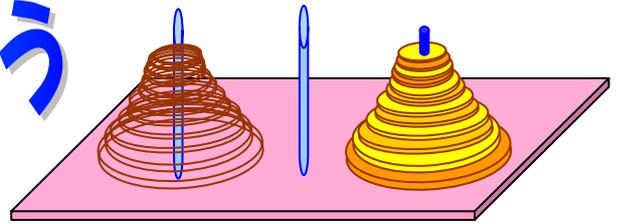


ハノイの塔で遊ぼう

札幌藻岩高校 中村文則



はじめに

「ハノイの塔」は120年前に考案されたパズル玩具であり、いまでも広くパズル愛好家に親しまれている。それは有名パズルがみなそうであるように、その規則性のシンプルさと並べ替えの面白さに拠る。ルールは簡単。板の上の3本の棒の1つに突き刺された大小の円盤を他の棒に次の規則で移し換えるゲームである。

1回に1枚の円盤しか移動できない
移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる
移動した円盤は3本の柱のいずれかに必ず差し込む

単純な規則だから、誰でも取り組み、実際にやりだすと手が止まらなくなるのだ。
このパズルに関しては「パラモンの塔」という次の逸話もよく知られている。

「インドのガンジス川ほとりの町ベナレスのパラモン教の寺院には、世界の中心を表すという聖堂がある。この聖堂の中には3本の大理石の柱が立っており、その1本には当初、大小64枚の黄金の円盤が、大きい円盤から順に重ねられていたという。この円盤をパラモン教の僧侶(ブラフマン)が昔から昼夜を問わず上記の規則で移し換えている。さて、パラモン教の教えでは、最初にこの円盤を1番目の柱に重ね並べたのは神であり、僧侶がすべての円盤を3番目の柱に移し換えたとき、この世は崩壊し終焉を迎えると言われている。僧侶は今も滅びに向かってひたすら円盤を移しているのである。

このぞっとするある意味では崇高な伝説もこのパズルを解くことの興味を掻き立てるのである。

ところでわれわれはパラモン教の僧侶ではないから、はっきり言えば上記の規則なんかはどうでもいい。このパズルでもっと楽しく数学を遊べればと思う。そこでここでは日夜苦行を続ける僧侶を尻目にルールをちょっと改ざんして数列の教材とみてハノイの塔のパズルを考えてみよう。

なお、円盤の枚数は n 枚とし、並べ方は最短の手数(てかず)を考えるものとする。

・ Aの位置にある塔をCの位置に逆立

《移動のルール》
1回に1枚の円盤しか移動できない
移動した円盤は3本の柱のいずれかに必ず差し込む

逆立とは、小さい円盤から順に大きい円盤を積み重ねることをいう。これに対して正立はハノイの塔の通常の積み重ね方としよう。

さて、この場合は逆立させることより「円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる」というハノイの塔の基本ルールは必要ない。したがって、ルールはないようなものであり、最短の手数 a_n も容易に求められるだろう。もちろん小さい円盤から順番に1個ずつすべてをCに移せばよい。

$$a_n = n$$

である。

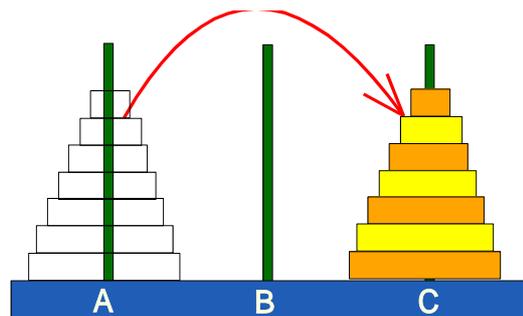
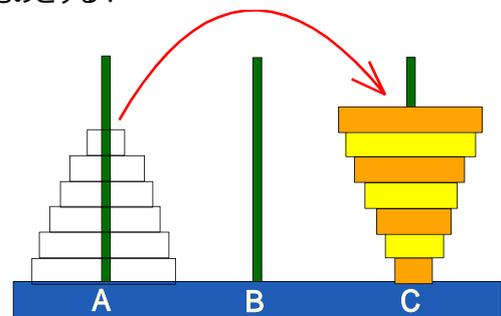
・ Aの位置にある塔をCの位置に正立

《移動のルール》
1回に1枚の円盤しか移動できない
移動した円盤は3本の柱のいずれかに必ず差し込む

塔全体を $A \rightarrow B$ は逆立、 $B \rightarrow C$ は正立に移動させる。その手数
は $n + n = 2n$ と勘違いされがちである。

ハノイの塔の円盤移動の目的は

(基本原則)
最下位にある円盤の移動優先



であることを注意したい。この場合、一番下になる円盤は最大サイズの円盤であるから、この円盤が自由に動くことができるように、他の円盤を別の棒に移していくのである。

したがって、まず A の棒から B の棒へ上から順に $(n-1)$ 個の円盤を移動させる。そして一番最後の n 番目の円盤を剥き出しにして、その円盤を C へ移動する。次に、B の棒に差し込まれた逆立している $(n-1)$ 個の円盤を C に移していく。よって、その手数 a_n は、

$$a_n = (n-1) + 1 + (n-1) = 2n - 1$$

となり、単純に移動する場合より手数が 1 つ減る。

. B の位置にある塔を同じ位置に逆立

《移動のルール》

- 1 回に 1 枚の円盤しか移動できない
- 移動した円盤は 3 本の柱のいずれかに必ず差し込む

一番下にくるのは最小円盤であるから、基本原則によりこの円盤を最優先する。

まず、B にある一番上の最小円盤を A に移し、B にある残りの $(n-1)$ 個の円盤を順に C に逆立に移していく。次に A の最小円盤を B に移す。これで最小円盤が目的の位置に移された。

次に C に逆立している $(n-1)$ 個の一番下の円盤を優先する。残りの $(n-2)$ 個を A に正立に移していき、最後に一番下の 1 個を B に移す。

後は、A にある $(n-2)$ 個の円盤を B に移して終わりである。

以上より、その手数は、

$$a_n = 1 + (n-1) + 1 + (n-2) + 1 + (n-2) = 3n - 2$$

である。

. A の位置から他の位置に正立

《移動のルール》

- 1 回に 1 枚の円盤しか移動できない
- 移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる
- 移動した円盤は 3 本の柱のいずれかに必ず差し込む

通常のアノイの塔のルールによる移動である。

このルールはアルゴリズムとして帰納法の問題とみることができる。円盤の枚数を 2, 3, 4, 5, …… と増やしていき、その手数 a_n を予想してみるとよい。

$a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15$ ぐらいは楽しんでいるうちにすぐに見つけられる。そのうち、

$$a_2 = 2^2 - 1, a_3 = 2^3 - 1, a_4 = 2^4 - 1$$

に気が付くだろうから、すぐに $a_n = 2^n - 1$ が予想される。あとはこの予想が正しいことを例えば数学的帰納法なんぞを使って示すことになる。ここでは「最下位円盤優先」の基本原則を元に説明しよう。

例えば、3 枚の場合は、まず 2 枚を他の棒に移動させ、一番下の円盤を目的の棒に移す、最後に残りの 2 枚を移動させることになる。したがってその手数は、

$$a_3 = a_2 + 1 + a_2 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

同様に、4 枚の場合は、

$$a_4 = a_3 + 1 + a_3 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

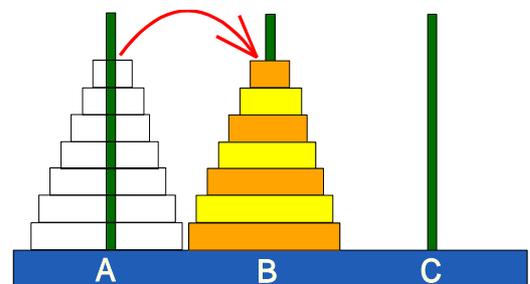
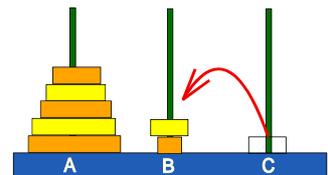
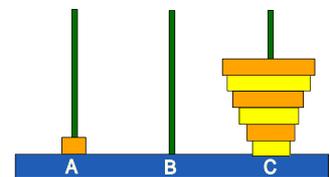
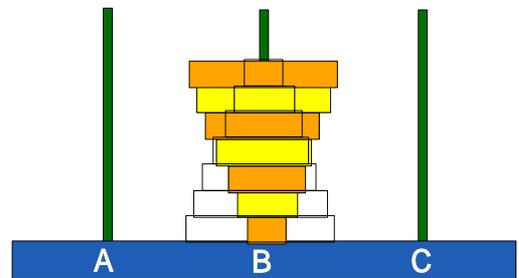
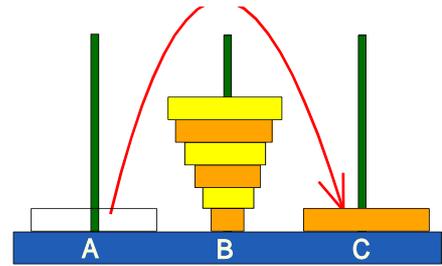
以下、続けていけばよい。これを 2 枚の場合から順次考えていけば、

$$a_2 = 2 + 1$$

$$a_3 = 1 + 2a_2 = 1 + 2(2 + 1) = 1 + 2 + 2^2$$

$$a_4 = 1 + 2a_3 = 1 + 2(1 + 2 + 2^2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$$

よって、

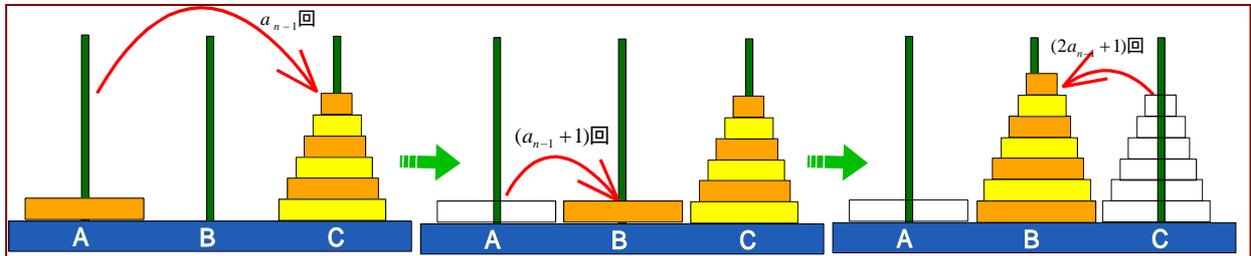


$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

なお、 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ より、これから数列 $\{a_n + 1\}$ が公比 2 の等比数列になることから、

$$a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1} = 2^n$$

ハノイの塔の移動は、漸化式の問題としてみることもできる。



. A の位置から C の位置に正立

バラモンの塔の逸話では、第 3 の棒に円盤を移し換えるとする。すなわち、移動する円盤は指定されており、残りの第 2 の円盤は補助棒的に使われている。では、最短の手数で指定した棒に移動するにはどうしたらいいだろう。

例えば 2 枚の場合、一番上の円盤を B に移すと、その下の円盤は C に移る。よって、2 つの円盤は C に移ることになる。すなわち、一番上に置いた場所と違った場所に最終的に円盤はみな移る。

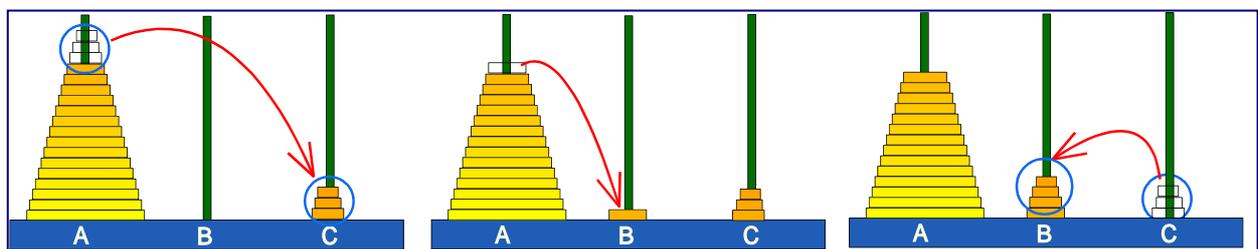
3 枚の場合は、一番下を動かすためにはその前に上の 2 枚を動かすわけだから、その 2 枚の移動する棒は、一番上の円盤を置いた棒とは異なる棒である。したがって一番下の円盤は、一番上の円盤を最初に置いた棒に移ることになり、円盤全体は最初に置いた棒の位置にすべて移動する。

このように考えていくと、次の結論を得る。

A にある塔を最短の手数 a_n で C にすべて移すには、
 円盤が奇数枚ある場合は、一番上にある円盤を C の棒に移す。
 円盤が偶数枚ある場合は、一番上にある円盤を B の棒に移す。

ハノイの円盤の移動は、個数 2 個の移動を基本として、2 個毎にその下の円盤を基本原則に基づき優先させ、移動させていく。しかし、実際に円盤の移動の操作をしてみると、人間の頭では、3 個をブロックとして(7 回の移動を)考えたほうが良さそうである。3 個の移動は、一番上の円盤が移動した場所が 3 個のブロックの移動場所に一致し、全体の移動が見やすいのである。

ところで、バラモンの塔では、僧侶(ブラフマン)は昼夜黄金の円盤を他の棒に移す苦行を続けている。円盤の枚数は 64 枚であったから、最短の手数ですべての円盤を C に移し換え苦行を終えるには最初の一手は B に置かなければならない。僧侶が一番最初に震える手で 1 枚目の円盤を置いた場所が C であったとしたら、滅びを迎える最後の一手で僧侶は神の御心を知ることになるのかもしれない。

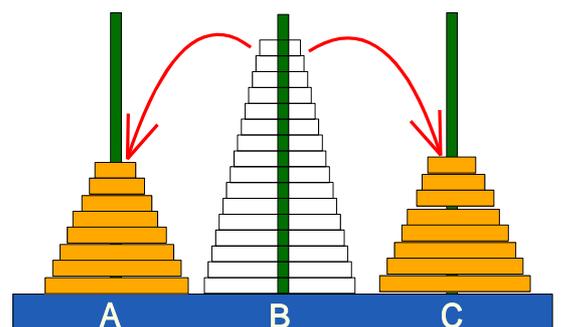


. B の位置から両端に位置に偶数番目と奇数番目の円盤を分けて正立

《移動のルール》

- 1 回に 1 枚の円盤しか移動できない
- 移動した円盤はそれより大きな円盤の上に乗せる
- 移動した円盤は 3 本の柱のいずれかに必ず差し込む

単純操作で考えれば、まず、B にある n 個の円盤から最下位の円盤を除いた $(n-1)$ 個の円盤を A に移し、B に残った円盤を C に移す。



次に、Aの上から(n-2)個をCに移し、今度はCの(n-3)個をAに移す。以下、交互に円盤の個数を1個ずつ減らしながらAとCの棒に振り分けしていけば、最終的にはすべて両端に偶数番目と奇数番目の円盤に分けられる。

したがってその手数を b_n とし、通常ルールでのn個の円盤の場合の手数を a_n とすれば、

$$b_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_1 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = 2^n - n + 2$$

となる。

しかし、これが最短の手数でないことは明らかである。

例えば、 $b_2 = 2^2 - 2 + 2 = 4$ となるが、実際には、Bの円盤を両端に振り分けるだけであるから $b_2 = 2$ である。

b_3 については、

Bの上の2枚をA Bの一番下をC Aの一番上をC

とすれば、 $b_3 = 5$ でいいことになる。上述の振り分けより2手減っている。

実は上述の計算は、「最下位円盤の優位性」の捉え方に誤りがある。

円盤を中央の棒Bから両端の棒A(orC)に移す場合と、両端の棒から中央の棒に移す場合

では、最下位円盤が異なるのである。この2つの場合について具体的にみてみよう。

《Case 1》中央棒(B) 両端棒(AorC)

「最下位円盤の優位性」より、n個の円盤から最下位を除いた(n-1)個の円盤を両端のどちらかに移動し、最下位の円盤を残りの両端に移動する。

よって、この移動の回数は、通常n個のハノイの最小手数を a_n とすると、

$$a_{n-1} + 1 = (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1}$$

となる

《Case 2》両端棒(AorC) 中央棒(B)

n個の円盤のうち、一番下にある最大サイズの円盤は両端に配置される円盤のひとつであるから、その上の円盤が移動対象となる最下位の円盤である。したがって、上から(n-2)個の円盤を中央棒Cに移し、(n-1)番目の円盤をもうひとつの端に移せばよい。よって、移動の回数 b_n は、

$$a_{n-2} + 1 = (2^{n-2} - 1) + 1 = 2^{n-2}$$

となる。

このようにCase2の手数はCase1の手数の半分がいいことがわかる。したがって中央棒に移す回数を最大限とするために、

$C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow \dots$

のように、交互に両端と中央棒を移動させればよい。

このことから、n枚の円盤の最短手数 b_n を求めると、

$$b_3 = 2^2 + 2^0 = 5$$

$$b_4 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$$

$$b_5 = 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22$$

となる。さらに抜き出していくと、

$$b_9 = 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

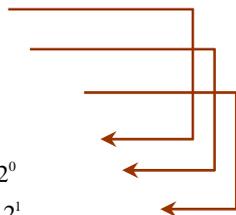
$$b_{10} = 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$b_{11} = 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$$

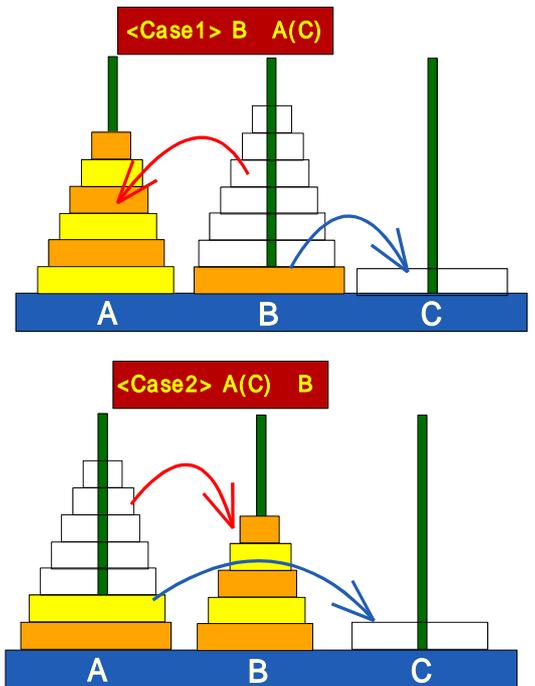
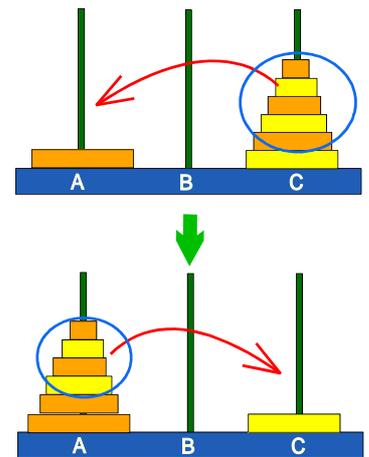
$$b_{12} = 2^{11} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$b_{13} = 2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$b_{14} = 2^{13} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$$



個数が3枚増える度に、同じ形の移動(アルゴリズム)が繰り返されることが分かる。このことから、最小手数 b_n は3を法とする剰余類で調べられる。



$n \bmod 3 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^n \\ &= (2^0 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) - (2^1 + 2^4 + 2^7 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{2 \left\{ (2^3)^{\frac{n}{3}} - 1 \right\}}{2^3 - 1} \\ &= 2^n - 1 - \frac{2(2^n - 1)}{7} \\ &= \frac{5 \cdot 2^n - 5}{7} \end{aligned}$$

$n \bmod 3 = 1$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} + 1 \text{ である. ここで, } n-1 \text{ は } 3 \text{ の倍数より,} \\ b_n &= 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 5}{7} + 1 = \frac{5 \cdot 2^n - 3}{7} \end{aligned}$$

$n \bmod 3 = 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} \text{ であるから,} \\ b_n &= 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 3}{7} = \frac{5 \cdot 2^n - 6}{7} \end{aligned}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	2	5	11	22	45	91	182	365	731

表に具体的な手数を示したが, $a_{10} = 1023$ であるから, 通常のハノイの塔の手数に比べて意外と少ない結果となる. また, $b_9 = 365$ は, パラモンの塔伝説から考えても意味深な回数となっている.

おわりに

パズル「ハノイの塔」は, フランスの数学者リュカ(Lucas)が考案したものです. リュカは, 著書「数学遊戯」の中でクロ一教授(Claus)に教えて貰ったと述べていますが, チャールズ・ドジソンがルイス・キャロルと名乗ったように, この数学家の洒落っ気たっぷりのアナグラム(文字の綴り換え)であることが後に判明しました. だから, もちろん「パラモンの塔」の伝説もリュカの創作であるということになります.

リュカはこれの中で世界の終焉を 64 枚の円盤を移し終えることでリミットとしましたが, その回数は, 最短の手数でも $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ (回)

と, トンデモない天文学的な回数となり, どうでもいい先の話となりますから, こんなところからもリュカの茶目っ気的一面を伺うことができます.

さて, 本文ですが, その内容は読まれても分かりにくいところがあるかもしれません. ハノイの塔の醍醐味を味わうには実際に円盤を手で動かしてみるのが一番なのです. 自分で円盤を操作してみると本文とは違った独自のアルゴリズムが見出せるかもしれません.

そのハノイの塔を作ることは簡単です. 大小の消しゴミを用意し, 縦に積み上げてもいいし, あるいは紙にピラミッド状に長方形を書いて切り抜き, 平面的に並べてもいいでしょう(別紙に用意しました. よろしければご利用ください)

でもちゃんとパズルに腰を据えて取り組みたいのであればこの際, 買ってしまいましょう. 授業教材として売っているものは結構値の張る金額が必要となります(レインボーハノイと商品名で 3000 円ぐらいだったような), 玩具売場には安価で売っています.

この間, 百円ショップで教材を物色していたら, なんと売っていました. 「ダ」というヒヤッキンです. 木製のものです. 台座は縦 20 cm, 横 8 cm, 円盤は最大サイズ 6 cm から最小サイズ 2.5 cm まであって, これがなんと 7 個もついていますから, 127 回の手数が楽しめることとなります. クラス人数分買ったって 4200 円, これだけの出費で新たに数学好きが増えること間違いなしです.

今回のレポートも実は傍らにその玩具をおいてアルゴリズムを確認しながら書き上げたものです. 偶数番目, 奇数番目の円盤を振り分ける最後の問題は, その玩具が茶色とクリーム色に塗り分けられていたことから, 自然と浮かんできました. この問題を, 棒の両端に配置された状態から中央に元の塔に復元するところから始めると, また違った見方が生まれます.

ところで, ハノイの塔は, いろいろなバリエーションで楽しむことが可能です. 棒の数を 4 本にするとどうなるでしょう. その手数 a_n は, $a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 9, a_5 = 13$ であり通常ハノイと較べて随分回数は減ってきます. また, ハノイの塔の移動が自己相似形であることからその移動を音符に対応させ作曲したものをインターネットで見つけました. ネットでハノイの塔を検索すると凄い件数がヒットしてきます. 隠れハノイファンがどれだけ多いか伺えます. きっと授業で 40 人が触りだしたら, 40 通りの新しいハノイ塔のアルゴリズムが見つかるかもしれません.

最後にハノイを授業で導入する際の引き込み方をひとつ.

「この右端に積み上げられた円盤を, 左端に移すにはどうしたらいいだろう」

ちょっと, 生徒に間がさせてから,

「こうやるんだ」

といって, 中央棒を持ち, 台座をクルッと 180° 回転させます.

「ずるい, 先生」...ワイワイガヤガヤ.....ここから, ルールが始まります.

ハノイの紙片

各紙片を切り取って，平面ハノイとしてお楽しみください．

