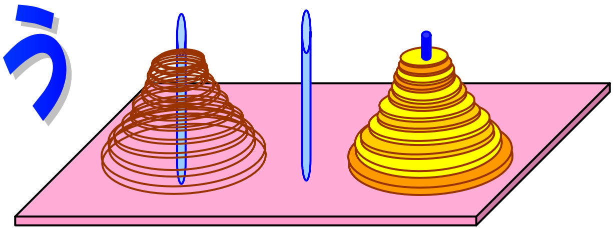
ハノイの塔で遊ぼう



札幌藻岩高校　中村文則

○はじめに

「ハノイの塔」は 120 年前に考案されたパズル玩具であり，いまでも広くパズル愛好家に親しまれている．その理由は，有名パズルがみなそうであるように，規則性のシンプルさと並べ替えの面白さに拠る．ゲームのルールは簡単．板の上の３本の棒の１つに突き刺された大小の円盤を他の棒に次の規則で移し換えるだけである．

> ①１回に１枚の円盤しか移動できない
> ②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む
> ③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる

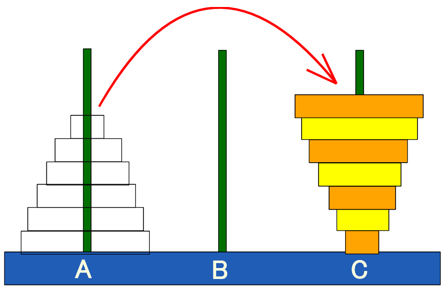
単純な規則だから，誰にでも取り組め，実際にやりだすと手が止まらなくなるのだ．
このパズルに関しては「バラモンの塔」という次の逸話もよく知られている．

「インドのガンジス川ほとりの町ベナレスのバラモン教の寺院には，世界の中心を表すという聖堂がある．この聖堂の中には３本の大理石の柱が立っており，その１本には当初，大小 64 枚の黄金の円盤が，大きい円盤から順に重ねられていたという．この円盤をバラモン教の僧侶(ブラフマン)が昔から昼夜を問わず上記の規則で移し換えている．さて，バラモン教の教えでは，最初にこの円盤を１番目の柱に重ね並べたのは神であり，僧侶がすべての円盤を３番目の柱に移し換えたとき，この世は崩壊し終焉を迎えるという．
僧侶は今も浄罪を求め滅びに向かってひたすら円盤を移しているのである．

このぞっとするある意味では崇高な伝説もこのパズルを解くことの興味を掻き立てるのである．
ところでわれわれはバラモン教の僧侶ではないから，はっきり言えば上記の規則なんかはどうでもいい．このパズルで，もっと楽しく数学を遊べればと思う．そこで日夜苦行を続ける僧侶を尻目にルールをちょっと改ざんして数学の教材とみてハノイの塔のパズルを考えてみよう．
なお，円盤の枚数は n 枚とし，移動は最小の手数(てかず)を考えるものとする．

○ハノイのルールを作る

Ⅰ．A の正立の塔を C に逆立に移す



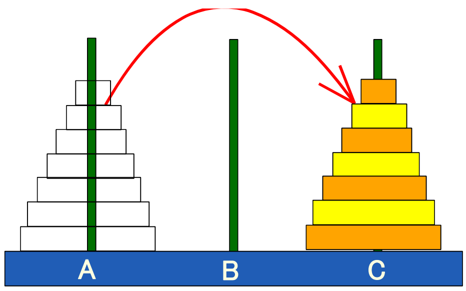
> 《移動のルール》
> ①１回に１枚の円盤しか移動できない
> ②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む

逆立とは，小さい円盤から順に大きい円盤を積み重ねることをいう．これに対して正立はハノイの塔の通常の積み重ね方としよう．
さて，この場合は逆立させることより「円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる」というハノイの塔の基本ルールは必要ない．したがい，ルールはないようなものであり，最小の手数 a_n も容易に求められるだろう．もちろん小さい円盤から順番に１個ずつすべてを C に移せばよい．

$$a_n = n$$

である．

Ⅱ．A の正立の塔を C に正立に移す



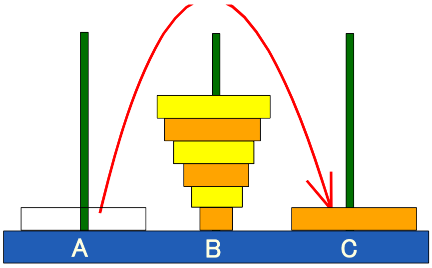
> 《移動のルール》
> ①１回に１枚の円盤しか移動できない
> ②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む

塔全体を $A \to B$ は逆立，$B \to C$ は正立に移動させる．その手数は

$$n+n=2n$$

と勘違いされがちである.
ハノイの塔の円盤移動の原則は

《基本原則》
最下位に置かれる円盤の移動の最優先



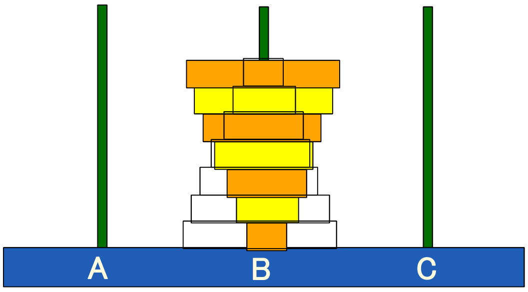
であることに注意したい.
この場合，一番下になる円盤は最大ｻｲｽﾞの円盤であるから，この円盤が自由に動くことができるように，他の円盤をすべて別の棒に移していくのである.
したがって，まず A の棒から B の棒へ上から順に $(n-1)$ 個の円盤を移動させる．そして一番最後の n 番目の円盤を剥き出しにして，その円盤を C へ移動させる．次に，B の棒に差し込まれた逆立している $(n-1)$ 個の円盤を C に順次移していく．よって，その手数の総数 a_n は,

$$a_n=(n-1)+1+(n-1)=2n-1$$

となる．単純に移動する場合より手数が１つ減るのである.

Ⅲ. B の正立の塔を同じ塔に逆立に移す

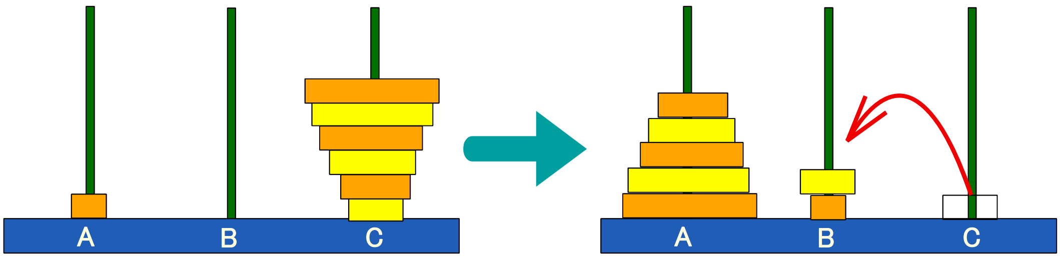
《移動のルール》
①１回に１枚の円盤しか移動できない
②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む



一番下にくるのは最小円盤であるから，基本原則によりこの円盤を最優先する.
まず，B にある一番上の最小円盤を A に移し，B にある残りの $(n-1)$ 個の円盤を順に C に逆立に移したあと，A の最小円盤を B に移す．これで最小円盤が目的の位置に移された.
次に移動が最優先される円盤は，C に逆立している $(n-1)$ 個の一番下の円盤となる．それ以外の $(n-2)$ 個を A に正立に移していき，最後に一番下の円盤を B に移す.
後は，A にある $(n-2)$ 個の円盤を B に移して終わりである.
以上より，その手数は,

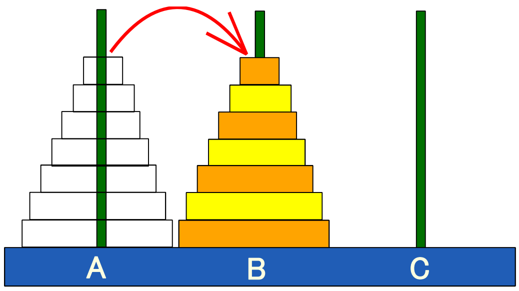
$$\begin{aligned}a_n&=1+(n-1)+1+(n-2)+1+(n-2)\\&=3n-2\end{aligned}$$

である.



Ⅳ. A の正立の塔を他の塔に正立に移す

《移動のルール》
①１回に１枚の円盤しか移動できない
②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる



通常のハノイの塔のルールによる移動である.
このルールはアルゴリズムを考えることで帰納法の問題とみることができる.
円盤の枚数を２，３，４，５，……と増やしていき，その手数 a_n を予想してみるとよい.
$a_2=3, a_3=7, a_4=15$ ぐらいは楽しんでいるうちにすぐに見つけられる．そのうち,

$$a_2=2^2-1,\ a_3=2^3-1,\ a_4=2^4-1$$

に気が付くだろうから，すぐに $a_n=2^n-1$ が予想される．あとはこの予想が正しいことを例えば数学的帰納法なんぞを使っ

て示すことになる．ここでは「最下位円盤優先」の基本原則を基に説明しよう．

例えば，３枚の場合は，まず２枚を他の棒に移動させ，一番下の円盤を目的の棒に移し，最後に残りの２枚を移動させることになる．したがってその手数は，

$$a_3 = a_2 + 1 + a_2 = 2a_2 + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$$

同様に，４枚の場合は，

$$a_4 = a_3 + 1 + a_3 = 2a_3 + 1 = 2\cdot 7 + 1 = 15$$

以下，続けていけばよい．これを２枚の場合から順次考えていけば，

$$a_2 = 2 + 1$$

$$a_3 = 1 + 2a_2 = 1 + 2(2+1) = 1 + 2 + 2^2$$

$$a_4 = 1 + 2a_3 = 1 + 2(1 + 2 + 2^2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$$

よって，

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

となる．なお，a_{n-1} と a_n の関係をみると，

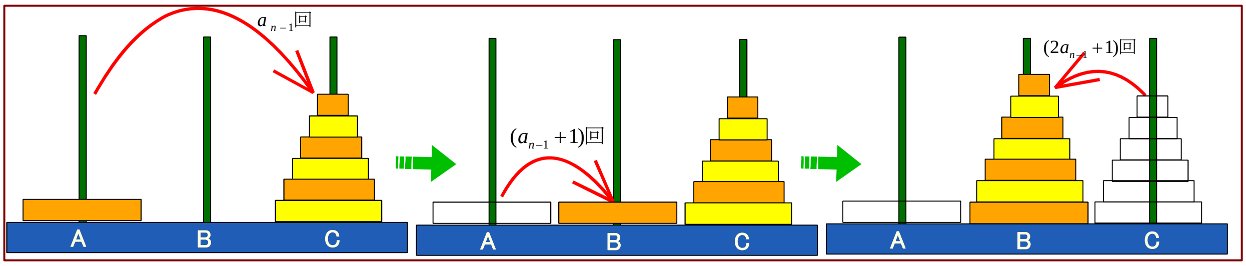
$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

これから，　$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$

より，数列$\{a_n + 1\}$が公比２の等比数列となり，その一般項は，

$$a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1} = 2^n$$

このように，ハノイの塔の移動は，漸化式の問題とみて指導することもできる．



Ⅴ.A の正立の塔を C の塔に正立に移す

バラモンの塔の逸話では，第３の棒に円盤を移し換えるとある．すなわち，移動する円盤は指定されており，残りの２つの棒は補助棒的に使われている．では，最小の手数で指定した棒に移動するにはどうしたらいいだろう．

例えば２枚の場合，一番上の円盤を B に移すと，その下の円盤は C に移る．よって，２つの円盤は C に移ることになる．すなわち，一番上に置いた場所と違った場所にすべての円盤は移る．

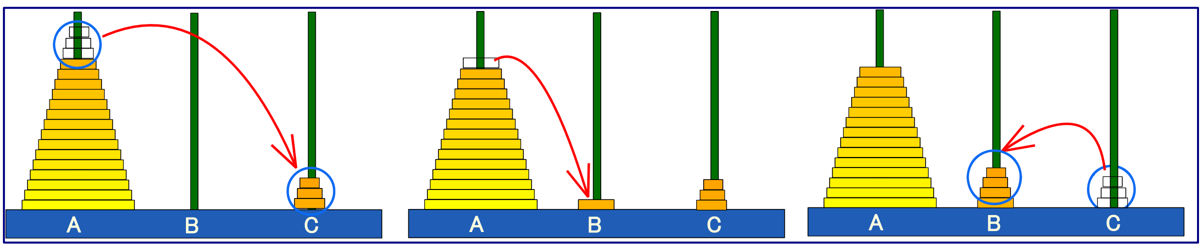
３枚の場合は，一番下を動かすためにはその前に上の２枚を動かすわけだから，その２枚の移動する棒は，一番上の円盤を置いた棒とは異なる棒である．したがって一番下の円盤は，一番上の円盤を最初に置いた棒に移ることになり，円盤全体は最初に置いた棒の位置にすべて移動する．

このように考えていくと，次の結論を得る．

> A にある塔を最小の手数 a_n で C にすべて移すには，
> 円盤が奇数枚ある場合は，一番上にある円盤を C の棒に移す．
> 円盤が偶数枚ある場合は，一番上にある円盤を B の棒に移す．

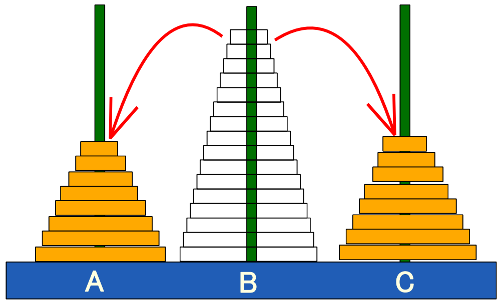
ハノイの円盤の移動は，個数２個の移動を基本として，２個毎にその下の円盤を基本原則に基づき優先させ，移動させていく．しかし，実際に円盤の移動の操作をしてみると，人間の頭では，３個をブロックとして(7回の移動を)考えたほうが良さそうである．３個の移動は，一番上の円盤が移動した場所が３個のブロックの移動場所に一致し，全体の移動が見やすいのである．

ところで，バラモンの塔では，僧侶(ブラフマン)は昼夜黄金の円盤を他の棒に移す苦行を続けている．円盤の枚数は64枚であったから，最小の手数ですべての円盤を C に移し換え勤行を終えるには最初の一手は B に置かなければならない．僧侶が一番始めに震える手で１枚目の円盤を置いた場所が C であったとしたら，滅びを迎える最後の一手で僧侶は神の御心を知ることになるのかもしれない．



Ⅵ. B の正立の塔の偶数，奇数番目の円盤を両端の棒に正立に振り分ける

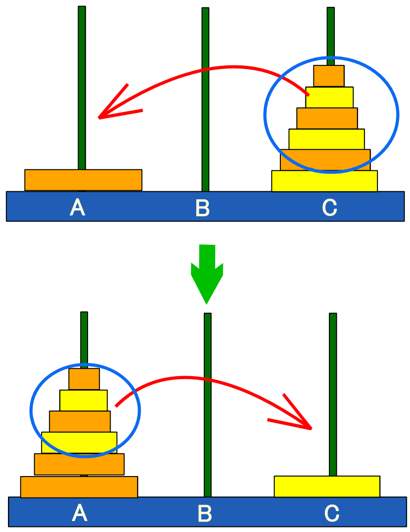
《移動のルール》
①１回に１枚の円盤しか移動できない
②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる



単純操作で考えれば，まず，B にある n 個の円盤から最下位の円盤を除いた $(n-1)$ 個の円盤を A に移し，B に残った円盤を C に移す．
次に，A の上から $(n-2)$ 個を C に移し，今度は C の $(n-3)$ 個を A に移す．以下，交互に円盤の個数を１個ずつ減らしながら A と C の棒に振り分けていけば，最終的には偶数番目と奇数番目のすべての円盤が両端の棒に振り分けられる．
したがってその手数を b_n とし，通常ルールの n 個の円盤の場合の手数を a_n とすれば，

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_{n-1}+1+a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_2+a_1 \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1) \\
&= 2^n-n+2
\end{aligned}
$$

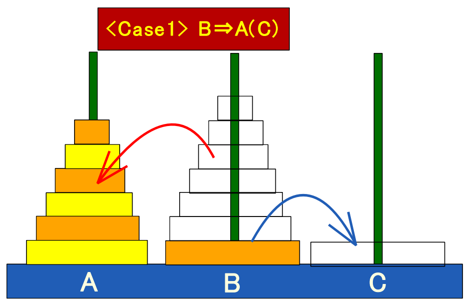
となる．
しかし，これが最小の手数でないことは明らかである．
例えば，$b_2=2^2-2+2=4$ となるが，実際には，B の円盤を両端に振り分けるだけであるから $b_2=2$ である．b_3 については，



B の上の２枚を $A \Rightarrow B$ の一番下を $C \Rightarrow A$ の一番上を C

と移していけば，$b_3=5$ でいいことになる. 上述の振り分けより２手減っている．
実は上述の計算は，「最下位円盤の優位性」の捉え方に誤りがある．
円盤を中央の棒 B から両端の棒 $A(orC)$ に移す場合と，両端の棒から中央の棒に移す場合では，最下位円盤が異なるのである．この２つの場合について具体的にみてみよう．

《Case 1》 中央棒(B)⇒両端棒($AorC$)

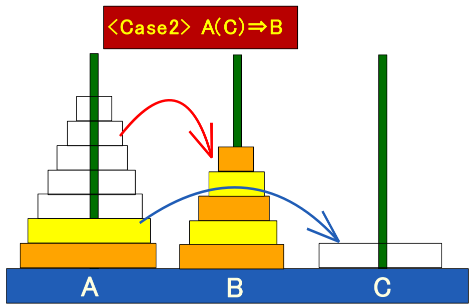


「最下位円盤の優位性」より，n 個の円盤から最下位を除いた $(n-1)$ 個の円盤を両端のどちらかに移動し，最下位の円盤を残りの両端に移動する．
よって，この移動の回数は，通常 n 個のハノイの最小手数を a_n とすると，

$$a_{n-1}+1=(2^{n-1}-1)+1=2^{n-1}$$

となる

《Case 2》 両端棒($AorC$)⇒中央棒(B)



n 個の円盤のうち，一番下にある最大ｻｲｽﾞの円盤は両端に配置される円盤のひとつであるから，その上の円盤が移動対象となる最下位の円盤である．したがって，上から $(n-2)$ 個の円盤を中央棒 C に移し，$(n-1)$ 番目の円盤をもうひとつの端に移せばよい．よって，移動の回数 b_n は，

$$a_{n-2}+1=(2^{n-2}-1)+1=2^{n-2}$$

となる．

このように Case2 の手数は Case1 の手数の半分でいいことがわかる．
したがって中央棒に移す回数を最大限とるために，

$$\boxed{B}\to A\to\boxed{B}\to C\to\boxed{B}\to A\to\boxed{B}\to C\to\boxed{B}\to A\to\cdots$$

のように，交互に両端と中央棒を移動させればよい．
このことから，n 枚の円盤の最小手数 b_n を求めると，

$$b_3=2^2+2^0=5$$
$$b_4=2^3+2^1+2^0=11$$

$$b_5 = 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22$$

となる．さらに抜き出していくと，

$$b_9 = 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$
$$b_{10} = 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$
$$b_{11} = 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$$
$$b_{12} = 2^{11} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$
$$b_{13} = 2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$
$$b_{14} = 2^{13} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$$

個数が３枚増える度に，同じ形の移動(アルゴリズム)が繰り返されることが分かる．したがって，最小手数b_nは３を法とする剰余類で調べられる．

① $n \bmod 3 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + \cdots\cdots + 2^{n-3} + 2^{n-1} \\ &= (2^0 + 2^2) + (2^3 + 2^5) + \cdots\cdots + (2^{n-3} + 2^{n-1}) \\ &= (2^0 + 2^2)(1 + 2^3 + 2^5 + \cdots\cdots + 2^{n-3}) \\ &= 5 \cdot \frac{(2^3)^{\frac{n}{3}} - 1}{2^3 - 1} \\ &= \frac{5 \cdot 2^n - 5}{7} \end{aligned}$$

② $n \bmod 3 = 1$ のとき

$b_n = 2b_{n-1} + 1$ である．ここで，$n-1$ は３の倍数より，

$$b_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 5}{7} + 1 = \frac{5 \cdot 2^n - 3}{7}$$

③ $n \bmod 3 = 2$ のとき

$b_n = 2b_{n-1}$ であるから，

$$b_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 3}{7} = \frac{5 \cdot 2^n - 6}{7}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	2	5	11	22	45	91	182	365	731

右上表に具体的な手数を示したが，$a_{10} = 1023$ であるから，通常のハノイの塔の手数に比べて意外と少ない結果となる．

ところで，$b_9 = 365$ は，バラモンの塔伝説から考えても意味深な回数ではないだろうか．

○変則ハノイの塔

ハノイの塔のゲームは，通常ルールによる単純な操作そのものでも数学的にも十分面白いが，移動規則や作り上げる塔の形を変えることで，ゲームとしても，教材としても，もっと深く楽しむことができる．

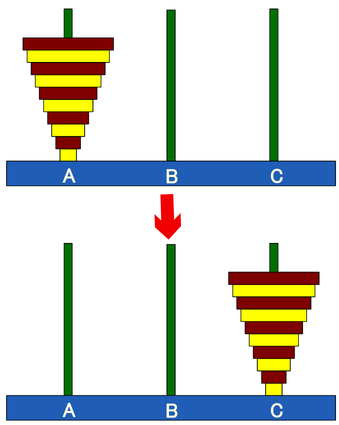
上述の「塔を両端の棒に振り分ける」こともそうしたアレンジの一つであるが，この問題の振り分けは，円盤の偶数・奇数番めをそれぞれ，白，黒といった色で塗り分けると，両端の棒に白い塔と黒い塔を正立に作り上げることになり，視覚的にもモチベーションを高め，喚起するものとなる．さらに，移動過程のアルゴリズムを色彩的に判別することもある程度は可能となってくる．こういった色分けされたハノイの塔は，「レインボーハノイ」という商品名でも市販されている．

ここでは，そういったものの幾つかのバリエーションと，そのアルゴリズムを考えてみよう．

なお，移動のルールは

> ①１回に１枚の円盤しか移動できない
> ②移動した円盤は３本の棒のいずれかに必ず差し込む

については変更はしないものとし，「③の移動した円盤をどの円盤に乗せるか」というルールだけを変える．



【逆ハノイ】

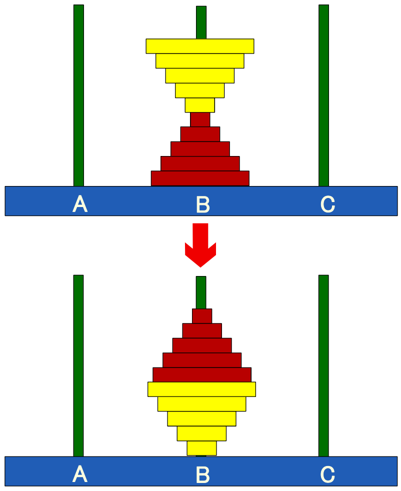
逆立ちの塔を他の棒に逆立ちに移してみよう．

> 《移動のルール》
> ③移動した円盤はそれより<u>小さな</u>円盤の上に乗せる

通常ルールとの違いは，③の小さな円盤の上に乗せることである．

もちろん，その最小手数は$2^n - 1$回である．したがってこれはアルゴリズムの問題というより，操作の感覚の問題である．大小の重ね方の順番を変えるだけだが，頭はアルゴリズムに追いついてこない．さらに，両端に逆立の塔を作るような形にまで発展させ，実際にやってみると案外てこずるものである．

【凹凸ハノイ】



大きい円盤から順に奇数番目は正立，偶数番目は逆立にして，凹レンズの形に積み上げたハノイを，正立の部分と逆立の部分を入れ替え，凸レンズの形に並べ積み上げる．

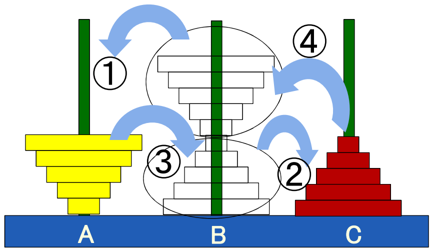
> 《移動のルール》
> ③移動した円盤は，
> 奇数番目のものであれば，それより大きい円盤に乗せ，
> 偶数番目のものであればそれより小さい円盤に乗せる．

n が偶数か奇数かによって，正立，逆立になる円盤の枚数が違ってくるため，場合分けが必要である．最小手数を a_n $(n \geqq 2)$ とする．

(1) $n \bmod 2 = 0$

正立，逆立の枚数はともに，$\dfrac{n}{2}$ 枚．逆立の部分を A に逆立に移してから正立の部分を C に正立に移す．そのあと，A, C にある円盤を B に移す．これらの４回の移動において，最小手数はハノイの通常ルールの手数にしたがう．また，それらの回数は枚数が同じためみな等しい．以上より最小手数 a_n は，

$$a_n = 4\left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right) = 4 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 4$$



(2) $n \bmod 2 = 1$

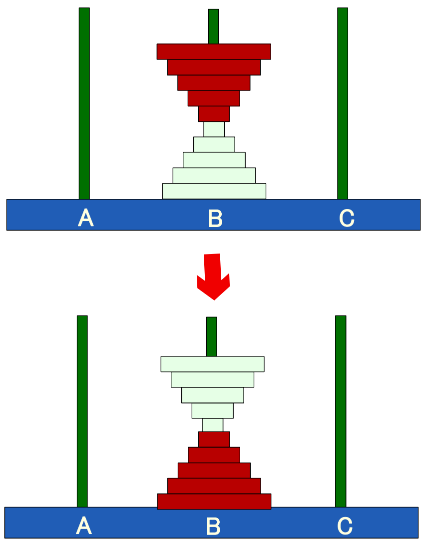
正立，逆立の枚数は，それぞれ，$\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n-1}{2}$ 枚である．移動の手順は上と同じで枚数が異なるだけである．

よって，最小手数 a_n は，

$$a_n = 2\left\{\left(2^{\frac{n+1}{2}} - 1\right) + \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)\right\}$$
$$= 2^{\frac{n+3}{2}} + 2^{\frac{n+1}{2}} - 4$$
$$= (2+1) \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 4$$
$$= 3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 4$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	4	8	12	20	28	44	60	92	124

【砂時計ハノイ】



大きい円盤から順に奇数番目を正立にまとめ，その上に，偶数番目を逆立に立て，砂時計状に積み上げる．この状態から逆立の部分を正立にして，その上に正立の部分を逆立にしたものを積み上げる．

円盤を，奇数番目を白，偶数番目を黒で塗っておくと，砂時計の上にあった砂が下に落ちた状態になる．

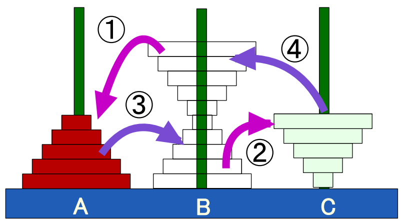
ただし，この場合のルールは少し複雑である．

正立(逆立)　⇒　逆立(正立)　⇒　逆立(正立)

と，逆立，正立する塔をブロックとして動かすことになる．

> 《移動のルール》
> ③奇数番目は小さい円盤，偶数番目は大きい円盤の上に乗せ，逆立，正立の塔が完成したあとは，奇数番目は大きい円盤，偶数番目は小さい円盤の上に乗せる．

最初に，奇数番目，偶数番目の正立，逆立の塔を両端の棒 A, C に正・逆入れ替えて移す最小手数は，合わせて n 回である．このあと，A にある偶数番目の正立の塔を中央棒に移し，C の奇数番目の塔を中央棒の正立の塔の上に逆立に積み上げればよい．その最小手数は，全体の円盤の枚数が偶数枚か奇数枚かによって，正立と逆立の枚数が異なることから，次のように場合分けされる．



(1) $n \bmod 2 = 0$

$$a_n = n + 2\left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right)$$
$$= 2^{\frac{n}{2}+1} + n - 2$$

(2) $n \bmod 2 = 1$

$$a_n = n + \left(2^{\frac{n+1}{2}} - 1\right) + \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$$

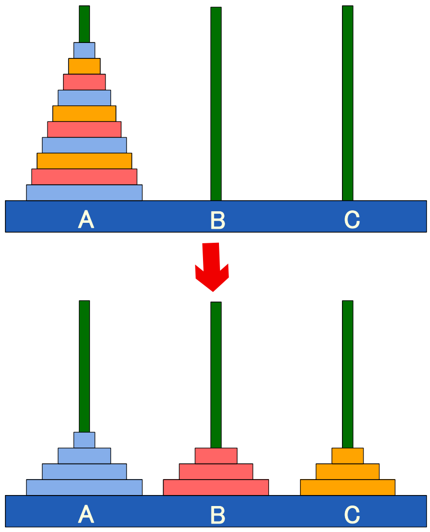
$$= 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + n - 2$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	4	7	10	15	20	29	40	55	72

である．

【三山ハノイ】

大きい円盤からの順番を３で割って，１余るものを A に，２余るものを B に，割り切れるものを C に移動させ，３つの山を作る．大きい円盤から順に３色に塗っていくと，三山は同じ色の山が出来上がる．



《移動のルール》
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる

移動ルールは通常ハノイと同じである．

最小手数 a_n を適当な枚数の場合について求めてみよう．

$a_1 = 0$， $a_2 = 1$， $a_3 = 2$ は明らか．

a_4 は，上２枚を C に移してから３枚目を B に移す．そして最後に，C の一番上の円盤を A に移すと完成する．

$a_4 = (2^2 - 1) + 1 + 1 = 2^2 + 2^0 = 5$

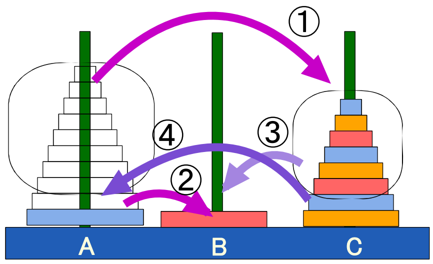
a_5 も同様に，上３枚を C に移してから４枚目を B に移す．そして，C の１枚目を A，２枚目を B に移す．

$a_5 = (2^3 - 1) + 1 + 2 = 2^3 + 2^1 = 10$

a_6 も，上４枚を C に移してから５枚目を B に移す．そして，C にある３枚を規則にしたがって振り分ければよいから，

$a_6 = (2^4 - 1) + 1 + (2^2 - 1) + 1 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$

よって，一番最後に残った円盤の振り分けを考えると，枚数が偶数と奇数で場合わけをすればよいことになる．



(1) $n \bmod 2 = 0$

$$a_n = 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2^{n-6} + \cdots\cdots + 2^0$$

$$= \frac{4^{\frac{n}{2}} - 1}{4 - 1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)$$

(2) $n \bmod 2 = 1$

a_{n-1} は偶数枚であるから，

$$a_n = 2a_{n-1} = \frac{1}{3}\left(2^n - 2\right)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	2	5	10	21	42	85	170	341

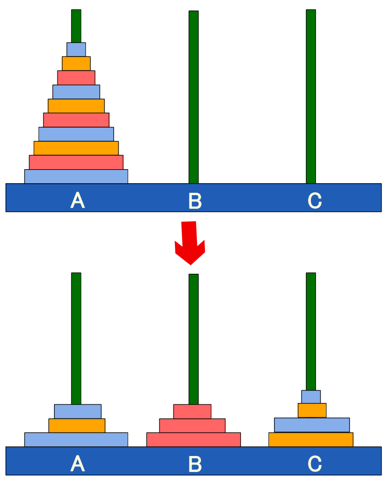
【千鳥ハノイ】

変則三山ハノイである．３つの山をつくることは変わらないが，大きい円盤から順に

$$A \to B \to C \to C \to B \to A \to A \to B \to C \to \cdots\cdots$$

俗に言うチドリに並べていく．円盤を大きい順に重ねていくと，中央棒には同色，両端棒に２色の色が交互に積み重ねられる．

なお，移動ルールは通常ハノイである．



《移動のルール》
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる

基本的には三山ハノイのアルゴリズムと同じであるが，両端にある山の移し方が異なってくる．最小手数 a_n を予想してみよう．

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4$

である．５枚の場合は，上３枚を C に移してから，４枚目を B に移し，C の一番上の円盤を B に移す．

$a_5 = (2^3 - 1) + 1 + 1 = 2^3 + 2^0 = 9$

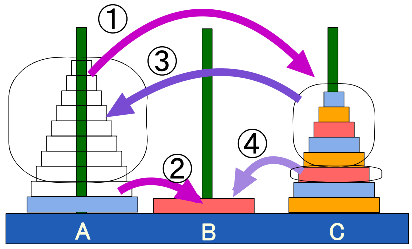
６枚では，上４枚を C，５枚めを B，次に C の上２枚を A, B の順におく．

$a_6 = (2^4 - 1) + 1 + 2 = 2^4 + 2 = 18$

７枚では，上５枚を C，６枚めを B，C の上２枚を A，３枚めを B におく．

$a_7 = (2^5 - 1) + 1 + (2^2 - 1) + 1 = 2^5 + 2^2 = 36$

以上より，$\{a_n\}$ は次のようになる．



(1)　$n \bmod 3 = 0$

$$a_n = 2^{n-2} + 2^{n-5} + 2^{n-8} + \cdots\cdots + 2^4 + 2$$

$$= \frac{2\left(8^{\frac{n}{3}} - 1\right)}{2^3 - 1}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 2}{7}$$

(2)　$n \bmod 3 = 1$

$(n-1)$ は３の倍数であるから，

$$a_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot \frac{2^n - 2}{7} = \frac{2^{n+1} - 4}{7}$$

(3)　$n \bmod 3 = 2$

$(n+1)$ は３の倍数であるから，

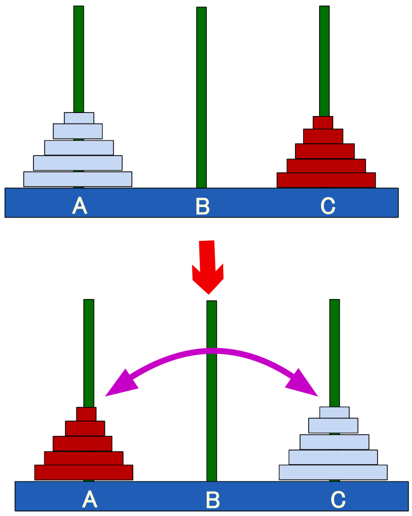
$$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+2} - 2}{7} = \frac{2^{n+1} - 1}{7}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	2	4	9	18	36	73	146	292

【SWAP ハノイ】

大きい円盤から数えて，偶数枚目，奇数枚目の円盤を，それぞれ両端棒に，大きい円盤から順に並べられている状態から，この２つの塔全体を入れ替える(swap)．奇数枚目が黒，偶数枚目が白の円盤とすると，黒い塔と白い塔の交換である．

《移動のルール》
③移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる



最下位円盤の移動最優先の原則から，奇数番目の円盤で作られる塔の一番下の円盤をもう一つの端の棒にまず移動させる．そのためには他のすべての棒を一旦中央棒に移動させなければならない．そして，最大円盤を移動したあとに，中央棒の円盤を左右に振り分けることになる．したがって最小手数 a_n は，

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

で与えられる．

ここで，a_{n-1} は，「両端の塔を中央に集め一つの塔にする」あるいは「中央にある塔を両端に振り分け２つの塔を作る」ということであるから，そのアルゴリズムは前述の「中央棒にある正立の塔の偶数，奇数番目の円盤を両端の棒に正立に振り分ける」方法に拠る．したがって，３を法とする剰余類としてまとめられることになる．

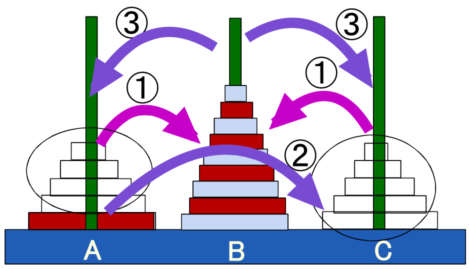
(1)　$n \bmod 3 = 0$

$(n-1) \bmod 3 = 2$ より

$$a_n = 2a_n + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 6}{7} + 1$$

$$= \frac{5 \cdot 2^n - 5}{7}$$



(2)　$n \bmod 3 = 1$

$(n-1) \bmod 3 = 0$ より，

$$a_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 5}{7} + 1 = \frac{5 \cdot 2^n - 3}{7}$$

(3)　$n \bmod 3 = 2$

$(n-1) \bmod 3 = 1$ より，

$$a_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 3}{7} + 1 = \frac{5 \cdot 2^n + 1}{7}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	3	5	11	23	45	91	183	365	731

この結果から，$n \bmod 3=2$ 以外はその最小手数は，両端棒に振分ける場合と一致していることが分かる．

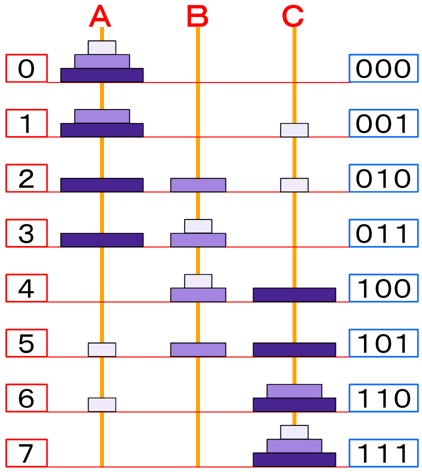
○ハノイの塔に潜む２進法を探る

通常ハノイ，変則ハノイいずれにしてもそのアルゴリズムは，複雑にみえても，結果としては底２の指数の形にまとめられる．最小単位での移動は，最小(最大)円盤が動くか動かないかである．それは交互に起こり，２番め以降の円盤の移動が自己相似的にくっつき，膨れ上がっていく．

この最小円盤の移動のオン・オフから始まるアルゴリズムのプロセスは，手数を２進法表示することでより明示的にすることができる．

３つの円盤における通常ハノイで，１枚の円盤の移動の回とその回を２進法表示した数字を右図のように対応させる．

ここで，円盤を小から大へ１，２，３と番号をつけて表現し，各回で移動する円盤を抜き出すと，次のようになる．



①1 ⇒ ②2 ⇒ ③1 ⇒ ④3 ⇒ ⑤1 ⇒ ⑥2 ⇒ ⑦1

この番号と，対応する２進法の数字の変化とを比較してみると，２進法で下位からみて最初に数字１が出現する位が円盤の番号と一致してることに気がつく．

例えば⑥2は，⑥を二進法表示した１１０では，２桁目に１が現れ，これが移動した円盤の番号２に一致しているということである．

手数を２進法表示することで，その数から何手目でどの円盤が移動するか読み取ることが可能となるのである．

では，その円盤はどの棒に移動したのだろうか．

これも図から，初めて現れる１の左側の数字の配列をみることで判断できる．

(1) 左側に数字１が現れないとき （００１，０１０，１００）
　空いている棒(のひとつ)に移動する．

(2) 数字１が左隣にあるとき （０１１，１１０，１１１）
　その１が表す下位からの位に対応する円盤のある位置に移動する．

(3) 数字１が０を１つ挟んで左側にあるとき， （１０１）
　数字１が表す円盤のある位置以外の場所に移動する．

n 枚の円盤で考えても同様のことが成立する．

【性質 1】

n 枚の円盤を小から大の大きさの順に円盤 $C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$ とする．

このとき，第 k 手めに移動する円盤は，k を２進法表示した数 $k_{(2)}$ を下位より見た数字の並びで初めて現れる１が m 番目であるとき，円盤 C_m である．

右図は，各回に対して円盤 $C_k\ (k=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ の移動する(出現)回を示したパターン図である．

これを見ると，円盤 C_k は，2^{k-1} 回に最初の移動を始め，2^k 手目毎に，その移動が繰り返されていることが分かる．

例えば，C_3 は，４手目に初めて動き，１２，２０，２８手めと，８手目毎に，再び動く．ここで，この移動の間隔８は２進法表示すると，１０００であるから，最初に出現する４手目１００に加えても２進法表示された値の２以下の位は００のままである．同様のことがすべての円盤 C_k についてもいえるため，上の規則が成立することが分かる．

次に，移動した円盤 C_k は，どの棒に差し込まれたかということであるが，次の規則から求めることができる．

C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	10進	2進
					■	1	000001
				■		2	000010
					■	3	000011
			■			4	000100
					■	5	000101
				■		6	000110
					■	7	000111
		■				8	001000
					■	9	001001
				■		10	001010
					■	11	001011
			■			12	001100
					■	13	001101
				■		14	001110
					■	15	001111
	■					16	010000
					■	17	010001
				■		18	010010
					■	19	010011
			■			20	010100
					■	21	010101
				■		22	010110
					■	23	010111
		■				24	011000
					■	25	011001
				■		26	011010
					■	27	011011
			■			28	011100
					■	29	011101
				■		30	011110
					■	31	011111
■						32	100000
					■	33	100001
				■		34	100010
					■	35	100011
			■			36	100100

【性質 2】

n 枚の円盤を小から大の大きさの順に円盤 $C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$ とする．

第 k 手めに移動する円盤 C_s が差し込まれる棒は，s 番目に初めて表れる１と，次に１が現れる t 番目と間にある０の個数によって，次のように場合分けされる．

(1) t が存在しないとき
　何も差し込まれていない棒に移動する

(2) ０が奇数個あるとき
　円盤 C_t のない棒に移動する

(3) ０が偶数個であるとき
　円盤 C_t がある棒に移動する

(1)の場合は，最下位円盤の移動最優先の基本原則により，$(m-1)$ 番までのひとつの操作(塔)が完成した状態である．すなわち移動する円盤は最下位の円盤ということになるから，その移動場所は何も円盤が差し込まれていない棒となる．

(2),(3)についても，C_k の出現パターンを考えると２進法の各々の位の値が対応する円盤の移動を表すことから分かる．また，円盤は小さい円盤から順に交互に振分けられるため，ある円盤の上に重ねられる円盤は，次の性質を満たすことは明らかである．

【性質３】
円盤が奇数番目(偶数番目)の円盤であるば，その上にくる円盤は偶数番目(奇数番目)の円盤である

最初に１があるのが m 番目とするとき，円盤 C_m が動き，その左隣に１があれば，それは円盤 C_{m+1} であるから，この上に C_m を重ねることになる．間に０がひとつあるときには，円盤は C_{m+2} に重ねることはできないから，残りの棒に移動する．同様に，１と１の間にある０の個数を調べれば移動した円盤が特定できるのである．

例えば，

１０１１００１００
と２進法で表されている数字は，
まずその桁数をみると，円盤の枚数は９枚であるから完成までの最小手数は，
$2^9-1=511$ 手
である．また，
$101100100_{(10)}=2^8+2^6+2^5+2^2=356$
より，511 手中，356 手目の円盤の移動であり，
１が出現するのは下位から３番目,6 番目であることより，
３番目に大きい円盤が６番目に大きい円盤のある棒に移動した

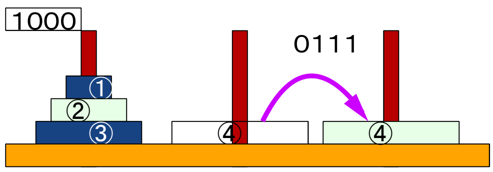
ことが分かるのである．

このように，２進法は，ハノイの塔の移動情報をビットで記憶していることになる．

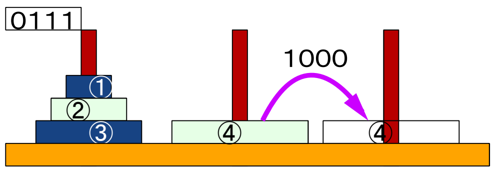
では，２進法の数字の配列からその凝縮された情報をどこまで引き出し，復元できるか考えてみよう．

まず，もう一度，２進法の０と１の表す意味について整理してみよう．

１はその位に対応する円盤が移動することを意味するが，これに対して０は，過去に移動したことを示している．例えば 01000 は，下位から０が３つ続くから，C_3,C_2,C_1 の円盤がすでに積まれて，ひとつの小塔がすでにでき，作業が終了したということを表す．この場合の作業とは移動の基本原則である「最下位の置かれる円盤」を剥き出しにして，その円盤の移動が完了したということである．すなわち，C_4 が移動したことになる．



また，00111 については，円盤を積んでいる途中の状態を表している．下位から１が３つ並んでいるから，C_3,C_2,C_1 が積み重ねられ，この後の作業で，剥き出しになった C_4 が移動することになる．

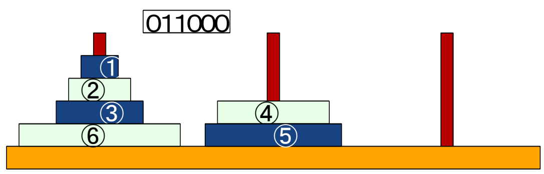


いずれにしろ連なっている１や０は，その数字の位に対応する円盤が順番に重ねられていることを意味している．これは，２進法の途中の位から連なってもこの性質は変わらない．

このことを２進法 011000 の表す円盤の配置で考えてみよう．３つの連なった０と２つの連なった１はそれぞれ C_3,C_2,C_1 を重ねた塔と，C_5,C_4 のを重ねた塔ができているということを表している．また，この２つの塔がひとつの棒に差し込まれていることはない．もしそうなら C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 は連続した並びとなり，それに対応する２進法の並びはすべて１かまたは０が連なることになってしまうからである．

これで，２つの塔合わせて５つの円盤の積み重ね方が分かるが，もともとの２進数は 6bit であるから，あとひとつ，最高位の０が表す最大円盤 C_6 はどこの棒にあるだろうか．

仮に，C_5,C_4 の円盤の下にあるとすると，４番から６番までは連続する値となるからすべて１の数字になってしまい，最高位の数字が０であることに反することになる．したがって，空いてる棒あるいは３つの円盤が重なっている棒のどちらかということになるが，実は，C_6 は０を表す３つの塔の下に置かれている．



すなわち，円盤は C_6,C_3,C_2,C_1 は重なっていることになる。

その理由は，前述の性質２による．円盤の出現パターンから，円盤 C_k は 2^k 間隔で出現するため，他の円盤に影響を与えることなく，２進法の各位はその位に対応した円盤固有の位置を表しているとみていい．性質２は，初めて現れる１に対して成立するだけでなく，どこの位を基準にしても，その１と次の１の間にある０の数で重ねる場所を特定できることになるのである．また，当然，０についても同様のことが成立するのは明らかであろう．

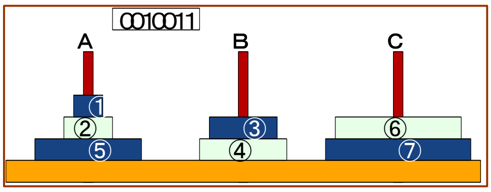
以上より，011000 については，下位から出現する最後の0(3 桁目)と，次の 0(6 桁目)の間にある１は偶数個より，これら

に対応する円盤は同じ棒に差し込まれなければならないことが分かるのである．
ここまでの性質をまとめておこう．

【性質 4】
n 枚の円盤を小から大の大きさの順に円盤 $C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots, C_n$ とする．
n 進法で，表現された下位からの並びで， s 番目から t 番目 $(t-s \geqq 1)$ までがすべて 1(あるいは 0)であるとき， C_s から C_t までのすべての円盤は大きい順に同じ棒に重なっている．

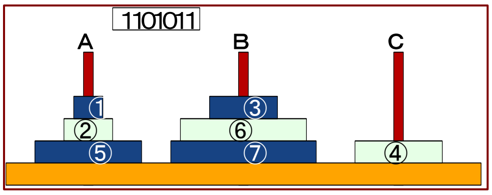
【性質 5】(性質 2 の一般化)
n 枚の円盤を小から大の大きさの順に円盤 $C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots, C_n$ とする．
n 進法表現で，下位から s 番目に 1(あるいは 0)があり，その次に現れる 1(あるいは 0)の位置が t 番目であるとき， s 番目， t 番目の位置に対応する円盤 C_s, C_t には s 番目と t 番目の 0(あるいは 1)の個数によって，次の関係が成立する．
(1) 個数が偶数のとき
C_s は C_t のある棒に移動する．
(2) 個数が奇数のとき
C_s は C_t のない棒に移動する．

いくつかの例を示そう．円盤を①〜⑦とし，差し込む棒を A, B, C とする．



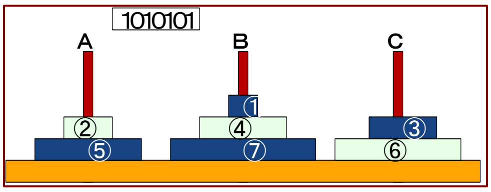
0 0 1 0 0 1 1

下位からみると，①と②，③と④，⑥と⑦はそれぞれ棒 A, B, C に重なる．下位から 2 つめの 1 と 5 つめの 1 の間に 0 が 2 つあるから，⑤は②の下にあることになる．



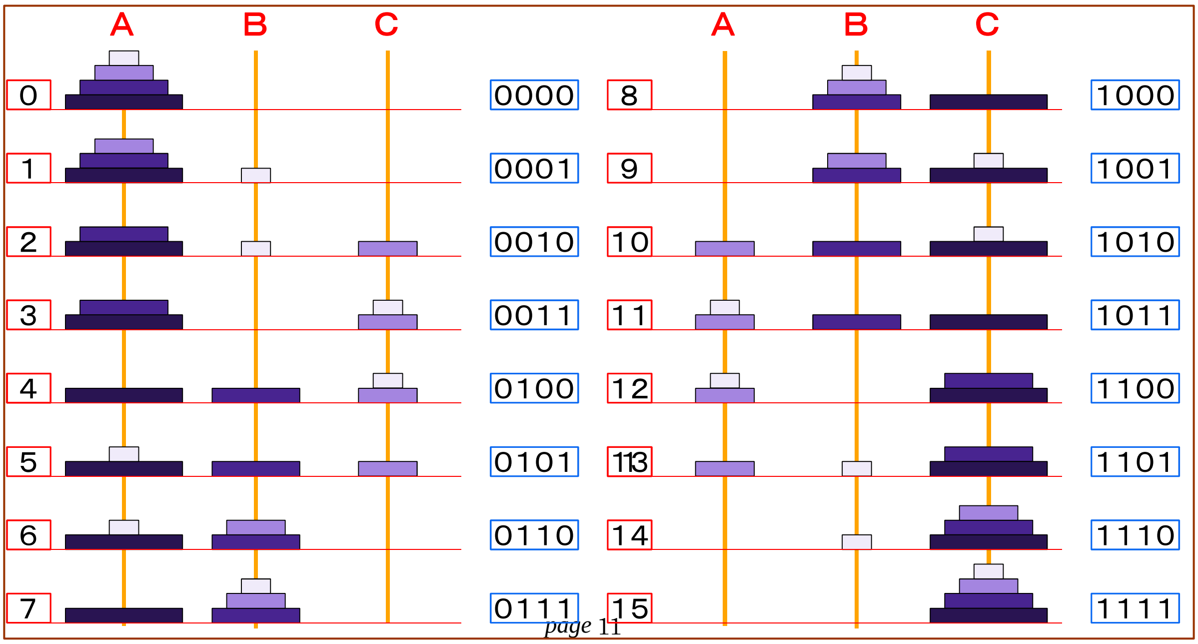
1 1 0 1 0 1 1

①と②，⑥と⑦がそれぞれ棒 A, B にあるとする．下位から 4 番目の 1 と 2 番目，6 番目の 1 の間には 0 が 1 つしかないから，④は C にある．次に③は，①②や④の下にあると連続するから⑥の上にある．同様に⑤は，④，⑥⑦とは同じ棒にないから，②の下にある．



1 0 1 0 1 0 1

0 は 1 つおきに出現するから円盤②，④，⑥はみな異なる棒 A, B, C にある．③と⑤については，②④⑥と連続する数にならないように配置すると，③は⑥の上，⑤は②の下に固定される． ⑦については，⑤は連続する奇数より同じ棒にはなく，⑥も連続する数より同じ棒にないから，④の下にくる．最後に①は，②の上(連続する)，③の上(奇数同士)にないから④の上にある．
以上のことから 2 進法は，ハノイの塔のすべての手順を記憶していることが分かる．2 進法の 0 と 1 の並びには，「どの円盤がどの棒に移動し，そのときの円盤すべての配置がどうなっている」が正確に刻み込まれているのだ．
なお， 4 枚の場合について，ハノイの手順を以下に示すので，参考にされたい．



○2進法(Binary Code)とグレイ符号(Gray Code)

出現パターン図で，初めて出現する円盤C_k ごとに位を表す数字を並べていく，

1, 1$\boxed{2}$1, 121$\boxed{3}$121, 1213121$\boxed{4}$1213121, 121312141213121$\boxed{5}$121312141213121,……

数字の列が自己相似的に増えていくのがよく分かる．これは，ハノイの通常ルールにおける移動が，最下位移動の優先より，対象となる円盤が移動したあとは，もとの状態にプレイバックするように復元されていく状態を示しているのである．実際，３枚と４枚の場合の円盤の移動を先に載せた図で確認すると，移動前の塔を１番目と考えると，2^n 回の手数で2^{n-1} 回を境に，まったく対称的に移動が繰り返されていることがわかる．

このことを分かり易くするために，各回で移動した円盤に対応する位を，移動ごとに

$0 \Rightarrow 1$ または $1 \Rightarrow 0$

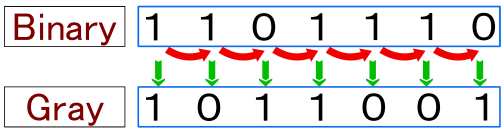
と変えてみると，２進法に似た０と１で表された数字の列ができあがる．この列をグレイコードという．このグレイコードの生成の過程を考えると，こちらの方がハノイの塔の移動のアルゴリズムをより美しく表現している. 右表は４枚の円盤のグレイコードと対比する２進法(Binary Code)を示したものである．どちらのコードも０と１をすべて入れ替える(反転させる)と逆順になったコードが得られ，ハノイの塔の移動の対称性をみることができる．しかし，移動の手順の再帰的な繰り返しは，グレイコードの方からより分かり易い．

Binary	Gray
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

コンピュータのようにデジタル的な表現を通電で電気的に扱う場合は，０と１の符号で表し，この符号で表現された数を２進法(Binary Code)といい，その最小情報量の単位を bit(binary disit)とよぶ．また，8bit を 1byte という．したがい，右表は 4bit 構成の２進法とグレイコードを対比したものであるが，２進法では桁が上がるときに二つ以上の数字が変化することがあるが，グレイコードは当然一つの数だけの変化であり，かつどの列も同じ列になることはない．これは通電のオン・オフにおいてはグレイコードでは１度で済むということであり，電子機器がより安定するということになる．したがって，１０進法を２進法に変換する場合，グレイコードでの代用が可能である．このことからグレイコードは反射２進コードともいわれている．グレイコードは，日常では馴染み難いコードであるが，画像処理，センサーといった様々なデジタル的処理の場でその活躍を見出している．また，無限列として考えることで，そのフラクタルな構造は，カオス的な模様を描き出すのである．

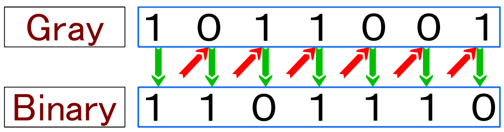
２進法をグレイコードに変換することは簡単である．最上位の数は同じであり，それ以下の桁はその桁の一つ上の桁の数を加え，次の規則で変換すればよい(排他的論理和)

$0+1=1,\ \ 1+0=1$
$0+0=0,\ 1+1=0$



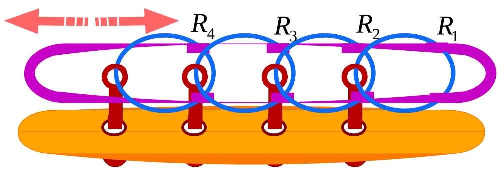
逆に，グレイコードから２進法への変換は次のようにする．

最上位は同じ数を置き，その値にグレイコードの下位の桁の数の排他的論理和を求め，２進法の下位の桁におく．以下，これを繰り返せばよい．



ハノイの塔の移動は，グレイコードでは下位ビットから円盤の移動が2^k $(k=1,2,3,4,\cdots\cdots)$ ごとに実行されるから，実際に円盤を動かさなくとも簡単にトーナメント表を作成するように手順を復元することが可能となる．そして，それを２進法に変換することで，どの棒に移動するかということも紙上で再現できるのである．

○2進法でゲーム「チャイニーズリング」を解く



ハノイの塔だけでなく，古来より親しまれているゲームには，２進法の原理にしたがうものが案外多い．

例えば右図はチャイニーズリングと呼ばれている知恵の輪である．この知恵の輪は中国で，紀元前からあったとも，あるいは諸葛孔明が，戦さの間，愛妻の不安を紛らわすために考案したともいわれる．その形状から, 玉連環ともいわれ，「戦国策」などの書物の中でも紹介されている．環の個数は多いもので９個あり，九連環という．日本には 17 世紀に伝わり，江戸では，にわか数学者を虜にし，関孝和や平賀源内も夢中になったという．ヨーロッパにはシルクロードを経て商人より持ち込まれ，フランスや北欧諸国で流行し，イタリアでは「カルダノの環」と呼ばれ，泥棒よけの鍵としても使われていたともいう．

ゲームのルールは簡単である．上の細長い棹にはまっているリングを，すべて棹からはずし，下の台座に落とすというものである．実際に，はずしかたを少し考えてみる．

リングを右から順にR_1,R_2,R_3,R_4 とする．一番右端のリングR_1 は上の棹を引っ張れば簡単にはずせる．しかしR_2 はR_1 がはまっていなければはずすことはできず，R_3 はR_2 がはまっていて，R_1 がはまっていないとはずすことはできない．試行錯誤していればいつかははずれるのであるが，ここでは「はめる」または「はずす」という操作を１回と数え，すべてリング

をはずすための最小手数を調べてみよう．

リングが２本のときは，まず R_2 をはずし，次に R_1 をはずせばよく，最小手数は２回である．

リングが３本のとき，まず R_1 をはずしてから， R_3 をはずす．次に R_2 をはずすために，一旦， R_1 をはめ， R_2 をはずしてから， R_1 を再びはずす．最小手数は５回である．

リングが４本になると途端，複雑になってしまう．

一般に，ひとつのリングをはずすためには次の条件が満たされていなければならない．

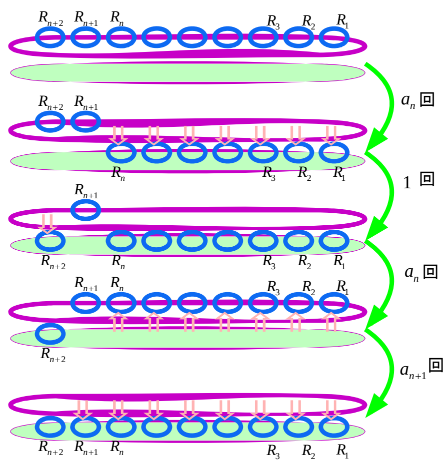
> リング R_k $(k=3,4,5,\cdots\cdots n)$ がはずせるのは，
> R_{k-1} がはまっていて， R_1 から R_{k-2} のすべてのリングがはずれているときのみである

n 本のリングの最小手数 a_n を，以下，この規則から求める．

リングは $R_1,R_2,R_3,\cdots\cdots R_n,R_{n+1},R_{n+2}$ の $(n+2)$ 本あるとする． $R_1,R_2,\cdots\cdots,R_n$ のすべてをはずす最小手数を a_n 回とする．このとき， R_n までがすべてはずれていれば，上記の規則から R_{n+2} のリングをはずすことができる．これで， R_{n+1} 以外はすべてはずれたことになる．次に，R_{n+1} をはずすために，一旦，R_n までのリングを今度はすべてはめるとその最小手数は a_n である．この状態で，はずれているのは R_{n+2} だけである．

あとは R_{n+1} をはずすために，同じ手順を繰り返し，さらに $R_n,R_{n-1},R_{n-2},\cdots\cdots,R_1$ とはずしていくことになる．その最小手数は a_{n+1} であるから， 以上より，次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n+1+a_n+a_{n+1} \\ &= a_{n+1}+2a_n+1 \end{aligned}$$



では，この漸化式を解いてみよう．

与式を変形して

$$a_{n+1}+a_n+1=2(a_{n+1}+a_n+1)$$

$\{a_{n+1}+a_n+1\}$ は公比２の等比数列で，初項は

$$a_2+a_1+1=4$$

これから， $a_{n+1}+a_n+1=2^{n+1}$

この両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n+\frac{1}{2}}{2^n}=1$$

$b_n=\dfrac{a_n+\frac{1}{2}}{2^n}$ とおいて変形すると

$$b_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{2}{3}\right)$$

ゆえに， $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で，初項は

$$b_1-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

したがって， $b_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{12}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

よって， $\dfrac{a_n+\frac{1}{2}}{2^n}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$ から，

$$a_n=\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{(-1)^{n+1}}{6}-\frac{1}{2}$$

ここで， $(-1)^{n+1}$ の部分を n が偶数，奇数の場合で分けて計算すると．

$n \bmod 2=0$ のとき， $a_n=\dfrac{2^{n+1}-2}{3}$

$n \bmod 2=1$ のとき， $a_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{3}$

すっきりとした形にまとまめられ， n が偶数のとき，

$$a_n=2\cdot\frac{2^n-1}{3}=2a_{n-1}$$

なる関係が成立している．

ところで，この漸化式の生成過程をみると，一度，R_n まで外してから，また R_n まではめる操作をすべてのリングがはずれるまで繰り返していることが分かる．こういった出現の仕方はグレイ符号の並びと同じであることが予想できる．

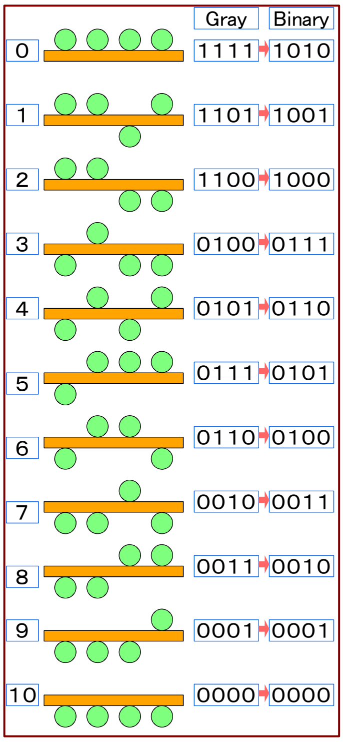
リングのはずし方のアルゴリズムとグレイコードの関係について調べてみよう．

まず，4本のリングで考える. 実際にリングをはずし, そのはずした過程を右図に示した.

横棒の上にある○は，そのリングがはまっている状態であり，下にある○ははずれている状態を表す．４本の場合は，１０回の手数ですべてはずすことができる．

これを次のようにコード化する．

リングがはまっている状態	⇒　1
リングが外れている状態	⇒　0



書き並べていくと，当然，１回で変更する数は１つのみであり，１０回の中で一つとして同じ並びのものは出現しないから，これは，グレイコードとみなすことができる．このコードを２進法に変換し，はずれている状態からコードを上にみていくと，

００００　⇒　１０１０

までの２進法が順に並ぶ．　すなわち，チャイニーズリングは，単純に２進法(グレイコード)を並べることで解けてしまうことを意味する．

リングがすべてはずれるとき，２進法の最後の数は

偶数 bit	(gray)１１１１…１１１１	⇒	(binary)１０１０１…０１０１０
奇数 bit	(gray)１１１１⇒１１１１	⇒	(binary)１０１０１…１０１０１

である．例えば，

２枚の場合は　００⇒０１⇒１０

３枚の場合は　０００⇒００１⇒０１０⇒０１１⇒１００⇒１０１

となる．この２進法を１０進法に変換すると最小手数が得られることになる．

(1)　$n \bmod 2 = 0$

$$a_n = 2^1 + 2^3 + 2^5 + \cdots\cdots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2\left(\left(2^2\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right)}{2^2 - 1}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 2}{3}$$

(2)　$n \bmod 2 = 1$

$$a_n = 2^0 + 2^2 + 2^4 + \cdots\cdots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{(2^2)^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2^2 - 1}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	5	10	21	42	85	170	341	682

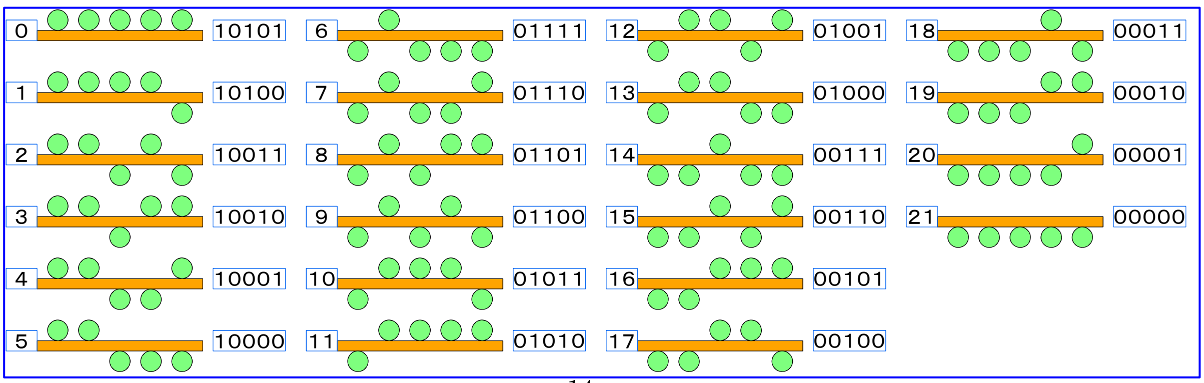
である．九連環をはずすには 341 手もかかることになり，鍵として利用していたローマ市民は，つけたりはずしたりするのにどれだけの時間をかけたのだろうかと余計な心配をしたくなる．つける側も気が遠くなったことだろう．多いものでは３０連環以上のものもあったというから，孔明夫人も，夫の生死のことなどまったく忘れてカチャカチャとやっていたかもしれない．

しかし，２進法を利用すれば，九連環も

０００００００００　⇒　１０１０１０１０１

と２進法で表してからグレイコード化し，逆順にみながら，はめ(1)たり，はずし(0)たりしていけば，誰にでも簡単に解けてしまうのである．

下に４連環の場合を示したので参考にされたい．



○おわりに

パズル「ハノイの塔」は，フランスの数学者リュカ(Lucas)が考案したものである．リュカは，著書「数学遊戯」の中でこのゲームを友人のクロー教授(Claus)に教えて貰ったと述べている．しかし，チャールズ・ドジソンがルイス・キャロルと名乗ったように，この数学家の洒落っ気たっぷりのアナグラム(文字の綴り換え)であることが後に判明した．もちろん「バラモンの塔」の伝説もリュカの創作ということになる．

ちなみにハノイはベトナムの都市である．なぜリュカがハノイの塔という名にしたかは分からぬが，当時，ハノイはフランスの占領下にあり，ハノイという名前はフランス人にとっては馴染みあるものであった．彼らにとって，インドとハノイの違いなどどうでもよかったのかもしれない．

リュカはこの中で世界の終焉を 64 枚の円盤を移し終えることでリミットとしたが，その回数は，最小の手数でも

$$2^{64}-1=18446744073709551615\ (\text{回})$$

と，トンデモない天文学的な回数となり，どうでもいい先の話ということになる．こんなところからもリュカの茶目っ気の一面を伺うことができる．

さて，本文だが，読んだだけではハノイのゲームの面白さは分からない．その醍醐味を味わうには実際に円盤を手で動かしてみるのが一番であり，自分で円盤を操作してみると本文とはまた違った独自の性質が見出せるかもしれない．

なお，ハノイの塔を作成するのは簡単である．大小の消しゴムを用意し，縦に積み上げてもいいし，大きさの違うお椀を重ねたっていい．懐を探って，大小の硬貨を使うという手もある．あるいは紙にピラミッド状に長方形を書いて切り抜き，平面的に並べてもいいだろう(別紙に用意したので，よろしければご利用ください)．

でも，パズルに腰を据えて取り組みたいのであれば，やはり購入するのが一番だろう．ひとつひとつの円盤の重みは，ゲームの面白さをより引き立てる．授業教材として売っているものは結構値の張る金額が必要となるが(レインボーハノイは 3000 円ぐらいだったと思う)，玩具売場には安価で売っており，百円ショップでも買い求めることができる．私が 100 円で購入した木製のハノイは，台座は縦 20 ㎝×横 8 ㎝，円盤 7 個で，最大ｻｲｽﾞ 6 ㎝，最小ｻｲｽﾞ 2.5 ㎝のものである． 100 円の投資で(127+α)回の手数が楽しめることになる．

今回のレポートはその木製ハノイを傍らにおき，アルゴリズムを確認しながら書き上げた．偶数番目，奇数番目の円盤の振り分け問題は，その玩具が茶色とクリーム色に塗り分けられていたことから，自然と浮かんできた．この問題を，棒の両端に配置された状態から中央に元の塔に復元するところから始めると，また違った見方が生まれてくる．

本文ではそういったハノイの塔のバリエーションについても触れている．基本的には３本の棒での移動を考えたが，棒の数を４本にした場合は，手数 a_n は， $a_2=3, a_3=5, a_4=9, a_5=13$ であり，通常ハノイと較べて随分回数は減ってくる．そのアルゴリズムを考えても面白いものができるかもしれない．多分，バリエーションを 40 人の生徒に考えさせたら 40 通りのルールと解法が生まれてくることだろう．

後半の九連環もまた，２進法で解析することのできるゲームである．

このゲームも紀元前から今にいたるまで，廃れることなくマニアの間では根強い人気を保ち続けてきた．ルービックキューブ，テンビリオンといったゲームが大流行しては自然消滅していったが，それと比べると信じられない年数である．最近では，変形バージョンも考え出されていて，「エレクトロパズル」，「パズルアウト リチュース」，「立体知恵の輪」といった名で商品化され，簡単に手に入れることができる．

この チャイニーズリングも，単純に環数を増やしていくだけでなく，ハノイの塔のようにルールを変更して，例えば「交互に，はずす，はめるの状態になっているようにする」といった場合の最小手数を考えても面白いと思う．アイデアは無限に広がることだろう．

なお，九連環の２進法による鮮やかな解法は，フランス人 M・L・グロが 1872 年に解いていて，幾つかの書で説明されている．本文ではこれを Gray Code を使って再現し，２進法変換することで視覚的に分かり易いようにした．排他的論理和により，２進法を変換してできるグレイ符号は，いろいろなゲーム解析の可能性を示唆している． ２進法が解法の key word となるゲームはまだまだある．「魔方陣」，「ソリテア」，「三山くずし」，「贋金貨探し」等等，枚挙に暇がない．これらもグレイコードを介することで，解法がもっと整理できるかもしれない．

２進法は，現代では，コンピュータ的思考の原理としてビットという単語とともに，容量的な意味合で使われている．思考の深さではなく，広さが強調されてしまうのだ．それを人間は古代より，思考合理化の一手段として柔らかい脳で変換し，アルゴリズムを生み出してきた．人が処理できるビットは無限である．コンピュータは人を超えることはできないということである．

最後にハノイの塔を授業で導入する際の引き込み方をひとつ．

「この右端に積み上げられた円盤を，左端に移すにはどうしたらいいだろう」
ちょっと，生徒に考えさせてから，
「こうやるんだ」
といって，中央棒を持ち，台座をクルッと180° 回転させる．
「ずるい，先生」
…ワイワイガヤガヤ……
ここから，ルールが生まれる．

【参考文献】

「数理パズル」　池野信一・高木茂男・土橋創作・中村義作　著　中公新書
「グレイコードと実数」　立木秀樹　共立出版 bit 2000 年 1 月号(インターネットでの公開レポート)

新たな神話の始まり

某国某県某村でのこと．
村の役場前の広場中央には大理石で作られた台座があり，その上には等間隔に３本の真鋳で作られたポールが立っている．そしてそのポールには大小合わせて 12 枚の木製の円盤が突き刺さっている．
この台座はこの村の村長が建立したものである．
ミレニアム(20 世紀)の終り，村長は長引く不況，離村者の急増に胸を痛めていた．疲労と苦悩の重い足取りで農作業に従事する村民たち．親の気持ちを知ってか，憩いの広場で遊ぶ子供たちも元気なく，その顔からは笑顔が消えていた．そこで，村長は，新世紀(21 世紀)を迎えるにあたり，子供たちの未来を奪ってはいけないと思い，新世紀元年から村を再建すべく，そのひとつの事業として，村民の心の支えであるこの広場に村民の意欲を掻き立てるオブジェを作ろうと思ったのである．
村長はすぐに実行に移した．私財を投げ打ち，広場に台座を建立した．そして，３本のポールの根元部分に左側から順に，
「夢」，「努力」，「実現」
と彫り刻む．次に，山から木を切り出し削り，12 枚の円盤を作り上げ，「夢」のポールに大きい円盤から順に差し，積み重ねていった．
すべての仕事をやり終えた後，村長は村民を集め，こう告げた．

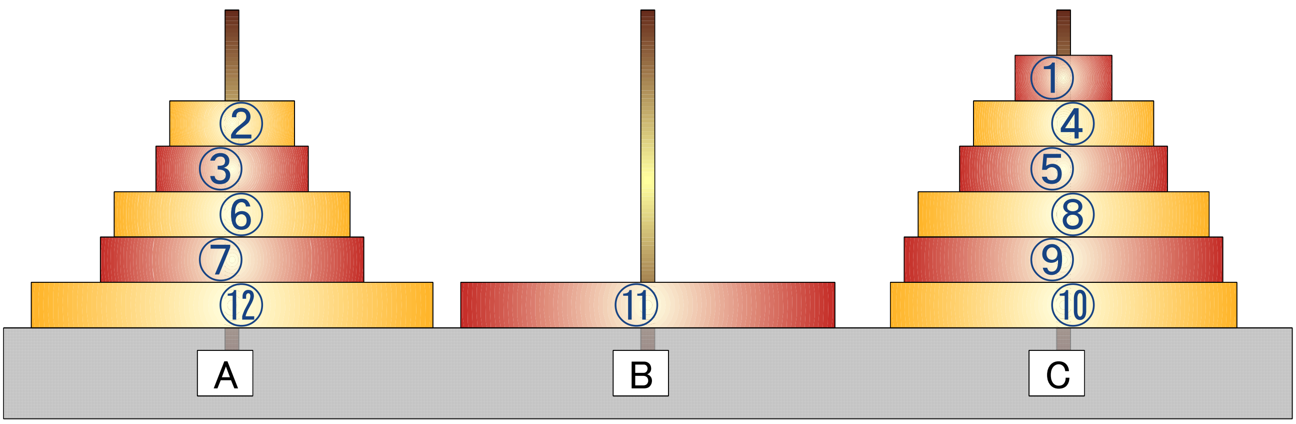
現実は確かに厳しい．だからといって，夢を見ることをやめてはいけない．夢は絵空事で実現はしないんだと諦めてはだめだ．なぜなら夢を見ることを忘れたら実現すべき対象がなくなってしまう．実現できるからこそ夢は必要なのだ．しかし，夢を実現するには長い時間と，揺ぎない決意を必要とする．私はその気持ちをこの台座の円盤に託そうと思う．
左端のポールに刺さっている円盤がみんなの夢だ．この夢を少しずつ運んで，希望を持って右端の棒にすべて移し，実現して行こう．でも焦ってはいけない．努力は小さなことの積み重ねだ．大きな夢を実現するには小さな夢をその上に積み重ねなければならない．だから大きい円盤の上には必ず小さい円盤を重ね，１歩１歩前進するように，１日１回だけ円盤を移動することとしよう．
努力の努は「ゆめ」と読む．努々疑うことなかれ．すべての円盤を実現のポールに移し終わった暁には，みんなの夢が叶い，村の未来は輝くものになっておろう．

村長はなぜ円盤の枚数を 12 枚としたのか．村長は，夢をすべて実現するためには 12 年近くの年数が必要と考えた．そこで，2012 年の年内に最小手数で円盤の移動が完成するように計算したところ，円盤の枚数は 12 枚必要であることが分かった．そのための総日数は，

$2^{12}-1=4095$ 日

であり，これは 2012 年の３月 18 日にあたる．この日が村の再生する X デーなのである．
こうして村長は毎朝，広場に子供たちの笑顔が溢れることを願い，１枚の円盤を移動し，夢と努力を積み重ねている．
ところで今日(2004 年１月 31 日)は，村長が円盤を積み重ねてから 1126 日目にあたる．
広場の台座の円盤はどんな状態になっているだろうか．
正解は次の通りである．
どうしてそうなるか，その理由を考えてみませんか？

※この問題は，第 49 回数実研研究会において，２進法からハノイの塔を完全復元することを述べたレポートの発表の中で，
「円盤の３つのグループ分けはできるが差し込まれる棒までは指定できないのでは」
という疑問に対するアンサーレポートのプロローグです．
なお，解答については，ホームページ「数学のいずみ」上で公開します．



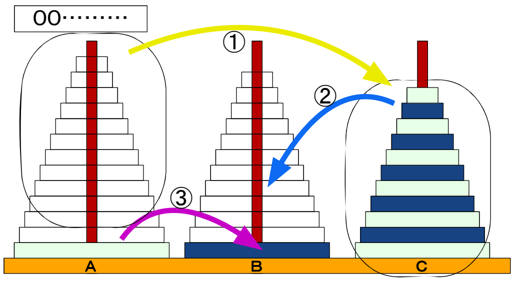
<補足>

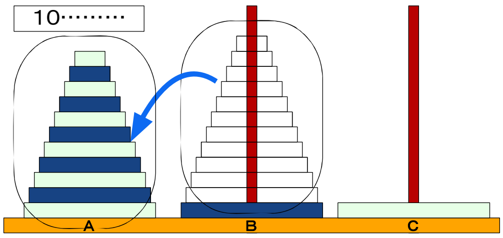
○２進法からハノイの塔の完全復元を試みる

本文では，２進法の数字０，１の並びからハノイの円盤の位置を再現することができることを示した．しかし，実際には円盤が３つのグループに分けられている状態を表しただけであり，３本の棒のどこに差し込まれるかは言及していない．

これは，ハノイの塔の初期設定において，もともとすべての円盤はどの棒にあるか．また，それをどの棒にすべて移すかによって差し込まれ方が違ってくるために考えなかったものである．しかし，リュカが考えたバラモンの塔の逸話では，「第１の棒を第３の棒に差し込む」とある．このように指定した場所に円盤全体を移動することも可能であることは本文でも述べている．では，この条件を初期設定とした場合に，２進法が表す円盤の位置関係を再現することが可能か調べてみよう．

３本の棒を A,B,C，円盤を小さい順から $C_1,C_2,\cdots\cdots,C_n$ とする．棒 A にある円盤をすべて棒 C に移すことにしよう．





まず最大円盤 C_n の移動について考える．２進法で表された数の最上位の数字が最大円盤の状態を表す．０は移動していないことを，１は移動したことを意味している．よって最大円盤 C_n は，「最下位円盤の移動最優先」より，０の場合は棒 A，１の場合は棒 C の一番下に置かれていることになる．

円盤 C_n が棒 A にあるとき，棒 B,C の一番下に置かれる円盤を調べてみよう．最上位の数字が 0 であることは，円盤 C_n を棒 A から棒 C に移すことを目的とする．したがって，円盤 C_{n-1} が棒の一番下に置かれる場合は，棒 B に差し込まれており，それより小さな円盤がその上に積み重なることになる．そのためには，円盤 C_{n-2} 以下は棒 A,C になければならないが円盤 C_{n-2} が一番下に置かれるには棒 C にあるときである．次に C_{n-3} 以下は，棒 A,B のいずれかであるが，円盤 C_{n-3} が棒の一番下にある場合は棒 B のみである．以下同様に考えていけば，棒の一番下に置かれる円盤は，

$A \Rightarrow C_n$

$B \Rightarrow C_{n-1},C_{n-3},C_{n-5},C_{n-7},\cdots\cdots$

$C \Rightarrow C_{n-2},C_{n-4},C_{n-6},C_{n-8},\cdots\cdots$

となる．

円盤 C_n が棒 C にあるとき，棒 A,B の一番下に置かれる円盤を考える．円盤 C_n が棒 A から棒 C に移ったとき，C_{n-1} 以下の円盤は棒 B にあったことになる．このとき棒 B の一番下にある円盤 C_{n-1} を棒 C に移すには，C_{n-2} 以下の円盤は，棒 A になければならない．円盤 C_{n-2} が棒 A の一番下にあるときには，C_{n-3} 以下は棒 B,C のいずれかであるが，棒 C にはすでに C_n が置かれているから，C_{n-3} が一番下にあるのは棒 B である．以下同様に続けていけば，棒の一番下に置かれる円盤は，

$A \Rightarrow C_{n-2},C_{n-4},C_{n-6},C_{n-8},\cdots\cdots$

$B \Rightarrow C_{n-1},C_{n-3},C_{n-5},C_{n-7},\cdots\cdots$

$C \Rightarrow C_n$

となる．当然，C_n が棒 A,C にある場合の移動のアルゴリズムは自己相似的に対称に並べられている．

このように考えていけば，次の結論が得られる．

【性質 6】
通常ハノイの並べ替えにおいて，左端棒に積まれたすべての円盤を右端棒に移すとき，
各棒の一番下に置かれる円盤は，n が偶数(奇数)のとき，
(1) 両端棒は偶数(奇数)番目の円盤
(2) 中央棒は奇数(偶数)番目の円盤
である．

なお，このことは，前述の規則

A にある塔を最小の手数で C にすべて移すには，
円盤が奇数枚ある場合は，一番上にある円盤を C の棒に移す．
円盤が偶数枚ある場合は，一番上にある円盤を B の棒に移す．

において，１番めの円盤 C_1 はもちろん奇数番目の円盤であるから，最初の操作でこの円盤が全体の枚数が奇数枚のときは円盤 C_1 は棒 C に移る．棒 A の一番下の最大円盤 C_n も奇数番目のものであるから，両端の一番下の円盤 C_1,C_n が奇数番目の

円盤となる．2 回目の操作で，上から 2 枚目の偶数番目の円盤 C_2 は，中央 B の円盤に移り，以後，再帰的アルゴリズムにより，偶数・奇数の順序が壊れることなく，積まれていくのである．同様に，全体の枚数が偶数枚のときも，一番小さな円盤 C_1 は，中央棒 B に置かれ，最大円盤 C_n が棒 A，上から 2 つめの円盤 C_2 が棒 C に置かれ，両端は偶数番目の円盤となる．

では，2 進法からハノイの塔の完全復元を試みてみよう．

例 1) 010001100110

12bit より円盤の枚数は 12 枚．

偶数枚より，棒 A,C の一番下は偶数番目の円盤，棒 B は奇数番目の円盤が置かれる．

最高位が 0 より，最大円盤 C_{12} は棒 A にある．

また 10 進法に変換すると，

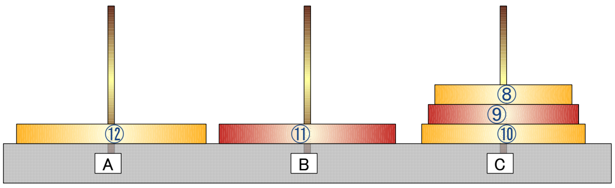
$$010001100110_{(2)} = 2^{10} + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 = 1126$$

より第 1126 手目である．

最下位から初めて 1 が現れるのは 2 番目で，その隣も 1 であるから，この第 1126 手目で，円盤 C_2 が円盤 C_3 の上に積み重ねられたことになる．

そのときの円盤の配置をみてみよう．

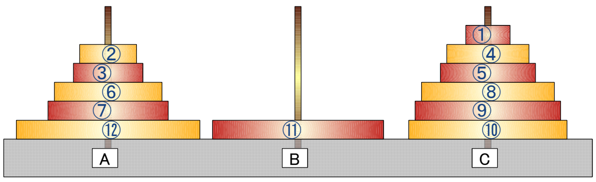
最下位より 11 番目が 1 で，8 番目から 10 番目まで 0 が 3 つ続くから，棒 B には円盤 C_{11} が置かれ，棒 C には円盤 C_{10},C_9,C_8 が積み重なる．ここまでの状態が右図である．



次に最下位より 6,7 番目は 1 が続くがこれに対応する円盤 C_7,C_6 は棒 C には円盤 C_8 と番号が続いてしまうから置けない．また，棒 B には奇数どうしが重なるからこれも置けない．したがって，円盤 C_7,C_6 は棒 A の円盤 C_{12} の上に置かれる．

円盤 C_5,C_4 は，6,7 番目と 1 を偶数個はさんで 8 番目が 1 となるから，棒 A の C_8 の上に重なる．

同様に，円盤 C_3,C_2 は 2 つ 0 を挟んで 6 番目が 1 より，円盤 C_6 の置かれている棒 A に重なり，最後の円盤 C_1 も，2,3 番目が 1 より 4 番目に対応する円盤 C_4 のある棒 A の一番上に置かれる．



以上より，右図のように配置が完成した．

このように，円盤の配置を復元するには，棒の一番下に置かれる円盤を決定するために最上位から配置を調べた方が効率的にあることが分かる．

例 2) 1001010010101

13bit より円盤の枚数は 13 枚．

棒 A,C の一番下には奇数番目の円盤，棒 B は偶数番目の円盤が置かれる．

$$1001010010101_{(2)} = 2^{12} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 4757$$

第 4757 手目に，最小円盤 C_1 が円盤 C_3 以外の棒に置かれたことになる．

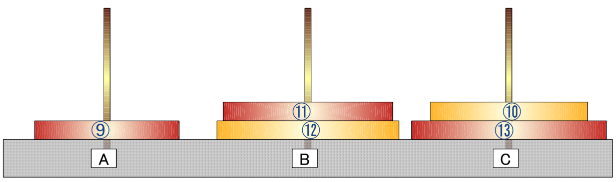
次にその配置だが，上に最高位の 13 番目は 1 であるから，円盤 C_{13} は棒 C に置かれる．

11,12 番目は 0 が続き，円盤 C_{12} は最下位の偶数番目の円盤だから，C_{12},C_{11} は棒 B に置かれる．

10 番目は 1 より，2 つおいて最上位が 1 より，円盤 C_{10} は，円盤 C_{13} のある棒 C に置かれる．

次の 9 番目に対応する円盤 C_9 は，その上位の並びをみると棒 B,C のいずれにもないから棒 A に置かれる．

ここまでの状態が右図である．

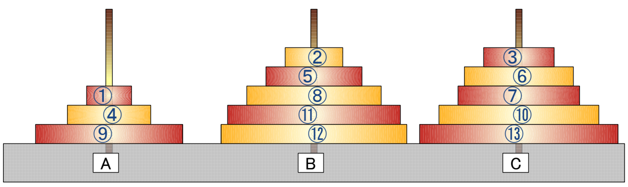


8 番目に対応する円盤 C_8 は，1 つおいて 10 番目に 1 があるから円盤 C_{10} と同じ場所にはない．また，C_9 の上にも番号が続くため重ならず，棒 B の円盤 C_{11} の上に置かれる．

6,7 番目も同様に考えて，棒 C の円盤 C_{10} の上に置かれる．

5 番目は，2 つおいて 8 番目が 1 より，C_5 は C_8 の上に置かれる．

4 番目に対応する円盤 C_4 は，5 番目が 1 より対応する円盤 C_5 のある棒 B に置くことはできず，また，棒 C にも偶数番目の円盤 C_6 があるため偶数番目どうしになり置けない．したがって棒 A の円盤 C_9 の上に置かれる．



同様に考えて，円盤 C_3,C_2,C_1 はそれぞれ棒 C,B,A に置かれる．

これから，この第 4757 手目では，もともと棒 B にあった円盤 C_1 が棒 A に移されたことになるのである．

ハノイの紙片

※各紙片を切り取って，平面ハノイとしてお楽しみください．