとつひとつが彼の友人である」と評しました。

ラマヌジャン(Srinivasa Aiyangar Ramanujan:1887～1920)は、南インドのバラモン階層として生まれますが、経済的には貧しく大学も奨学金でやっとのことで行くことができましたが、出席率が悪く、その奨学金も打ち切られてしまいます。止む無くマドラス港の湾岸局で働きながら、独学で数学を勉強を続けます。その研究の成果をイギリスのハーディ教授に手紙で送ったところ、「本物の大天才だ、こんないたずらができるほどの詐欺師より、大数学者の方がまだ存在するものだから」と、ハーディは驚愕し、彼をケンブリッジに招聘します。しかしながら、30時間眠らずに数学に没頭し、20時間眠り続けるような不摂生な生活を送っていたラマヌジャンはやがて体を壊し、32 歳の生涯を閉じます。ラマヌジャンが短い渡欧期間の中でハーディと共に研究し発表した論文は数知れなく、数に対する魔術的な洞察力には誰もが驚かされるのです。彼の死後、ハーディは数学者の天賦の才能について次のように採点したといわれています。

自分は20点、リトルウッドは30点、ヒルベルトは80点、そしてラマンヌジャンは100点

自身もまた、偉大な天才数学者であったハーディであっても、ラマヌジャンの才能を目の当たりにすると平凡に映ってしまったのでしょう。

ラマヌジャンがどれだけ数達に愛されたのかを物語るラマヌジャンファンタジーといわれる問題があります。

$$N = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots\cdots\cdots}}}}}$$

N の値は何でしょう。

ラマヌジャンが「インド数学ジャーナル」に投稿した問題ですが、誰一人として解答者が現れず、結局ラマヌジャンは自ら解答をつけることになりました。

$$N = 3$$

不思議な信じがたい値に収束するのです。

さて、1729に話を戻しましょう。この数の各位の数の和は、

1＋7＋2＋9＝19

であり、19で1729は割ることができます。

1729÷19＝91

このように各位の数の和で割れる数をハーシャッド数といいます。さらに、このことから、

19×91＝1729

であり、これは19を逆に読んだ数と91との積がもとの数に戻るという稀な数字の例として挙げられます。また、

1729＝7×13×19

と素因数分解できますが、$a^{1729} - a$ は、a の値に関係なく、いつも1729で割り切れます。このような数をカーマイケル数といい、確率的素数判定の反例として例示され、擬似素数とも云われます。

とまあ、重箱の隅を穿ればいろいろとでてくるのかも知れませんが、タクシーのナンバーに過ぎなかった1729に瞬時に市民権を与えたラマヌジャンの凄さは格別なのです。1729はラマヌジャン･ハーディ数とよぶのが一番相応しいでしょう。

ところで、ハーディの話には続きがあります。

「それでは、4乗数で同じ性質をもつものを君は知ってるかな」。ラマヌジャンはしばらく考えた後、
「その答えは分からないけど、それはきっとものすごく大きな数字になるだろうね」

ラマヌジャンが予想した数は、後にオイラーにより解明されます。

$$635,318,675 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4$$

それは、それは大きい数字です。

6174

…………収束する果てにある数

全部の位が同じ数字ではないような４桁の数を考えてください。
この数を出発点にして、各位の数字を並べ替えてできる最大の数から、最小の数を引く計算を繰り返していきます。そうして得られる最後の数は何になるでしょう。驚くべき結果が待っています。
例えば、３１４１でやってみましょう。

3141)	3177)	6354)	3087)	8352)	6174)	6174
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
4311	7731	6543	8730	8532	7641	
P 1134	P 1377	P 3456	P 378	P 2358	P 1467	
3177	6354	3087	8352	6174	6174	

６１７４になりました。あなたが考えた数ではどうなりましたか。やはり６１７４になっていませんか。
この操作で演算を繰り返すと４桁の数はみな６１７４に収束するのです。
　この数を、その性質を発見したインドの数学者カプレカの名前をとって、カプレカ数(Kaperkar Number)といい、世の数学者を魅了しました。その性質とは、

> 全部が同じ数字ではない４桁の数は、数字を並べ替えてできる最大の数から最小の数を引く計算を繰り返すと最後には必ず６１７４になる。

この操作により６１７４に導く変換をカプレカ操作といいます。
では４桁の数でない場合はどうなるのでしょうか。
２桁の数で考えて見ましょう。

26)	36)	27)	45)	90)	81	91)	72)	45)	90)	81
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
62	63	72	54	90	81	91	72	54	90	81
P 26	P 36	P 27	P 45	P 9	P 18	P 19	P 27	P 45	P 9	P 18
36	27	45	9	81	63	72	45	9	81	63

同じカプレカ操作が繰り返され、ループ状態に陥ります。
では３桁ではどうでしょう。

375)	396)	594)	495
↓	↓	↓	
753	963	954	
P 357	P 369	P 459	
396	594	495	

あっという間に４９５という値に収束してしまいました。
他の桁はどうなるのでしょう。
５桁は３パターンでループすることが知られています。
６桁は、１つのループに陥るか、５４９９４５と６３１７６４にどちらかに収束します。
７桁は、１つのループになります。
調べれば調べるほどカプレカ数の不思議さはループしていくのです。
なお、カプレカ数は、すべて９の倍数になります。
例えば、４桁の数で考えると、

$$N=1000a+100b+10c+d \text{、} M=1000d+100c+10b+a \qquad (a>b>c>d)$$

とすると、

$$N-M=999a+90b-90c-999d$$

から明らかですね。
　さらに、６１７４については、
　６１７４　⇒　６＋１＋７＋４＝１８　⇒　６１７４÷１８＝３４３
６１７４は、各位の数の和で割り切れます。このような数をハーシャッド数(大きな喜びの数の意)といいますが、この数も数学者カプレカがみつけたものです。だから、カプレカ数はもちろんですが、こういった数の性質を見つけだした数学者カプレカの頭の中の構造の方がよっぽど不思議に思えるのです。

297

…………分裂し復元するアメーバー数

何の変哲もない数に思えるでしょう。ぱっと見た目は各位の数の和が18だから9の倍数です。

$297=9\times33=3\times3\times3\times11$

ちょっと面白いかな、でもどうってことのない数。ためしに平方してみましょう。

$297^2=88209$

何も起こっていないようですが……でも、ようく見てください。

$88209 \Rightarrow 88+209=297$

平方した数を2つに分割して加えると元の数に一致してしまいました。
とんでもない性質が隠されていました。こんな数って他にあるのでしょうか。

9	⇒	$9^2=81$	⇒	$8+1=9$
55	⇒	$55^2=3025$	⇒	$30+25=55$
999	⇒	$999^2=998001$	⇒	$998+001=999$
2728	⇒	$2728^2=7441984$	⇒	$744+1984=2728$

たくさんありそうですね。小さい順に書いていくと、

1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, 7272, 7777, 9999,
17344, 22222, 38962, 77778, 82656, 95121, 99999, 142857, 148149, ………

このように、平方した数の先頭から、桁数が偶数桁($2n$)のときは、nとnに分割、奇数桁($2n+1$)のときは、nと$n+1$に分割して加えた数が元の数に一致するとき、この数をカプレカ数といいます。

4桁のカプレカ数は6174であると以前紹介しましたが、どちらもインドの数学者カプレカが発見したので同じ命名になってしまいましたが、こちらの方を第1定義、6174を第2定義というみたいです。

したがって、297は第1定義による6番目のカプレカ数となります。このカプレカ数の中から2つを選ぶと、

$$1+9=10$$
$$45+55=100$$
$$297+703=1000$$
$$2223+7777=10000$$
$$17344+82656=100000$$

他にもこういう組み合わせが見つかりますね。さらに、よくみるとゾロメ数が登場しています。とくに9のゾロ目はどの桁数でも出現しています。9のゾロ目はカプレカ数なのか確認してみましょう。

$$9999\cdots\cdots99=10^n-1 \Rightarrow (10^n-1)^2=10^n(10^n-2)+1$$

すなわち、

$$999\cdots\cdots99^2=999\cdots98000\cdots01=999\cdots98+000\cdots1=999\cdots\cdots99$$

となり、カプレカ数です。他のゾロ目数の存在も考えると、レピュニット数がカプレカ数に関与しているみたいですね。
ちなみに、10桁のカプレカ数で最小のものは、

1, 111, 111, 111 ⇒ 1, 111, 111, 111^2=12345678900987654321
⇒ 1234567890+0987654321=1, 111, 111, 111

平方すると0～9の数字がひと揃いしています。

あれっ？、6桁のカプレカ数の最初の数をみてください。142857。この数って……、ちゃっかり顔を出しています。

297についてもう少し。

1の位の7を先頭に移動(巡回的に並べ変えるといいます)して729を作り、カプレカの操作をしてみましょう。

$729^2=531441 \Rightarrow 531+441=972$

972を巡回的に並べ変えると297に戻ります。

今度は297の百の位の2を一の位に続けて巡回的に並べた数972にカプレカの操作をします。

$972^2=944784 \Rightarrow 944+784=1728 \Rightarrow 1+728=729$

巡回的に並べ替えるとこれも最初の297に戻ってしまいますね。これは他のカプレカ数でも成立する性質です。

297だけの性質というと……297の3乗を計算してみましょう。

$297^3=26198073 \Rightarrow 26+198+073=297$

凄いですね。297は3乗してもカプレカ数になるのです。

31415

……… ケタ数移動を司る数

数当てマジックをひとつ。
ある数字が書かれた紙がここにあります。この数字をあなたに当ててもらいましょう。
紙を裏返しにします。ここに適当な4桁の数を書きます。
例えば、……1418にしましょう。
この数の下に、どんな数でもいいから4桁の数を書いてください。
では、今度は私が適当な4桁の数をさらに続けて書きます。
同じように、この下に適当な4桁の数を書いてください。
次は、私の番です。
はい、あなたの番です。
では、私は……、さあ、そろそろ止めましょうか。
ちょっとたいへんですけど、これらの7つの4桁の数の和を求めてくれますか。

1418	)	1418	)	1418	)	1418	)	1418	)	1418	)	1418
		3241		3241		3241		3241		3241		3241
				6758		6758		6758		6758		6758
						5274		5274		5274		5274
								4725		4725		4725
										2183		2183
												7816

⇒

	1418
	3241
	6758
	5274
	4725
	2183
○	7816
	31415

計算結果は31415ですね。
では、私があらかじめ紙に書いておいた数字をみてみましょう。
紙を裏返しにします……、同じ31415ですね。
不思議ですね。私と相手が交互でたらめに書いた数字の和が紙に書いてあった数字と一致するなんて。
この数字もカプレカ数のように収束する性質をもっているのでしょうか。
いえ、違います。31415に秘密があるわけではないのです。
実は、31415は円周率の最初の並びを書いたに過ぎません。このトリックは私が交互に提示した数にあるのです。
　相手が書いた数とその後に私が書いた数それぞれの和を計算してみてください。

3241＋6758＝9999　　5274＋4725＝9999　　2183＋7816＝9999

お分かりでしょうか。私が書いた数は、相手が書いた数の各位の数を9から引いて作られる数字だったのです。
このことを利用して、7つの数の和をもう一度計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
1418+9999+9999+9999 &= 1418+3\times(10000-1)\\
&= 31418-3\\
&= 31415
\end{aligned}
$$

この操作で、1の位の8が8－3となり、この3が5桁目に移動しています。
この操作は、1の位から必要な数だけ最高位に移すものだったのです。
　したがって、当てる数字が31415であるとすると、最高位の3の数を除き、

31415 ⇒ 1415＋3＝1418

このように1の位に加えます。この数から、3の値を再び5桁目に移すためには、交互1回の操作で1だけ移動しますから、3回必要になるわけです。
　この原理を理解すれば、もう少し複雑な設定もできますね。
例えば、5桁目の3と4桁目の1を1桁目に移して、

31415 ⇒ 415＋3＋1＝419

としましょう。こうすると、もう31415と419の数の関連性は分からなくなります。
まず、1を4桁目に移しましょう。
そのためには3桁の数を相手に考えさせ、こちらは各位の和が9になるように、続けて数を書きます。

419 ⇒ 419＋(385＋614)＝1418

あとは、3を5桁目に移せばいいわけです。
マジシャンが演出する数当てマジックは、数学的なロジックに裏打ちされているものなのです。
(ということで、ここで紹介した31415はダミー数であり、本当に紹介したかった数は10^4-1ということになります)

9

4桁の数を紙に書いてください。
次に、その4桁の各位の数を適当に並べ替えて新しく4桁の数を作ってください。
2つの4桁の数を大きい数から小さい数を引いてください。
計算した各位の数から適当に一つの数を選んで○で囲ってください。
それでは、○で囲った以外の数を私に教えてください。
○印のついた数を私が当てて見ましょう。

例えば、4287を紙に書いたとすると、

4287 ⇒ (数を入替え) 7482 ⇒ (最初の数との差をとり) 7482－4287 ⇒ (どれか一つに○で囲み) 319⑤

この数字の中の3, 1, 9を教えてもらい、○のついた5を当てるというものです。
次のようにして調べます。
まず5以外の各位の数を聞いた順に足していきます。和が2桁になったら、その数の各位の数の和を求め1桁の数にした後に、数を聞いて足していきます。この操作を繰り返します。

319 ⇒ 3＋1＋9＝13 ⇒ 1＋3＝4

ここで、最後に残った1桁の数4を9から引いた数が○で囲った数になります。この理由を考えて見ましょう。
始めに紙に書いた数を N とし、その数字の並びを abcd とします。

$$N = a\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d = a(999+1) + b(99+1) + c(9+1) + d = 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d)$$

この式から、9の倍数は、各位の数の和が9の倍数かどうかで判定できることが分かりますね。和が2桁以上になったらまた各位の数の和を求めてそれが9の倍数かどうかを判定すればよいのです。
次に、各位の数を適当に並べ替えて作った4桁の数を例えば M とし、その数字の並びを bdac とします。

$$M = b\times10^3 + d\times10^2 + a\times10 + c = 9(111b + 11d + a) + a + b + c + d$$

2数 M, N の差を求めると、$a + b + c + d$ がなくなりますから、その差は9の倍数となります。したがって、各位の数の和は9となるから、3つの数の和が分かれば、残りの一つの数は9から引いて求められるのです。
このことは、各位が $a_{n-1}a_{n-2}\cdots\cdots a_2a_1a_n$ なる n 桁の数 N であっても成立します。

$$N = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\cdot10^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(10^{k-1}-1) + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 9(10^{k-2} + 10^{k-1} + \cdots + 1) + \sum_{k-1}^{n} a_{k-1}$$

これから、N を9で割った余りは $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$ を9で割った余りに一致します。各位の数を適当に入れ替えて差をとるとその値は9の倍数になります。この数当てマジックは桁数を増やすことで、神秘性は深まります。計算は大変になりますが……。
このように、ある数の各位の数の和を求めて、それが2桁になったらまた分解して求めるという操作を続けて得られる数を、もとの数の数字根(Digital Root)といいます。例えば、

13578 ⇒ 1, 3, 5, 7, 8 ⇒ 1＋3＋5＋7＝16, 8 ⇒ 7, 8 ⇒ 7＋8＝15 ⇒ 1＋5＝6

数13578の数字根は6です。
和が2桁の数16であるとき、さらに1＋6＝7として計算することは、16を9で割った余りを求めることでもあります。
9で割った余りは、9を取り去ることであるため、この操作を九去法といいます。九去法はインドで考案され、ヨーロッパに広がり、加法・減法(応用すると乗法・除法)の四則演算の験算法として古くから用いられていました。
その方法は、数字根が加減法の計算の後も変わらないことを利用したものです(ガウスの導入した合同式によりその性質を調べることができます)。

$$a \equiv b\ ,c \equiv d\ (\mathrm{mod}\ n) \Rightarrow ac \equiv bd\ ,\ a + c \equiv b + d\ ,\ a + k \equiv b + k\ \ (\mathrm{mod}\ n)$$

各位の数字が0, 1だけで構成される72の倍数で最小のものを求めてみましょう。

72＝9×8

72は9の倍数です (72⇒ 7＋2＝9とみても分かります) から、各位の数字が1のみで構成されるレピュイット数で最小の9の倍数を考えると、111, 111, 111。また、72は8の倍数ですから、その中で0, 1のみで構成される最小の数は1, 000。このことから、求める数は、

111, 111, 111, 000

となります。
さて、特異な性質を有する数達の数字根を調べると、その多くは9になっています。

123456789, 1089, 2925, 3087, 142857, 6174, 297, ………

サム・ロイドは「9のもつ神秘性はひとえに9が十進法の最終数字であるという単純な事実に基づいている」と指摘していますが、数達のエンターティナーたる資質は9なるDNAによって決定されているようです。

999

…………無限の旅を続ける数

スリーナイン。
1001はインドでは完全数1000を超える吉祥数として扱われるのに対して、999は1足りないわけですから、不完全な数ということになるのかもしれません。でも、

$999=9\times111$

1と9、すなわち始まりと終わりで作られる数であり、すべてを見てきた数でもあるわけです。
さらに、素因数分解すると、

$999=3^3\times37$

ラッキーナンバーの3と7だけで作られる数であり、数37の面白い性質にも関与していました。
999は1089のマジックの演出に深い関わりがありました。
999は1000－1とみることで、1桁目の数を4桁目に移動させる働きがある数でもあります。
999は分母の値になることで、循環小数による踊りを演出しています。
999は、九去数として、種々のマジックで奇術師の有能なアシスタントを務めています。
こうしてみると、どうして、どうして、ただ者ではない数なのです。
999は8番目の第2定義によるカプレカ数であり、
999……999²についても、$(10^n-1)^2$ と考えると、各位に並ぶ数字が美しく再現され、カプレカ数になることが示されました。
では、3乗の場合の各位の並びはどうなるでしょう。

$999^3=997002999$

この数字の並びにも特徴があります。9の数を増やしていくと、

$9999^3=999700029999$

$99999^3=99997000029999 9$

$999999^3=999997000002999999$

n 桁の9のゾロ目は、$N=10^n-1$ となることから、その3乗は、

$$N^3=10^{2n}(10^n-3)+3\cdot10^n-1$$

N^3 は、3n 桁の数であり、

$$\underbrace{(999\cdots\cdots999)^3}_{3n}=\underbrace{999\cdots99}_{n-1}7\underbrace{000\cdots00}_{n-1}2\underbrace{999\cdots99}_{n}$$

となります。N の4乗は、

$$N^4=(10^n-1)^4=10^{4n}-4\times10^{3n}+6\times10^{2n}-4\times10^n+1=10^{3n}(10^n-1)+10^n(6\times10^n-4)+1$$

これから、

$$\underbrace{(999\cdots\cdots999)^4}_{4n}=\underbrace{999\cdots99}_{n-1}6\underbrace{000\cdots00}_{n-1}5\underbrace{999\cdots99}_{n-1}6\underbrace{000\cdots00}_{n-1}1$$

何乗しても綺麗な配置で数が並びそうですね。999にも面白い性質が潜んでいるようです。
　ところで3つの9で作られる次の数で、一番大きな数はどれだと思いますか。

①$999$　②$99^9$　③$9^{99}$　④$9^{9^9}$

一番小さな数は①の999で、一番大きな数は④の9^{9^9}であり、999！よりも遥かに大きくなります。
どれだけ大きいかというと、$9^9=387420489$ ですから、$N=9^{9^9}$ とすると、

$$\log_{10}N=\log_{10}9^{387420489}\quad 387420489\times2\times0.477121=369692902.264338$$

$\log_{10}3$ の精度により桁数がずいぶん違ってきてしまいますが、3億6千万個以上の0が並ぶというとんでもない数になるのです。
1947 年、H.S.ウーラーは、$\log 9^{9^9}$ を小数第 250 桁まで計算しており、9^{9^9} に愛着があったみたいです。現在では、

$$9^{9^9}=428124773\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots89$$

であることが知られています。もっとも、アイザック・アシモフは著書「雑学コレクション」で、誰もその値を見たものはいないともいっていますが……。
中国では大昔から基数の最大数である9は皇帝の数といわれていましたが、その9を3つ使って作られる最大数9^{9^9}は、無限を孕む数であり、宇宙の果てまでいってしまうような大きさになります。3つの9の並びがちょっと足りないなんて認識は吹っ飛んでしまいましたね。
スリーナインの響きは、僕らの世代は「銀河鉄道」の汽笛の響きを連想してしまいます。
ジョバンニは、ケンタウルの星祭りの夜、天気輪の丘で銀河鉄道に乗り込みカムパネラと一緒に天の川への旅を続けます。ジョバンニの陽炎のように妖しい「銀河鉄道の夜」の儚い夢の果て。そして、鉄郎とメーテルは、大惑星雲アンドロメダの惑星メーテルへ「万感の想いを込めて、いま汽笛が鳴り」、999が導く無限へと旅だっていきます。1000に一つ足りないからこそ無限に希求し続けるノスタルジックな数、それが999なのです。

出会いのエピソード

数字と触れ合う生業だから、自然、数達との出会いも多くなる。

根元の数であり神性の象徴でもある1、極性と分割であり根元の1から離脱したアダムとイブの2、そして新たに第三者により統一をもたらす3、秩序の4、生者の5と人類の歴史とともに数は命を与えられていく。やがてインドからの長い時空の旅を終えて、0は世界に数の文化をもたらし数達は思い思いに個性を確立していくのである。

ちょっとしたきっかけで知り合えた数達にはいつも驚かされる。ついついその語り口に我を、時間を忘れてしまう。なんてピュアな出会いなのだろう。圧倒的個性の強さと尽きない魅力に出会えた喜びを日記のように書き留めていく。そんな数達をいつか紹介してみたいと思っていた。

数達の中にはグループをつくるものもいる。友愛数、社交数、エマープ数、双子数……枚挙に暇がない。
ここで紹介しているのは、極力グループに属さず、群れの外にいる孤高の数達。一人だけで、立派に主張し、舞台を闊歩できるエンターティナーばかりである。そんな数達の自己紹介として、人(いや数)となりを簡単に触れてみた。

それでも、いざ、どの数を候補にと考えると、それはもう大変だった。数達が、私も俺も入れろとドカドカ押し寄せてくる。5つ、6つ取り上げればいいかなあと思っていたのが、18篇の数達のエピソードを紹介する羽目になってしまった。だから、「自然界を支配するゴールデンナンバー」とか、「神が創造した数π」とか、有名になり過ぎた数にはここでは遠慮してもらった。ハーディいわく、ちっとも深刻でないけど、誰もが「ヘーッ」て、うなずけるピリリと山椒が効いたような数達にスポットを当てている。

でも魅力的な数が、あまりに多いからこれで終わらせてしまうのはもったいないし、何よりも数達に申し訳ないという気持ちもある。心の中をじんわり暖めている数、ふんわり包んでいる数、ヤキモキする数、まだまだ語りつくせないし、この後も、数達との出会いは続くのである。そんな数達の中でも特に心に残り離れない数がある。それは「忘れてしまった数達」である。出会ったときは、その魅力に惹かれたのに、うっかり書き留めておくのを忘れてしまった数。シルエットはおぼろげに分かるのにどうにも背格好が思いだせない。あれは誰だったのだろう、あの魅力は何だったのだろう、そういった数達が心を掴んで離さないのだ。いつかまた出会えることがあるならば、増えた仲間の数達とともに紙面を飾ることができるだろう。

出会いの場の記録

555^2　インド数学が脚光を浴びていますが、本の帯を飾るのはたいてい、47×43を暗算でできますかという類です。
でもこういった計算は速算術として日本でも昔からよく知られていたものです。たぶん、一般的な速算やパズルの本には載っているのでしょう。後半は私が考えたものですが、これも何かに載っているのではと思っています。

$\frac{2}{5}$　この本の中にはワクワクする数がたくさん登場します。そのなかの一つが無限分数でした。ここでは、その内容を一般化した形で証明を与えています。

数学パズルランド　田村三郎著　講談社(ブルーバックス)

76^2　ペレリマンは、16歳で国際数学オリンピックに出場し、全問正解で金メダルを獲得したロシアの数学者。後にフィールズ賞に選ばれますが、辞退します。パズル問題にも造詣深く、数々の著作があり、その内容はこの数にように不思議議が満ち満ちたものばかりです。

代数のはなし　ペレリマン著　東京図書

1001　新聞のコラムに掲載された100話から選りすぐりの50話をセレクトした本の冒頭を飾る数です。この人はこんなに楽しく数を語ることができるのかと感心してしまいます。コピー数の話は比較的よく知られたものです。1 番めの「魅惑の数」に載っています。

5分で楽しむ数学50話　エアハルト・ベーレンツ著(鈴木　直　訳) 岩波書店

$7\times11\times13$　倍数判定法は既知のことです。その出典は自分でも分かりません。参考書に書いてあったのかもしれません。
次の公式集には確かに載っていたと記憶しています。改めて、対峙してみると奥の深さに驚かされます。

モノグラフ公式集　矢野健太郎　監修　科学新興新社

37　数字3と7は日本人は大好きなようです。だからこの2つのトリックは強いインパクトを残すのかもしれません。
37で割り切れるこの数の話題は次の本にあります。心理トリックは、後述のガードナーの本に載っています。

数学アイデアパズル　藤村幸三郎／松田道雄　著 (ブルーバックス) 講談社

$\frac{6729}{13458}$　小町算やセンチュリー・パズルは、定番です。載っていないパズル本はモグリでしょう。その中でも樺先生の本はいつも参考になります。よくぞこんなにみつけられるなというぐらい凄い。「世にも不思議な女王のトリック」の章に小町算の話題が載っています。

数学おもしろ辞典　樺旦純著　三笠書房

123456789　数学の楽しさを知ってもらおうと12の話題について易しく丁寧に解説した小中学生用の本です。
数字の変換は、第1話「ふしぎな数字"9"」に載っています。

数学がおもしろくなる12話　片山孝次　著　岩波ジュニア新書

142857　アビニュンの橋の上で輪になって踊ろう！。フランス民謡にあわせて、数達が活き活きと踊りだします。
数学パズリストの肩書きをもつ著書のタクトに読者も踊りに加わってしまいます。

数学パズル　大熊　正　著　全国出版

3087　菊池隆夫先生(元北数教高校部会部会長)の講演の中で知り合った数です。先生自身は、日数教全国大会の発表で、桂田芳枝先生より、紹介されたとのことです。

数学つれづれ草　菊池隆夫　講演

1089　この数もいろいろなところで出会いました。もっとも印象深かったのは、次の本です。その語り口は絶妙で、数学的な証明は極力排除して、語りだけで結論まで導いています。お薦めの一冊です。

数学はインドのロープ魔術を解く　ディビット・アチソン著　伊藤文英　訳　早川書房

2925　高木茂男・中村義作の両先生がタックを組んだらこんな凄い本ができてしまいます。2925は、「間違えても間違わない数式」の中にデュードニーの「パズルの王様」などの例を挙げて紹介されています。

数理パズル　池野信一・高木茂男・土橋創作・中村義作　著　中公新書

1729　インドの魔術師ラマヌジャンの逸話は数学者の話題を扱っているどの本でもみることができます。
特に、木村先生の本は秀逸で、独自の視点でラマヌジャンの生涯にスポットを当てています。
森先生の本は、森先生自身の個性が光る文体になっています。　**異説　数学者列伝　森　毅著　筑摩書房**

数術師伝説　木村俊一著　平凡社

6174　カプレカ数が最近話題になったのは、日本数学協会でのチャットルームです。西山豊先生(大阪経済大学)が話題の数として紹介してくれました。仙田先生は、いろいろな桁のカプレカ数についても言及しています。

「理系への数学」～6174 の不思議　西山豊寄稿　現代数学社

数学の雑学辞典　仙田章雄著　日本実業出版社

297　もっとも多くの数達に出会うことのできる本です。数の住民のハローページみたいな本です。住所がすぐ分かります。
この本は他の数達の住所を調べるときもずいぶん重宝しました。

数の事典　D．ウェルズ　著　芦ヶ原伸之・滝沢清・訳　東京図書

31415　ロイド、デュードニーとガードナーといったら、パズル愛好家で知らない人はいないでしょう。数学者であり奇術師。
「数学ゲーム」を始めとするコラムに書かれたアイデアと洞察力は今も色褪せることはありません。
九去法に関する著述もたくさんあります。

数学マジック　マーチン・ガードナー著　金沢　養・訳　白揚社

9　アメリカの科学月刊誌「サイエンティフィック・アメリカン」に連載した娯楽数学の話題から、選りすぐりの16話(Ⅰ)、20話(Ⅱ)を集めています。パズルの仕組みを数学的に解明しています。

おもしろい数学パズルⅠⅡ　マーチン・ガードナー著　金沢　養・訳　社会思想社

999　数学旅行家である著者が歩き集めた数学に関わる膨大な資料は、何十冊の本となり、書店に並んでいます。そのどれもが珠玉の一冊といっていいでしょう。

数学トリック＝だまされまいぞ！　仲田紀夫著　(ブルーバックス)講談社

この他にも数達との出会いの場となった書籍はたくさんありますが、5冊、紹介しましょう。

○ふしぎな数のおはなし　芳沢光雄著　数研出版

オールカラーの絵本です。算数の楽しさ・面白さを伝えたい、本を読んで聞かせるお母さんも含めて、数学・算数嫌いになって欲しくないという著者の思いに溢れています。

○雪月花の数学　桜井　進著　祥伝社

ゴールデーナンバー(黄金比)のみならず、シルバーナンバー(白銀比)に潜む、日本人の伝統や美意識について、数学伝道師である著者が分かりやすく解説しています。

○数の悪魔　エンツェンスベルガー著　晶文社

少年ロバートの夢に中に夜な夜な現れる「数の悪魔」が少年に数とのつきあい方の手ほどきを始めます。雪片のマジックの章のゴールデンナンバーの秘密の解明などすべての章がワクワク感のあるものばかりです。

○数の神秘　フランツ・カール・エンドレス著　畔上　司・訳　現代出版

1から1001までの特徴的な数の性質を綴った本。マニアックだけど、なるほどとうなずいてしまいます。

○数の本　J.H.コンウェイ　R.K.ガイ　著　根上生也　訳　シュプリンガー・フェアラーク東京

オイラー数・ネイピア数・フェルマー数・メルセンヌ数などなど、さまざまな数についての面白い話題。著者のコンウェイは、ライフ・ゲームの考案者としても知られています。