

立体図形による空間の彩り

……… 球・立方体・正四面体の佇まいについて ………

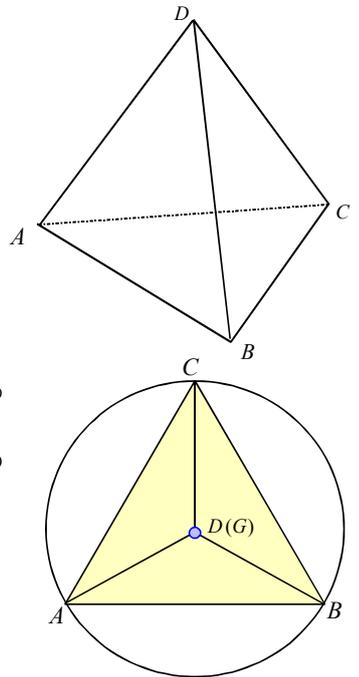
札幌旭丘高校 中村文則

はじめに

正三角形は、平面上では円とともに図形の代表に位置し、図形の中に潜む種々の性質は大きな関心をもち扱われる。

その正三角形を四面として構成される正四面体もまた煌びやかであり、空間内では立体図形の主格であり、正三角形の性質を継承しつつ、独自に、球面や他の立体図形との関わりを演出している。それらの佇まいについて調べてみよう。

なお、正四面体の1辺の長さは a として進めていく。



正四面体の計量

正四面体 $ABCD$ は、面である1つの正三角形 ABC を含む平面に垂直な方向から眺めると、頂点 D は、正三角形 ABC の外接円の中心に重なる点に位置する。

すなわち頂点 D から正三角形 ABC に下ろした垂線の足 G が外心であり、このことは次のように示される。

$\triangle DAG$ および $\triangle DBG$ は直角三角形であるから、 $DA = DB$ より、 $\triangle DAG \cong \triangle DBG$

$$\therefore GA = GB$$

$DA = DB = DC$ であることより、同様に $\triangle DCG$ についても考えると、

$$GA = GB = GC$$

以上より、点 G は三角形 ABC の外心である。

ここで、正三角形の外心と重心は一致するから、直線 AG と辺 BC との交点を M とすると、

$$AG : GM = 2 : 1$$

である。このことを用いて正四面体の体積は次のように求められる。

$$AB : BM : AM = 2 : 1 : \sqrt{3} \text{ より, } AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$AG : GM = 2 : 1 \text{ より, } AG = \frac{2}{3} AM = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

これより、

$$DG^2 = DA^2 - AG^2 = \frac{2}{3} a^2 \quad \therefore DG = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

以上より、正四面体の体積 V は、

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot GD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM \cdot GD = \frac{1}{6} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$1 \text{ 辺の長さ } a \text{ の正四面体の体積は } \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

頂点 A とその対面である $\triangle BCD$ の重心 K を結ぶ線分との交点を O とすると、点 O の線分 DG 上の位置を求めてみよう。

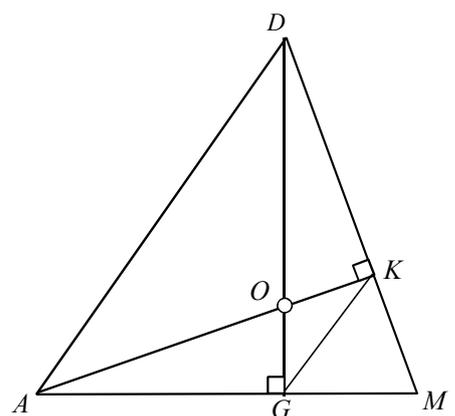
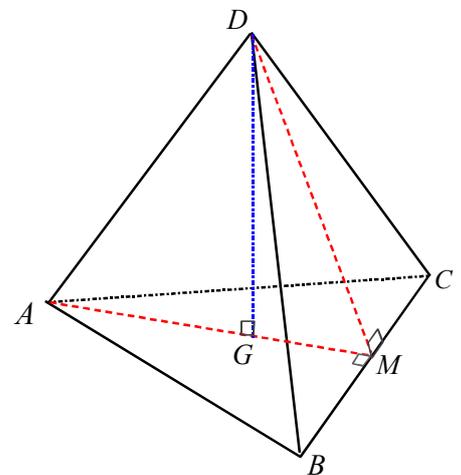
$$AG : GM = 2 : 1 \text{ より, } MD : MK = MA : MG = 3 : 1$$

よって、 $DA \parallel KG$ より、 $\triangle ODA \sim \triangle ODK$

$$DA = 3KG \text{ より, } DO : OK = DA : GK = 3 : 1$$

これは、正四面体の4つの頂点と、それぞれの対面の三角形の重心を結ぶ線分は、1点で交わることを示しており、このことは任意の四面体においても成立する。

この共点 O を四面体の重心という。重心は四面体が一様な密度の物質でできているときの質量中心である。したがって、四面体が点 O によって分けられる4つの四面体 $OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ の体積は等しい。



正四面体の各頂点とその対面の重心を結ぶ線分は1点で交わり、線分を3:1の比に分ける

正四面体を三角形 ABC に対して垂直な方向でみるとき、三角形 DAB は、三角形 GAB に重なる。すなわち、三角形 DAB の正射影が三角形 GAB である。三角形 GAB の面積は、点 G は三角形 ABC の重心であることより、

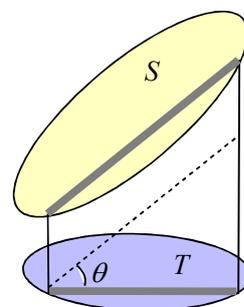
$$\Delta GBC = \frac{1}{3} \Delta ABC$$

である。余弦の定義より、次の性質が得られる。

正四面体の2面のなす角を θ とすると、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$

一般に、閉曲線で囲まれる図形の面積を S 、この図形の1つの平面 α への正射影を T 、2つの図形のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta = \frac{T}{S}$ である。

これは、平面 α に垂直に2つの図形を等間隔に細かく切るとき、切り分けられた図形は長方形に近似でき、2つの図形の縦の長さの比が $\cos \theta$ であることから分かる。



四面体の重心 G は、四面体の内接球、外接球の中心に一致する。

頂点と対面の三角形の重心を結ぶ線分の長さは等しく、その交点である重心 G は線分を3:1の比に内分するから、

$$OA = OB = OC = OD$$

である。すなわち、点 O は正四面体の外接球の中心であり、その半径 r_o は、

$$r_o = OD = \frac{3}{4} DG = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{6}}{4} a$$

であり、その体積 V_o は、

$$V_o = \frac{4}{3} \pi r_o^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi a^3$$

また、内接球は四面体の4つの面に接するから、その半径 r_i は、点 G から平面までの距離に等しい。すなわち、

$$r_i = OG = \frac{1}{4} DG = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$

であり、内接球の体積 V_i は、

$$V_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3 = \frac{\sqrt{6}}{216} \pi a^3$$

である。

このことから、四面体の重心の性質である $DO:OG = 3:1$ は、外接球と内接球の半径の比を表していることが分かる。

よって、内接球の体積は、外接球の体積の $\frac{1}{3^3}$ である。

正四面体の外接球の体積は $V_o = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi a^3$ であり、内接球の体積は $V_i = \frac{1}{27} V_o$ である

また、四面体の内心を I とするとき、 I から4面の三角形に下ろした垂線の長さは内接球の半径 r_i に一致する。

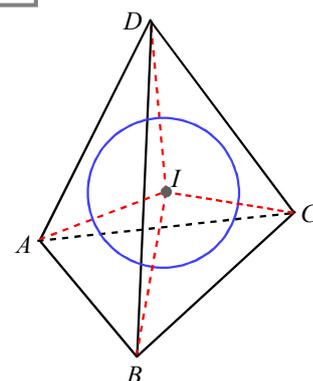
よって、4面の三角形の面積をそれぞれ、 S_1, S_2, S_3, S_4 とすると、四面体の体積 V は、

$$V = \frac{1}{3} r_i S_1 + \frac{1}{3} r_i S_2 + \frac{1}{3} r_i S_3 + \frac{1}{3} r_i S_4 = \frac{1}{3} r_i (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ は、四面体の表面積であり、

$$V = \frac{1}{3} r_i S$$

で得られる。正四面体の場合は、4面は合同な正三角形であるから、 $S = 4\Delta ABC$ である。



ここで、 $\Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ であることを用いると、

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{4}{3}r_l \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

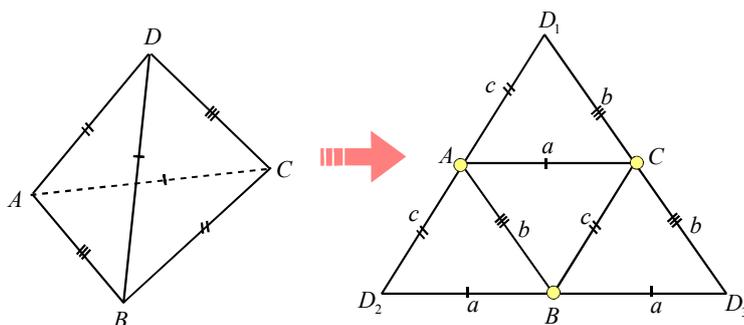
より、 $r_l = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ である。四面体の体積比較をすることにより、内接球の半径を求めることができる。

正四面体の体積 V は、内接球の半径を r_l とすると、

$$V = \frac{4}{3}r_l \Delta ABC$$

である。

四面体で、向かい合う辺の長さが等しいとき、4つの面はすべて合同な三角形である。右図のように四面体を展開すると、合同な三角形であることは明らかである。このような四面体を等面四面体という。等面四面体では、重心、外心、内心は一致し、正四面体の証明と同様に導くことができる。



逆に、四面体で、重心、外心、内心のうち、2つの点が一致するとき、この四面体は等面四面体である(重心と外心が一致した場合の証明は容易)ことも知られている。

四面体の各頂点から対面に下ろした垂線は、交わるとは限らないが、交わる場合にその四面体を垂心四面体という。正四面体は、垂心四面体であることは明らかである。

正四面体の外心・内心・重心・垂心は一致する

正四面体に接する球は、外接・内接以外にもある。

外接は正四面体の4つの頂点と接することであり、内接は4つ面と接することである。球面が正四面体の6本の辺と接する場合も考えられる。これを正四面体の切ったときの断面から調べてみよう。

正四面体の切り口から得られる性質

正四面体を頂点 D とその対面である正三角形 ABC の中線 AM を通る平面 α で切ると、切り口は図の二等辺三角形 DAM になる。このとき、正四面体の重心 O は、 ΔDAM の垂心である。また、正四面体の外接球、内接球の平面 α による切り口は、点 O を中心とする半径がそれぞれ OA, OG の同心円である。

球面が辺に接するとき、その接点は各辺の中点であるから、右図では、 AD の中点 N 、 BC の中点 M であり、 MN が球面の直径である。三角形 AMN においてメネラウスの定理より、

$$\frac{MO}{ON} \cdot \frac{ND}{DA} \cdot \frac{AG}{GM} = 1$$

$$ND : DA = 1 : 2, \quad AG : GM = 2 : 1$$

であるから、

$$OM = ON$$

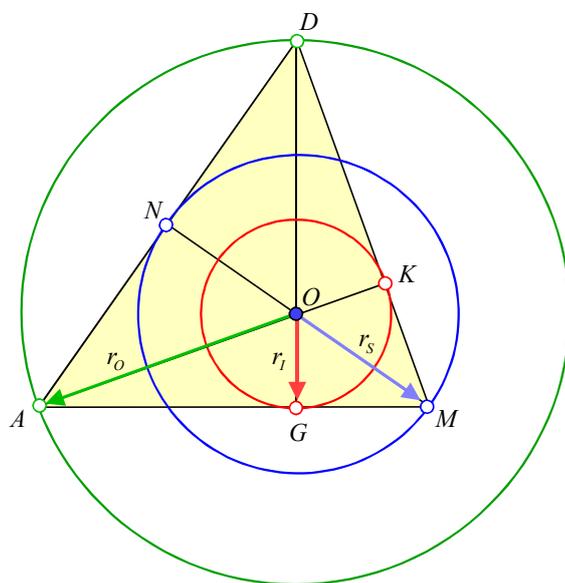
すなわち、点 O は、辺に接する球面の中心である。

$$\text{また、} MN^2 = AM^2 - AN^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

\therefore 球面の半径 r_s は、

$$r_s = ON = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

であるから、球面の体積 V_s は、



$$V_s = \frac{4}{3} \pi r_s^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} \pi a^3$$

平面 α の切り口に現れる円は、球面の大円である。

面に接する球(内接球), 辺に接する球, 頂点に接する球(外接球)の半径をそれぞれ, r_l, r_s, r_o とすると, その半径は大円の半径でもあるから,

$$r_l : r_s : r_o = \frac{\sqrt{6}}{12} : \frac{\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = 1 : \sqrt{3} : 3$$

である。すなわち, 点 O を中心として球を面に接した状態から $\sqrt{3}$ 倍する度に, 辺, 頂点と球面は接することになる。

正四面体の面, 辺, 頂点で接する球の半径をそれぞれ, r_l, r_s, r_o とするとき,

$$r_l = \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad r_l : r_s : r_o = 1 : \sqrt{3} : 3$$

正四面体の展開図から見える性質

立体図形の性質を調べるには, 図形の一部を切り出し, 平面上の図形問題として扱った方が処理し易い場合がある。等面四面体が合同な4つの三角形で構成されることの証明はこれに拠った。

正四面体の面のひとつである三角形 ABC を底面として展開してみよう。

三角形 ABC に内接する円は, 四面体の辺に接する球と三角形 ABC との交線である。また, 三角形 ABC の外接円は, 四面体の外接円と三角形 ABC との交線である。点 G は, 四面体に内接する球との接点を表している。

四面体の重心を O とすると, 内接球の半径 r_l は,

$$r_l = OG$$

である。辺に接する球面の半径を r_s とすると,

$$GM^2 = OM^2 - OG^2 = r_s^2 - r_l^2$$

外接する球面の半径を r_o とすると,

$$AG^2 = OA^2 - OG^2 = r_o^2 - r_l^2$$

ここで, G は三角形 ABC の重心であるから,

$$AG : GM = 2 : 1$$

よって,

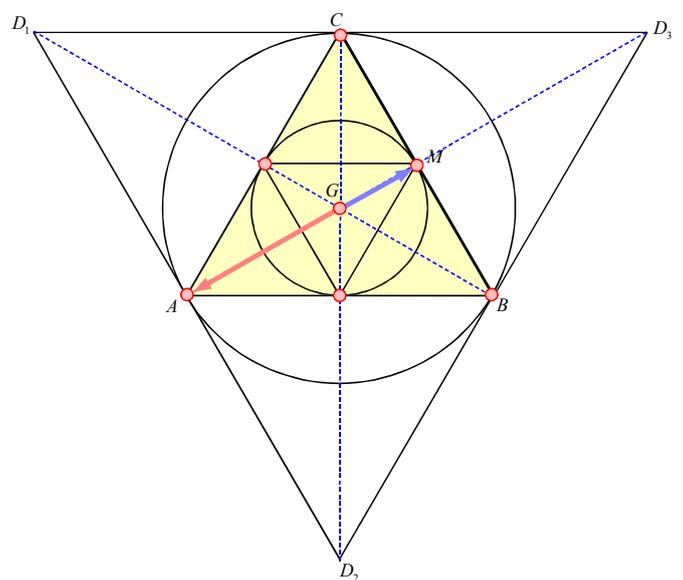
$$AG^2 : GM^2 = r_o^2 - r_l^2 : r_s^2 - r_l^2 = 4 : 1$$

これを整理して,

正四面体の面, 辺, 頂点で接する球の半径をそれぞれ, r_l, r_s, r_o とするとき,

$$3r_l^2 + r_o^2 = 4r_s^2$$

である。

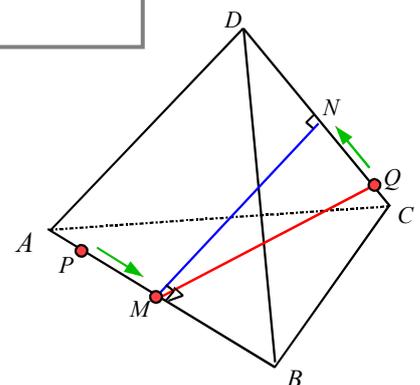


向い合う2辺上の点を結ぶ線分の長さ

正四面体の向かい合う2辺上の動点を結ぶ線分の長さの最小値を求めてみよう。

辺 AB 上の動点を P , 辺 CD 上の動点を Q とする。

点 Q を固定して点 P を動かすとき, 線分 PQ の長さは, 点 P から辺 AB に下ろした垂線の足に点 P が位置するとき, 最小となる。この点を M とすると M は AB の中点である。



次に、点 P を M の位置に固定して、点 Q を動かすとき、同様に、点 Q が辺 CD の中点 N に位置するとき最小となる。以上より、 PQ は、それぞれの辺の中点を結んだ線分 MN がその最小値である。このとき、

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$\therefore MN = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

正四面体の向かい合う 2 辺上の動点を結ぶ線分は、動点がそれぞれ 2 辺の中点にあるとき最小になる。このとき、2 辺と中点を結ぶ線分は垂直であり、線分の長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ である。

この性質を用いると正四面体の体積を求めることができる。

辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とする。

三角形 ABC の面積 S は、

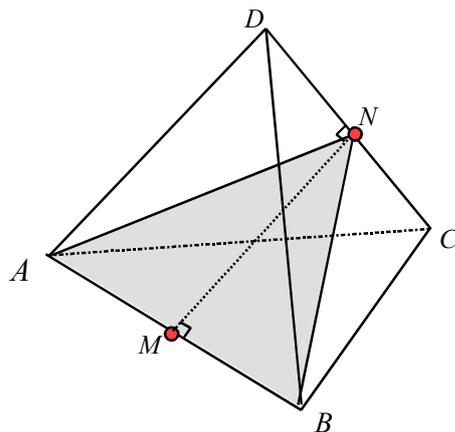
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{1}{2\sqrt{2}} a^2$$

正四面体の体積 V は、四面体 $DABN$ の体積 V_1 と四面体 $CABN$ の体積 V_2 の和であるから、

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} S \cdot DN + \frac{1}{3} S \cdot CN = \frac{1}{3} S(DN + CN) = \frac{1}{3} S \cdot CD$$

以上より、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} a^2 \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$



正四面体の体積 V は、向かい合う 2 辺上の動点を結ぶ線分の長さの最小値を d とすると、

$$V = \frac{1}{6} da^2 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

この性質は、一般の四面体についても成立するように拡張してみよう。

ねじれの位置にある 2 直線 l, m 上に、線分 AB, CD がある。線分 AB, CD がその長さを変えずに直線上を動いても、四面体 $ABCD$ の体積は一定である。

2 点 A, B を固定して、線分 CD をその長さを変えずに動かす。

このとき、三角形 ACD は、同一平面 α 上にある。

点 A から直線 m に下ろした垂線の長さを h とすると、三角形 ACD の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} CDh$$

であるから BC の長さが一定であることより面積も不変である。

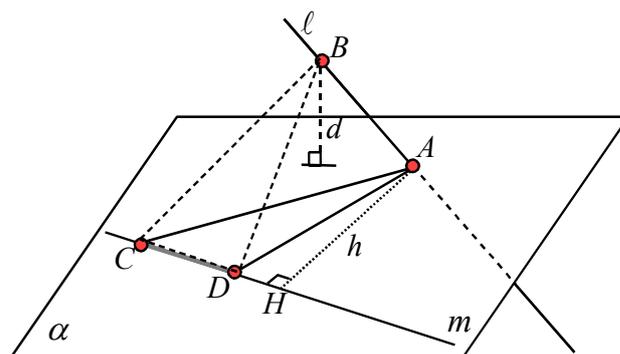
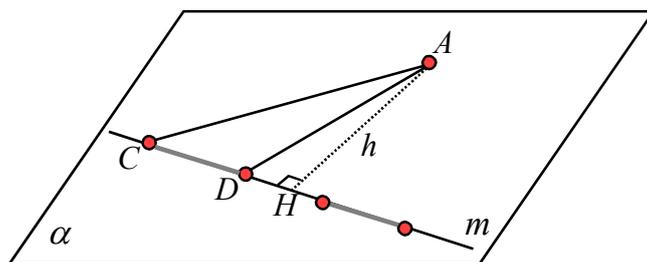
また、点 B から平面 α に下ろした垂線の長さを d とすると、四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} dS = \frac{1}{3} dhCD$$

であるから辺 CD が動いても不変である。

次に、 CD を任意の位置に移動し固定する。そのあと、 AB を任意に動かしても、四面体の体積は変わらない。

以上より、 AB, CD がその長さを変えずに l 上、 m 上をどんなに動いても四面体 $ABCD$ の体積は変わらない。



立方体から四面体を切り出す

立方体の6つの面である正方形の対角線を結ぶことにより、立方体から正四面体を切り出すことができる。

立方体から四面体以外の図形を切り落としていくと、合同な4つの四面体ができる。そのひとつは右図の四面体 $AKBD$ であり、その体積 V_2 は、立方体の体積を V_1 とすると、

$$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} V_1$$

である。したがって、四面体の体積 V は

$$V = V_1 - 4V_2 = V_1 - 4 \times \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{3} V_1$$

四面体の1辺の長さを a とすると、立方体の1辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ より、

$$V = \frac{1}{3} V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

である。

立方体の面の正方形の対角線を1辺とする四面体の体積は、立方体の体積の $\frac{1}{3}$ である。

この立方体を用いて、正四面体に頂点、辺、面で接する球のそれぞれの半径 r_o, r_s, r_l を求めてみよう。

立方体の頂点は正四面体の頂点をすべて共有することより、四面体の外接球は立方体の外接球である。

半径 r_o は立方体の対角線であるから、

$$\begin{aligned} r_o &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} a = \frac{\sqrt{6}}{4} a \end{aligned}$$

である。

球面が正四面体の辺に接するとき、その辺は、立方体の面である正方形の対角線である。よって、球面は立方体の面である正方形に内接する。

したがって、半径 r_s は立方体の1辺の長さの半分である。

$$r_s = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} a = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

右図のように、立方体を正方形である面に対して垂直にみると、辺に接する状態を見ることができる。

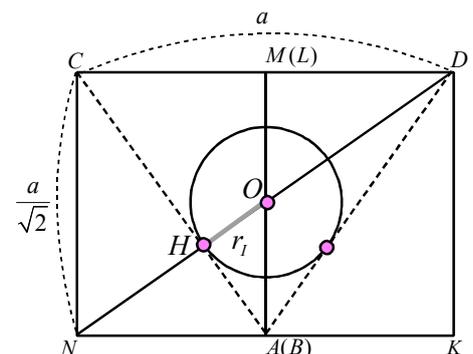
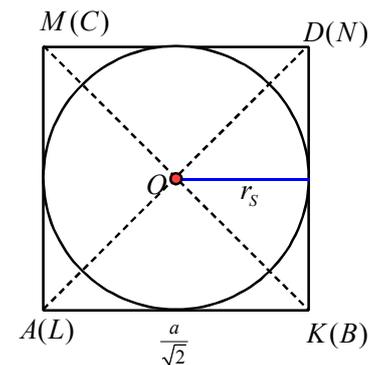
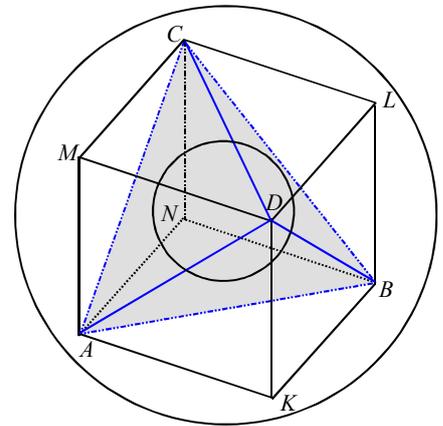
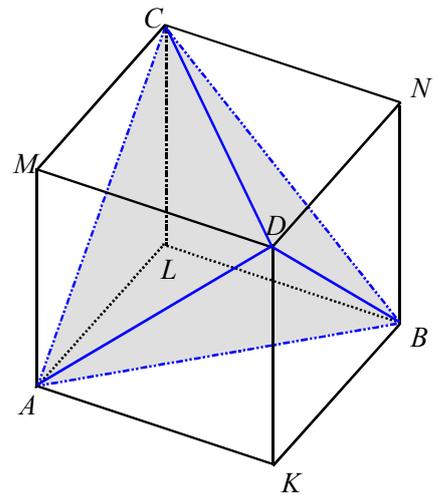
また、面 $CNKD$ に垂直な方向で立方体を見ると、四面体に内接する球の状態が分かる。図の OH の長さが内接球の半径 r_l である。

$$ND^2 = NC^2 + CD^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\therefore ND = \frac{\sqrt{6}}{2} a$$

ここで、 $CN : ON = 2 : 1$ より

$$r_l = \frac{1}{3} ON = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ND = \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2} a = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$



では、正四面体に立方体が内接する場合はどうなるだろう。
立方体の底面の正方形は正四面体の底面上にあり、上面の正方形の1辺は斜面上、それ以外の2点はそれぞれ2つの斜面上で接している。

このときの立方体の1辺の長さ x を求める。

右図のように、立方体を正四面体の内部に配置する。立方体の上面の正方形を含む平面 α で正四面体を切った切り口は正三角形 $A'B'C'$ である。また、 BC の中点を M として、三角形 AMD を含む平面で立方体を切ることができる正方形を図のように $PQRS$ とする。

線分 $A'P = y$ とすると、

$$\frac{x}{2} : y = 1 : \sqrt{3} \text{ より, } y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

また、三角形 AMD で切った断面において、

$$SM : MR = 3 : 1 \text{ より}$$

$$SM : SR = 3 : 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } SM = \frac{3}{2\sqrt{2}}SR = \frac{3\sqrt{2}}{4}x$$

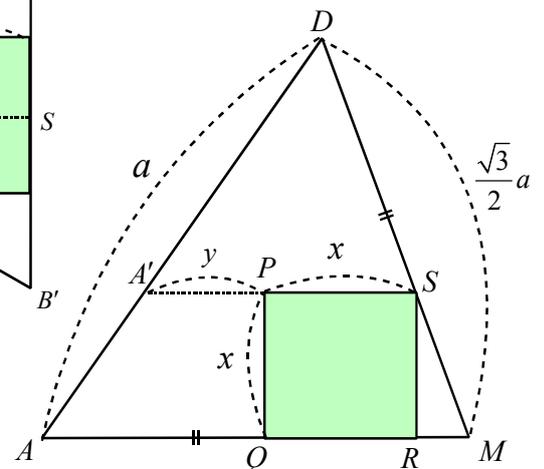
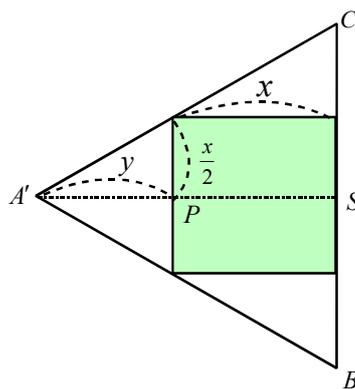
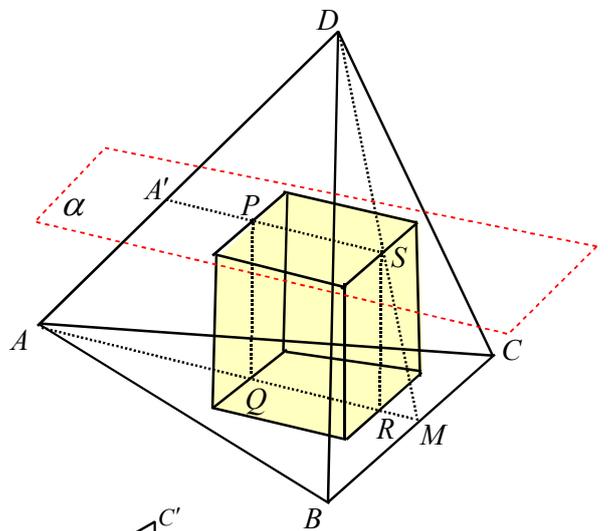
$$\therefore DS = DM - SM = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}x$$

$$A'S = DS \text{ より}$$

$$x + y = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}x$$

$$x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}a$$



1 辺の長さはそれほど綺麗な値ではなく、正四面体の内部に位置するには立方体は馴染まない。だが、正四面体の内部に正四面体を内接させると、正四面体の4面の重心を頂点とする正四面体になり、その体積は元の正四面体の $\frac{1}{27}$ である。

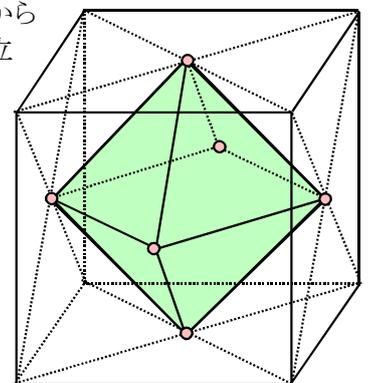
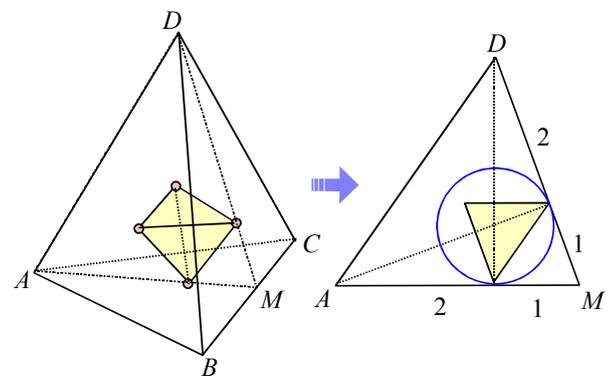
この比の値は、正四面体の外接球と内接球の半径の比と同じである。すなわち、正四面体の内接球は、正四面体に内接する正四面体の外接球であるということである。

このように、正多面体の面の中心を頂点としてその内部に作られる正多面体は元の正多面体と双対であるという。

立方体(正六面体)の双対の多面体は、8つの正方形である面の中心を頂点とするから正八面体である。正八面体の8つの正三角形の面の中心を結ぶとその内部にはまた立方体が現れる。正八面体の体積 V_s は、立方体に含まれる正八面体を真上から見下ろすと、立方体の面である正方形の $\frac{1}{2}$ の正方形を底面とする四角錐を2つ合わせた形であることより、立方体の体積 V に対して、

$$V_s = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}V = \frac{1}{6}V$$

である。



正六面体(立方体)と、その内部に内接する正八面体、正四面体の体積比は、 $6 : 2 : 1$ である。

おわりに

本稿では、解析幾何的な手法は用いず、初等幾何を重んじて考察を進めている。

三角比やベクトルを用いたり、空間座標を導入することで、機械的に解答を導き出すことはできる。ただそれだけでは図形を認識し、理解したとは必ずしも言えるわけではない。図形のイメージを膨らませたり、あるいは平面図形に切り出したりすることで、凝り固まった頭の筋肉(はあるのかな?)をほぐす。それでもイメージできなければ実際に模型を作ってみたりしながら、図形の性質を捉えることが空間思考力を養う。そうした思考トレーニングにより空間認識力を身につけた後に、公式や定理として体系づけていくべきであろう。

本文は球面と正四面体の体積を中心にその関わりをまとめているが、正四面体の体積はベクトルを用いることで簡単に得られてしまう。一般の四面体の体積も公式として与えられている。

正四面体から図のように平行六面体を作ると、その体積を V_1 とすると、正四面体の体積 V は、 $V = \frac{1}{6}V_1$ である。ここで V_1 は次のように求めることができる。

2辺 AB, AC で作られる平行四辺形の面積 S は、 $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

これを底面とする高さ h は、 $\vec{a} \times \vec{b}$ と \vec{c} のなす角を θ とすると、

$$h = |\vec{c}| \cos \theta = |\vec{c}| \frac{|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$V_1 = Sh = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}| \quad \therefore V = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

この公式を用いて、座標空間に四面体を置くと、その体積を求めることは可能になる。

そういった手法もちろん数学の王道ではあるが、四面体の体積をカバリエリの原理などを用いて、柔軟に解いた方がやはり楽しいし頭にとってもいいことである。

今の時代は、パソコンソフトを使うと誰でも簡単に3Dが描ける時代であり、どのような角度からも立体を見ることができ、必要であれば、その内部だって覗ける。容易に視覚による図形認識ができるのであるが、ただそれはデジタル的な図形認識であり、立体図形というよりは、いろいろなアングルで見えてスナップショットした平面図形のサムネイルの画像である。これは空間認識とっていいものだろうか。例えば球面を思い浮かべるとき、その図形は妙に陰影のはっきりとした色鮮やかな球になっていないだろうか。球面のザラザラとした手触り、押すとちょっとへこむ柔らかさ、そういった触覚なども伴った仮想ではない認識は体験より得られるものである。

本文では立方体を切り崩して正四面体を作り出しているが、このアイデアは、天文学者ケプラー(1571-1630)によるものである。ケプラーは、さらに立方体の残りの4頂点も結び、もう一組の正四面体を作った。その結果、2つの正四面体は、重なり合い、図のように対称性鮮やかな立体を作り出している。星形に見えるこの立体をケプラーは、八角星(stella octangula)と名づけた。八角星で2つの正四面体の重なった部分は正八面体になっている。八角星の体積は、2つの正四面体の体積の和から正八面体の部分を除けばよいから、立方体の体積を V とすると、体積 V_T は、

$$V_T = 2 \times \frac{1}{3}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{2}V \text{ である。}$$

これから、八角星、正四面体、正八面体の体積は、立方体の体積のそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ より、

3 : 2 : 1である。この比は、アルキメデスが発見した、底面の直径と高さが等しい円柱と、それに内接する球、直円錐の体積比と同じである。さらに

$$3 + 2 + 1 = 6$$

その和は、正六面体の体積に等しい。すなわち完全数6の約数により、正六面体、八角星、正四面体、正八面体が配置されているのである。

ケプラーは、八角星をきつと紙で作成して、その美しさに心奪われたことだろう。

実際に作ってみて、初めて味わえる発見であり、喜びである。

