場合の数から得られるべき和

札幌旭丘高校　中村文則

べき和$\sum_{k=1}^{n} k^p$ の値を、カード抽出による場合の数(度数分布)を用いて求めてみよう。

○自然数列の和

(A) 数字0～nが書かれた$n+1$枚のカードの中から２枚のカードを同時に取り出す

大きいほうの数字をX とする。試行の総数は、

$$ {}_{n+1}C_2 = \frac{(n+1)n}{2!} = \frac{1}{2}n(n+1) $$

である。大きいほうの数字がk であるとき、k 以外の残り１枚は数字0 ～$k-1$ のk 枚の中から選べばよいから、

$$ {}_kC_1 = k $$

これから次の度数分布表が得られる。

X	1	2	3	4	……	$n-1$	n	総数
$n(X)$	1	2	3	4	……	$n-1$	n	${}_{n+1}C_2$

このことより、

$$ 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) $$

このように、同時に２枚取り出すときの試行の総数は自然数列の和に等しいことから、変量X を設定することで、和の公式を求めることができる。

① 小さい方の数字X

$n+1$枚のカードの数字は、$1,2,3,\cdots,n,n+1$とする。

X	1	2	3	4	……	$n-1$	n	総数
$n(X)$	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	……	2	1	${}_{n+1}C_2$

② ２枚のカードの差の絶対値X

差がk であるとき、２枚のカードの組を(a,b) $(a<b\ )$ とすると、

$$ (0,k),(1,k+1),(2,k+2),\cdots,(n-k,n) $$

より、$n-k+1$通りであるから、

X	1	2	3	4	……	$n-1$	n	総数
$n(X)$	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	……	2	1	${}_{n+1}C_2$

(B) 数字0～nが書かれた$n+1$枚のカードの中から１枚ずつ２回取り出す（取り出したカードは元に戻さない）

試行の総数は、

$$ {}_{n+1}P_2 = (n+1)n $$

である。２枚のカードのうち、大きい数字をX とするとき、その数字がk である場合の数は、k が１枚目のカードまたは２枚目のカードであることを考えると場合の数は、

$$ {}_kC_1 \times 2! = 2k $$

よって、度数分布表は、

X	1	2	3	4	……	$n-1$	n	総数
$n(X)$	2	4	6	8	……	$2(n-1)$	$2n$	${}_{n+1}P_2$

これより、

$$ 2+4+6+\cdots\cdots+2(n-1)+2n = n(n+1) $$

であることより、自然数列の和が得られる。

(C) 数字$1\sim n$が書かれたn枚のカードの中から１枚ずつ２回取り出す（取り出したカードは元に戻す）

取り出した２枚のカードの最大値をXとする。試行の総数は、

$${}_{n}\Pi_{2}=n^{2}$$

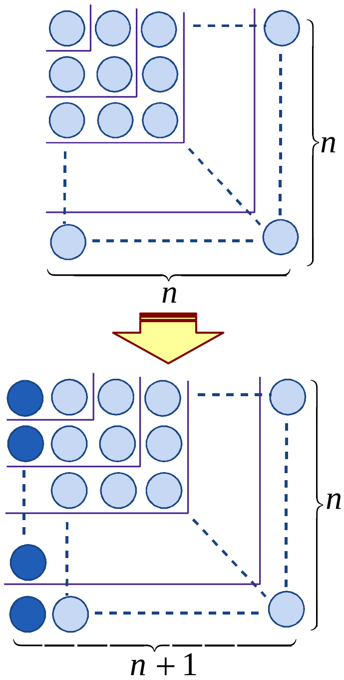
２枚のカードの数字の組を(a,b)とすると、

$X=1$のとき、$(a,b)=(1,1)$　より１通り

$X=2$のとき、$(a,b)=(1,2),(2,2),(2,1)$　より３通り

$X=k$のとき、$(a,b)=(1,k),(2,k),\cdots,(k-1,k),(k,k),(k,k-1),\cdots(k,2),(k,1)$　より$(2k-1)$通り

X	1	2	3	4	……	$n-1$	n	総数
$n(X)$	1	3	5	7	……	$2n-3$	$2n-1$	${}_{n}\Pi_{2}$



このことより、

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^{2}$$

奇数列の和が得られる。

この式の両辺にnを加えると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)+n\\&=1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)+(1+1+\cdots+1)\\&=2+4+6+8+\cdots\cdots+2n\end{aligned}$$

$$(\text{右辺})=n^{2}+n$$

これより、

$$2+4+6+8+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$$

偶数列の和が得られる。

ここで、

$$2+4+6+8+\cdots\cdots+2n=2(1+2+3+4+\cdots n)$$

であることから、

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

自然数列の和が得られる。

○平方数の和

自然数の和と同様の試行による最大値の場合の数を用いて、平方数の和を求めることができる。

(A) $-1,0,1,\cdots,n$の$(n+2)$枚のカードから同時に３枚を取り出す

最大値Xの場合の数を求める。試行の総数は、

$${}_{n+2}C_{3}=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

最大値がkのとき、k以外の残り２枚は、$-1,0,1,\cdots,(k-1)$の$(k+1)$枚のカードから２枚を選べばよいから、

$${}_{k+1}C_{2}=\frac{1}{2}k(k+1)$$

これより、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

両辺を２倍して

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\quad\cdots\cdots(*)$$

以上より、

$$\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

⑻ $-1,0,1,\cdots,n$ の$(n+2)$ 枚のカードから１枚ずつ３枚を取り出す(取り出したカードは元に戻さない)

試行の総数は、

$${}_{n+2}P_3=(n+2)(n+1)n$$

である。最大値k の場合の数は、

$${}_{k+1}C_2\times 3!=3(k+1)k$$

$$\sum_{k=1}^{n}3k(k+1)=n(n+1)(n+2)$$

以下、(A)と同様である。

(C) $1,2,\cdots,n$ のn 枚のカードから１枚ずつ３枚を取り出す(取り出したカードは元に戻す)

試行の総数は、

$${}_n\Pi_3=n^3$$

最大値1の場合の数は、3 枚のカードの数字の組を(a,b,c) とすると、

$X=1$ のとき　$(1,1,1)$　1 通り

$X=2$ のとき　$(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)$　7 通り

最大値のカードの枚数を 1 枚、2 枚、3 枚で場合分けすると、$X=k$ のときは

$${}_3C_1(k-1)^2+{}_3C_2(k-1)+{}_3C_3=3k^2-3k+1$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)=n^2$$

これより、

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=n^2+\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=n^2+\frac{3}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

以上より、

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

このように、3 枚のカードを

(A) 同時に取り出す
(B) 1 枚ずつ元に戻さないで取り出す
(C) 1 枚ずつ元に戻し取り出す

ことで、試行の総数は、それぞれ、

(A) 組合せ
(B) 順列
(C) 重複順列

で得られることが分かり、これらの試行での最大値X の場合の数から逐次的にべき和を求めることが可能となる。さらに立方数の和についてまとめてみよう。なお、(A)は(B)に変形できることから、ここでは、1 枚ずつカードを取り出した場合の

(B)　非復元抽出
(C)　復元抽出

についてのみ触れる。

○立方数の和

⑻ $n+3$ 枚から４枚を１枚ずつ元に戻さないで抜き出す

試行の総数は

$${}_{n+3}P_4=(n+3)(n+2)(n+1)n$$

最大値k の場合の数は、

$${}_{k+2}C_3 \times 4! = 4(k+2)(k+1)k$$

これより、

$$\sum_{k=1}^{n} 4(k+2)(k+1)k = (n+3)(n+2)(n+1)n$$

ここで、$h = k+1,\ m = n+1$ とおくと、

$$\sum_{h=2}^{m} 4(h+1)h(h-1) = (m+2)(m+1)m(m-1)$$

左辺は$h = 1$から和を求めても変わらないから、

$$4\sum_{h=1}^{m} h^3 = (m+2)(m+1)m(m-1) - 4\times\frac{1}{2}m(m+1) = m^2(m+1)^2$$

以上より、

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

なお、

最大値kの場合の数は、最大値k以下の場合の数から最大値$(k-1)$以下の場合の数を引いた値 ……(*)

であることに注意すると、

$$4(k+2)(k+1)k = (k+3)(k+2)(k+1)k - (k+2)(k+1)k(k-1) = {}_{k+3}P_4 - {}_{k+2}P_4$$

である。

(C) n枚から４枚を１枚ずつ元に戻して抜き出す

試行の総数は、

$${}_{n}\Pi_4 = n^4$$

である。最大値がkである場合の数は、最大値のカードの枚数が 1 枚、2 枚、3 枚、4 枚の場合を考えると、

$${}_4C_1(k-1)^3 + {}_4C_2(k-1)^2 + {}_4C_3(k-1) + {}_4C_4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4$$

これより立方数の和が求められる。なお、(*)より、

$$4k^3 - 6k^2 + 4k - 1 = k^4 - (k-1)^4 = {}_{k}\Pi_4 - {}_{k-1}\Pi_4$$

である。

あとがき

場合の数および数列は数の規則性といった性質を扱うものである。場合の数は、順列、組合せを用いて試行の総数から演繹的に規則性を見出すことに対して、数列は個々の規則性から帰納的に一般化を見出すことであり、その違いはあるが、どちらも自然数計算を基盤として成立するものである。

一般には独立して指導されるこの 2 つの単元について本文ではコラボを図っている。例えば、数列の和はべき和を用いて求められるが、その公式の導出は、極めて技術的・技巧的である(数列すべてにその傾向はあるが)。

平方数の和は、

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\left\{k^3 - (k-1)^3\right\} = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}(3k-1) \qquad \cdots\cdots②$$

より得られるが、突如として出現する①の$(k-1)^3$の展開式は違和感がある。むしろ②から出発して、その左辺を$1, 2, 3, \cdots, n$のn枚のカードから 1 枚ずつ元に戻して 3 枚抜き出したときの最大値kの場合の数として扱い、その総和が試行の総数n^2であると考えれば説明はし易い。分野を超えた横断的な数学的思考の育成が可能になってくるだろう。もっともそうすると、数学の積み重ね的学習はより強調されてしまい、カードの最大・最小の理解ができなければ基本的な数列のΣ計算は共倒れとなる。最低限の知識から公式をまず編み上げ、定着させた方がいいとも考えられる。知識と知恵のどちらを優先させるかということであり、そこらへんの塩梅を「いい加減」に調整することもまた「数学力」を育てるためには必要なのだろう。