

メイクル数学

～ 数学を make-up! しよう

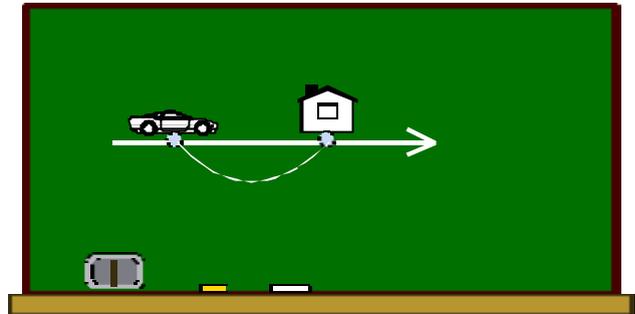
札幌藻岩高校 中村文則

本時の menu

絶対値自動車を走らせる!

レシピ

- 【材 料】 本時で使用する素材
厚紙、教室の壁に貼ってある不要になった掲示物(西洋紙)、チョーク(あるいはマジック)、ハサミ、マグネット、輪ゴム、クリップ

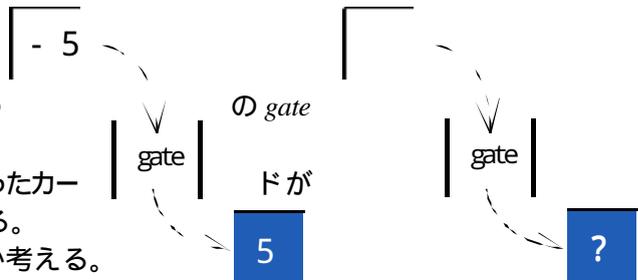


- 【下ごしらえ】
・厚紙を切り抜いて、自動車、家を作る。教室の不要の掲示物を拝借して、カードを作る。

【調 理】

《基本編1》 ～カードの値から絶対値をメイクル

- ・絶対値を表す記号 $| \quad |$ は、数の大きさを求めるためであることを説明。
- ・黒板に絶対値記号を書き、西洋紙を切り抜いて作ったカー絶対値 $gate$ をくぐるとどうなるか予想させる。
 - ・白紙のカードは $gate$ を通すとどうなるか考える。
 - ・白紙のカードに a と書き、 $gate$ を通すとどうなるか調べる。



《基本編2》 ～自動車を走らせ絶対値をメイクル

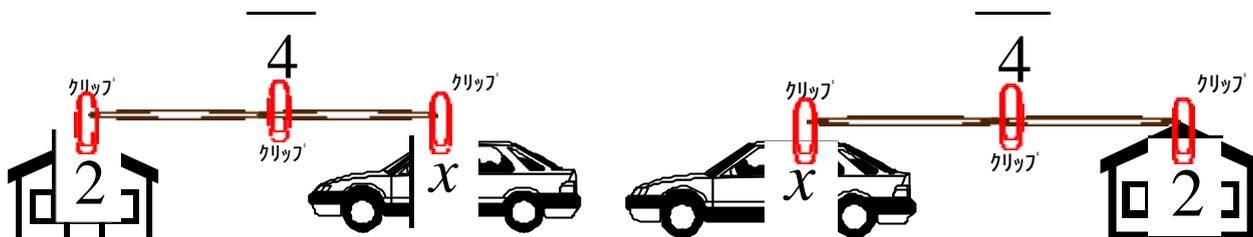
- ・数直線上で
(車の位置) - (家の位置) = (車と家の距離)
であることを説明。ここで、(車の位置) < (家の位置) のとき、距離 < 0 となる。
そこで、(距離) 0 とするために、 $| \quad |$ をつけて修正することを説明。
- ・クリップと輪ゴムで厚紙で作った家と車を結ぶ。
- ・輪ゴムが弛んでいない長さが絶対値の値であることを説明する。



《基本編3》 ~ 車と家の距離から絶対値1次方程式をメイクる

ex1) 次の方程式を解け。
 (1) $|x-2|=4$ (2) $|x|=3$ (3) $|2x-3|=4$

- $x, 2, 4$ を書いた3枚のカードを用意し、それぞれ、車、輪ゴム、家にクリップで挟む。
- ゴムを弛まない状態にしたときの家から車までの距離を求める。
- 同様に(2)については $|x-0|=3$ と考え、また(3)については $|x-\frac{3}{2}|=2$ と考え必要なカードを用意する。



《基本編4》 ~ 車と家の距離から絶対値1次不等式をメイクる

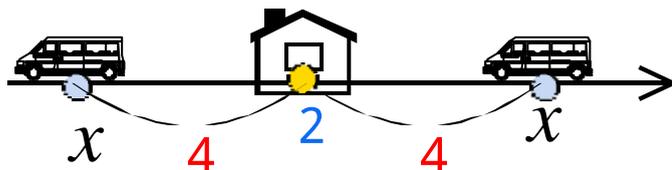
ex2) 次の不等式を解け。
 (1) $|x-3|<4$ (2) $|x+2|>3$ (3) $|3x+2|>1$

- $x, 3, 4$ と書いた3枚のカードを用意し、それぞれクリップで車、輪ゴム、家に挟む。
- ゴムを弛んだ状態にしたときの車と家の距離の変化を読み取る。
- (2) $|x-(-2)|>3$ とみて、 $x, -2, 3$ を書いたカードを用意し、車、輪ゴム、家に挟む。
- 輪ゴムを弛まない状態から伸ばし、家から車までの距離を読み取る。
- (3) $|x+\frac{2}{3}|>\frac{1}{3}$ として必要なカードを用意し、(2)と同様の操作をする。



《応用編1》 ~ 数直線上に絶対値方程式をメイクる

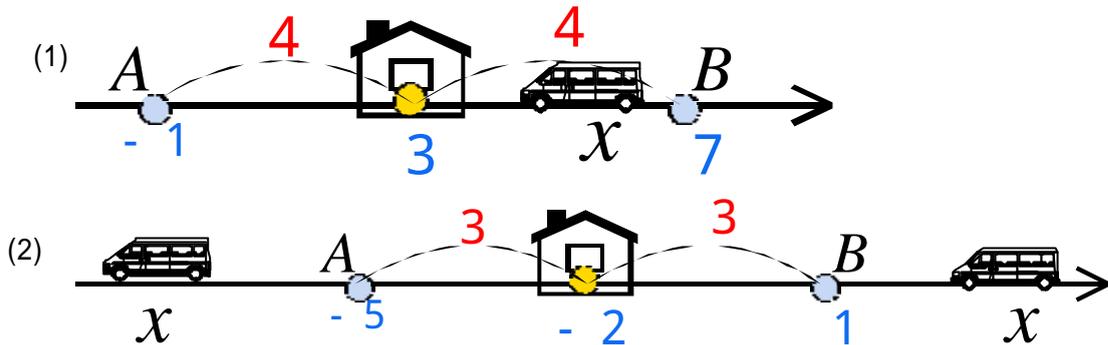
- ex1)の(1)の問題を解く。
- 黒板に数直線を書く。
 - 出発点である $x=2$ の場所にマグネットで家を貼る。
 - 家からの距離が4である数直線上の点にマグネットで車を貼る。
 - 車の位置を読み取る。



《応用編2》 ~ 数直線上に絶対値不等式をメイクる

- ex2)の(1)の問題を解く。
- 黒板に数直線を書く。
 - $x=3$ の場所にマグネットで家を貼る。
 - 家からの距離が4である2点 $A, B (A < B)$ を求めその座標を数直線に書く。
 - 家から車までの距離が4より短くなるよう車を走らせ、適当な場所1つにマグネットで貼る。

- ・数直線上左から、 $A < \text{車} < B$ の順にその座標を書く。
- ex2)の(2)の問題を解く。
- ・家からの距離が3となる2点 A, B を求めてから、距離が3より長くなる2つの場所に車のマグネットをはる。
- ・左から順に車 $< A, B < \text{車}$ の順に書いていく。



《応用編3》 ~車を替えて絶対値方程式をメイクル

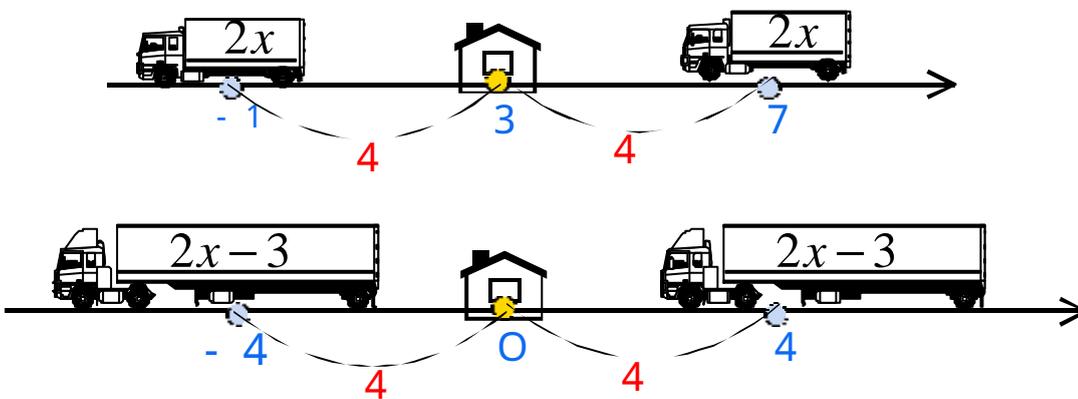
ex1) (3)を解く。

- ・カードに $2x$ を書き、車に貼る(小型トラックサイズにする)。
- ・ $2x$ という車種の車と家の位置3までの距離が4の2点 A, B を求め、その座標を書く。
- ・2点 A, B の位置に車をマグネットで貼る。
- ・車と位置 A, B を比較して x の値を求める。

$$2x = -1, 7 \text{ より、 } x = -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

- ・次にカードに $2x-3$ と書き、車に貼る(大型トラックサイズにする)。
- ・ $2x-3$ という車種の車と家の位置(原点)までの距離が4である2点 A, B を求める。
- ・ A, B の位置に車をマグネットで貼り、 x の値を求める。

$$2x-3 = -4, 4 \text{ より、 } x = -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

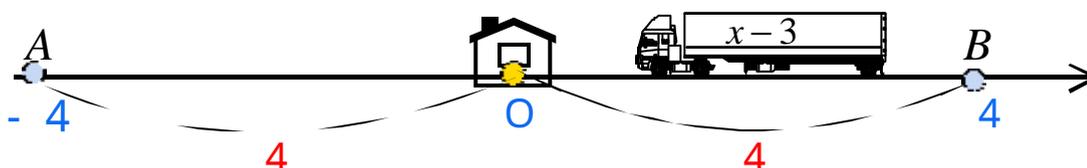


《応用編4》 ~車を替えて絶対値不等式をメイクル

ex2) (1)を解く。

- ・カードに $x-3$ を書き、車に貼る(大型トラックサイズにする)。
- ・家のある原点からの距離が4である2点 A, B を求める。
- ・トラックと家との距離が4より短い場所にトラックを貼る。
- ・ $A < \text{トラック} < B$ の順に書く。
- ・ x の値を求める。

$$-4 < x-3 < 4 \text{ より、 } -1 < x < 7$$



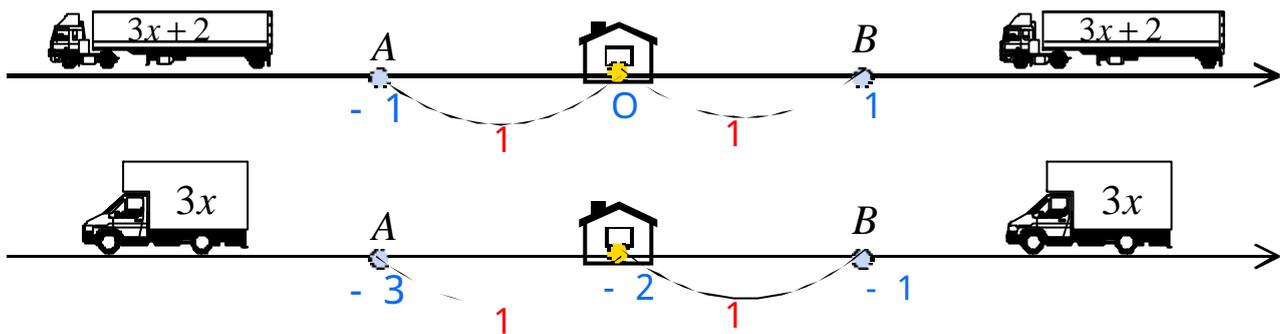
ex2) (3)を解く。

- ・カードに $3x+2$ を書き、車に貼る(大型トラックサイズにする)。
- ・家のある原点からの距離が1であるある2点 A, B を求める。
- ・トラックと家との距離が1より長い場所(2箇所)にトラックを貼る。
- ・トラック $< A, B <$ トラックの順に書く。
- ・ x の値を求める。

$$3x+2 \quad -1, 1 \quad 3x+2 \text{ より、} \quad x \quad -1, -\frac{1}{3} \quad x$$

- ・次に、カードに $3x$ と書き、車に張って同様に求めてみる(小型トラックサイズにする)。

$$3x \quad -3, -1 \quad 3x \text{ より、} \quad x \quad -1, -\frac{1}{3} \quad x$$



まとめ

絶対値問題が難しいのは、「絶対」といっておきながら、その解法が「相対」的であるからだと思います。大きさを求める記号と捉えたり、数直線(平面・空間)における距離と考えたり、あるいは平面上のグラフでは x 軸に関する反射とみたり、扱う問題によって多種多様な色をみせます。もちろん根元に違いはないのですが「そう考えると分かり易いから」と押し付けることが分かりにくくなっている分野の代表例といえるでしょう。絶対値分野が深みにはまると際限なく落ち込むのは、過去に小手業シリーズで絶対値不等式を扱ったとき、次の不等式変形は認められるかということに対しての波紋の大きさから分かります。

$$|2x-1| < x \Leftrightarrow -x < 2x-1 < x$$

$$|2x-1| > x \Leftrightarrow 2x-1 < -x, x < 2x-1$$

実は両方ともに正しいことがネット上の議論で証明されたのですが、これに対しては正しいのになぜ現場では認められないかという点では依然結論がでていません。絶対値は数学的に触れられたくない部分を被覆している gate みたいなものでもあり、そこは教育上、ネグレクトした方がきっといいのでしょう。

さらに、 $-$ (マイナス) 記号をどう生徒は解釈しているかということで指導法も変わってきます。生徒が、 $|-a|=a$ と答えるなら、 a が変数であることを理解させることと同時に $-$ 記号が、負数を表すのではなく、ベクトル的に符号を変える働きをする記号と認識することも必要でしょう。絶対値が曖昧な変数の大きさを包括的に求めるのに対し、 $-$ 記号は直接的に作用する訳です。こういった出発点の違いからも絶対値は苦い味わいをもって苦しめてくれます。

さて、本文の内容ですが、前半の家と車と輪ゴムはそれぞれ、定数(定点)と変数(動点)と $-$ 記号をパロディしています。輪ゴムの伸び縮みで不等式の表現しようとしたのですが、ちょっと失敗だったかもしれません。遊びすぎるとロクなことがありません。

後半は、変数を車で表し、 $x, 2x, 2x+3$ と変えていく様子を車の大きさで例えています。左方向から定数と変数を拾っていき、「 $<$ 」や「 $>$ 」で結べば自然と解が得られます。変化する点、変化しない点をそれぞれ家と車で置き換えると随分すんなりと理解ができたなと感じます。

なお、本文の数直線上の自動車はすべて左方向(x 軸負方向)を向いています。他意があったわけではありません。自動車のイラストで右向きのが手元になかっただけのことです。車の向いている方向も考えて指導をアレンジしてもらえればと思います。