

メイクル数学

～数学を make-up しよう!

札幌旭丘高校 中村文則

本時のメニュー

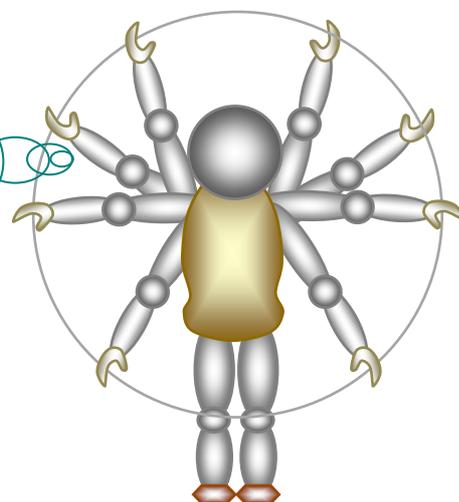
ボディトラで三角不等式を解こう

レシピ[®]

【材 料】 本時で使用する素材(食材)

生徒または教師のボディ
手と手を合わせた音
照れ笑いと勇気を小さじ少々

両腕を挙げて、頭の上
で、手と手を合わせてパ
チンと鳴らしてみよう。
今回は触覚・聴覚の刺
激も取り入れます。



【下ごしらえ】

簡単な準備体操

グルッと腕を回して頭の上で手と手を合わせてパチンと音を鳴らそう

次に、レシピに関する説明

～サインはV、知っているかな!～

サインはVってスポ根ドラマをしっているかな。

何!、スポ根が分からないって。スポーツ根性を縮めた言葉で、柔道の鍛錬で鉄ゲタ履きランニングして足腰を鍛えたり、大リーグボール養成ギブスで腕の筋力を強化するするとかして、監督やコーチが根性、根性、ド根性と叫んでいるドラマのことだ。「サインはV」は、アニメ「アタックNo.1」と人気を二分したスポ根バレーボールの実写版ドラマだ。ヒロイン朝丘ユミが繰り出す、稲妻落としとか、魔のX攻撃は凄かったよな……、何々、この水を打ったような静けさは…、思いやりの欠片もないその冷めた目は…、分かったよ、先生の輝いていた青春時代を理解して貰おうと思ったことが間違いだった…、

それじゃあ、Vサイン、これは知ってるよな。ピースサインとも言うし、カメラの前で人差し指と中指を立ててポーズ決めるだろ。中指だけ立てるとまずいけどな…ところで、この2本の指は何を意味していると思う。「サインはV」はVictory(勝利)の頭文字だけけど、こちらはPeace だから直訳すると平和のサインということになるけど、日本人にとってはこのpeaceは悲しい出来事を思い出させるものなのだ。

第二次世界大戦で英国が勝利したとき、首相チャーチルが、群衆に向かって指を二本立てたのがピースサインの始まりであるとも言われている。記者がそのポーズの意味を質問したところ、チャーチルは、「この2本は、広島と長崎に投下された原子爆弾(リトルボーイとトムキャット)のことで、これにより戦争は終結して世界に平和がもたらされたのだ」と述べたという。この話が本当のことかどうかは分からないのだけれど、ピースサインは、勝利のVという意味だけでなく、人間の犠牲で得られた平和の象徴でもあるわけで、私たちはそのことをもっと深く胸の奥に留め、考えなければならぬだろう。

さて、「サインはV」は、三角比の正弦(サイン)の値をVの形から連想できるシンボルなのだけれど、ここでは他のシンボルで三角比の値とその不等式について体で表現し理解してみよう。

以前、体で放物線を表現することをボディパラと呼んだね。パラはパラボラ(放物線)の意味だけれど、今回は体を用いて三角不等式を解いてみよう。そこで、三角比(trigonometric ratio)をもじって、これをボディトラと呼ぶことにする。

調 理

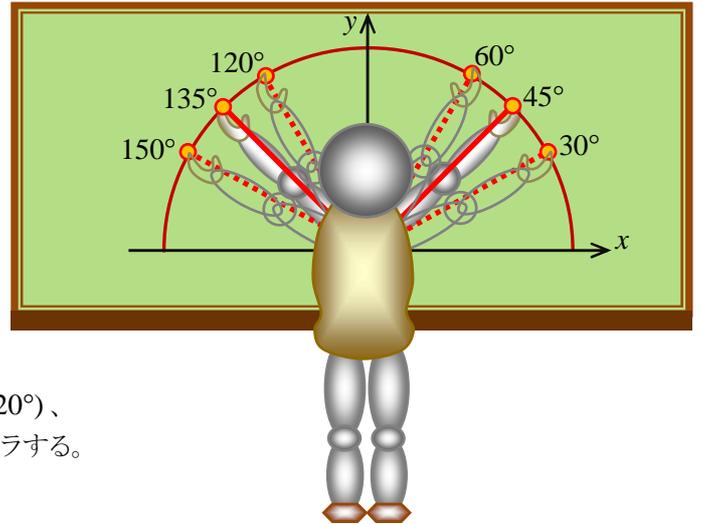
【角度をイメくる】

腕の傾きから 30°(150°), 45°(135°), 60°(120°)
の角度をイメージする。

- 黒板に半円を描く
- 角度が 30°(150°), 45°(135°), 60°(120°)
の動径と円周上の点を描く

準備ができれば、黒板を背にして立つ。
まず、角度 45° になるように左腕を上げ、次に
y 軸に対象になるように、右腕も上げる(135°)
両腕をみて 45° の角度を体で覚えよう。

次に、45° の位置から、両腕を少し上げて、60°(120°)、
両腕を少し下げて、30°(150°) の位置を体でボディトラする。
これを垂直方向に、
やや低いのは 30°
中ぐらいは 45°
やや高いは 60°
と意識して体に叩きこむ。



【三角比(三角関数)をイメくる】

①正弦の値

正弦は単位円周上の点の垂直方向(y座標)の値で、

$$\begin{aligned} \text{やや低い}は30^\circ \text{で} \frac{\sqrt{1}}{2} &\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{中ぐらい}は45^\circ \text{で} \frac{\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{やや高い}は60^\circ \text{で} \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と覚える。

両腕を y 軸に対称に回して、垂直方向の位置を意識しよう。

これを、

サインはVで、Vertical (垂直)

と語呂合わせで覚えてもいいが、上下に手を合わせた状態を蜂に例え、

サインはサス(蜂が刺す)!!

くだけた気持ちで唱えよう。

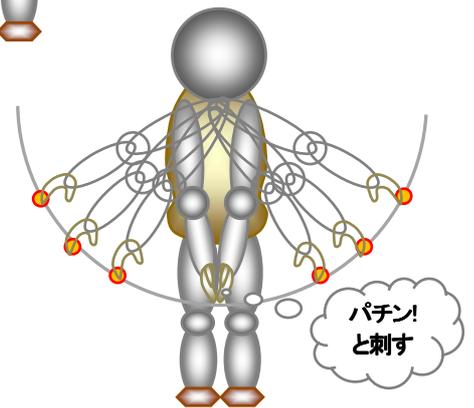
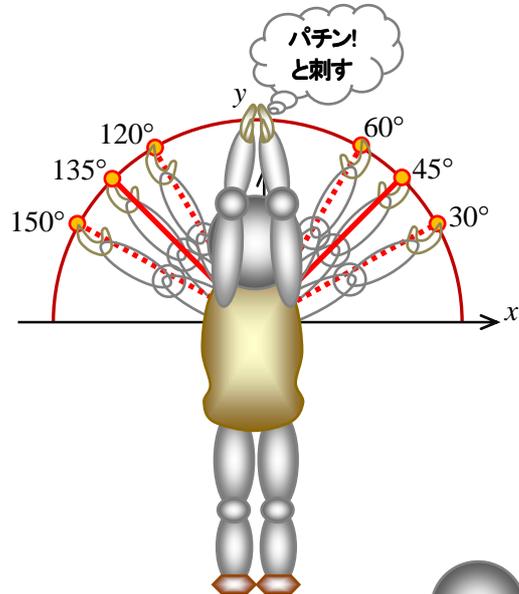
両腕を上げて

両手をパチンと鳴らして(90°)刺す

両腕を下げて

両手をパチンと鳴らして(-90°)刺す

正弦の縦の変化を手の感触と音の響きで楽しみ覚えよう。



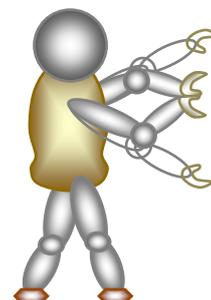
②余弦の値

コサイン(余弦)の頭文字はC。

その形からコサインが横に伸びることをイメくる。

あるいは、カメハメ波～

とでも叫んで、インパクトのある演出をすることに心掛けよう。



カ・メ・ハ・メ・波～

余弦は単位円周上の点の水平方向(x座標)の値で、
その長さが、

$$\text{やや短い}は60^\circで \frac{\sqrt{1}}{2} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{中ぐらい}は45^\circで \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{やや長い}は30^\circで \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と覚える。

両腕をx軸に対称に回して、水平方向の位置を意識しよう。

これを、コサインはワニ(クロコダイル)がガブリと噛む
感じを表現して、

コサインはカム(クロコダイルが噛む)!!

くだけた気持ちで唱えよう。

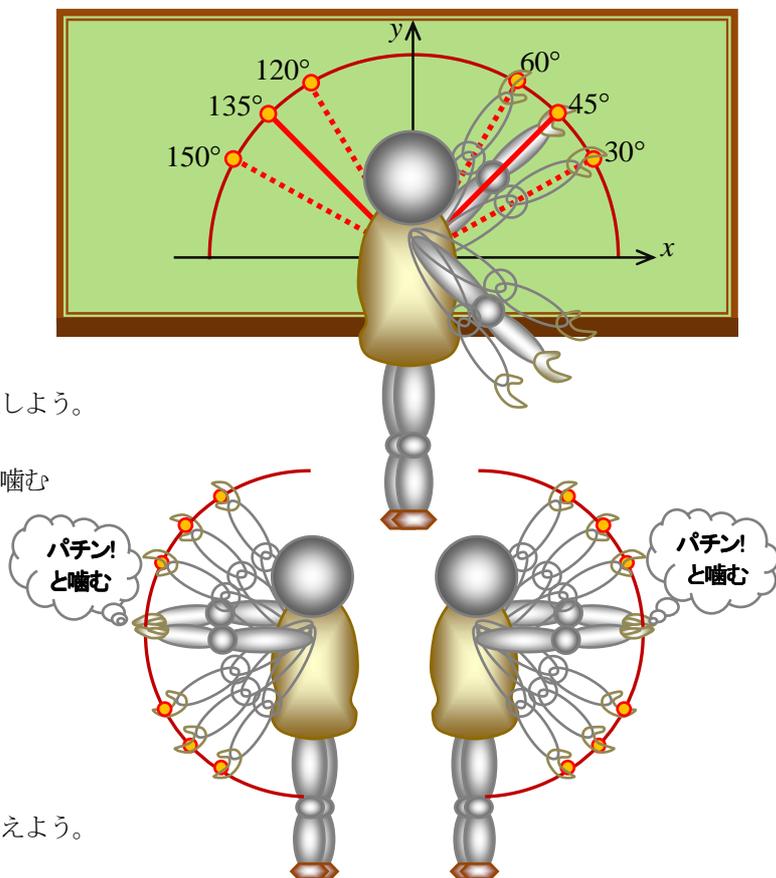
両腕を左向きにして

両手をパチンと鳴らして(0°)噛む

両腕を右向きにして

両手をパチンと鳴らして(180°)噛む

余弦の横の変化を手の感触と音の響きで楽しみ覚えよう。



②正接の値

正接は単位円周上の動径を含む直線の傾きであり
傾きが、

$$\text{やや小さい}は30^\circで \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{中ぐらい}は 45^\circで 1 \Rightarrow \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{やや大きい}は60^\circで \sqrt{3} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

と覚える。

両腕を原点の周りに回して、
腕の傾きの位置を意識しよう。

これを、タンジェントは、龍(タツ)が片腕を伸ばし
宝珠(円周上の点)を掴む様子をイメージして、

タンジェントはツカム(タツが掴む)!!

くだけた気持ちで唱えよう。

左腕を伸ばしながら(右腕は下げながら)、

右手で掴んで太ももをパンと叩く(90°)

右腕を伸ばしながら(左腕は下げながら)、

左手で掴んで太ももをパンと叩く(-90°)

正接の傾きの変化を手の感触と音の響きで楽しみ覚えよう。

以上の

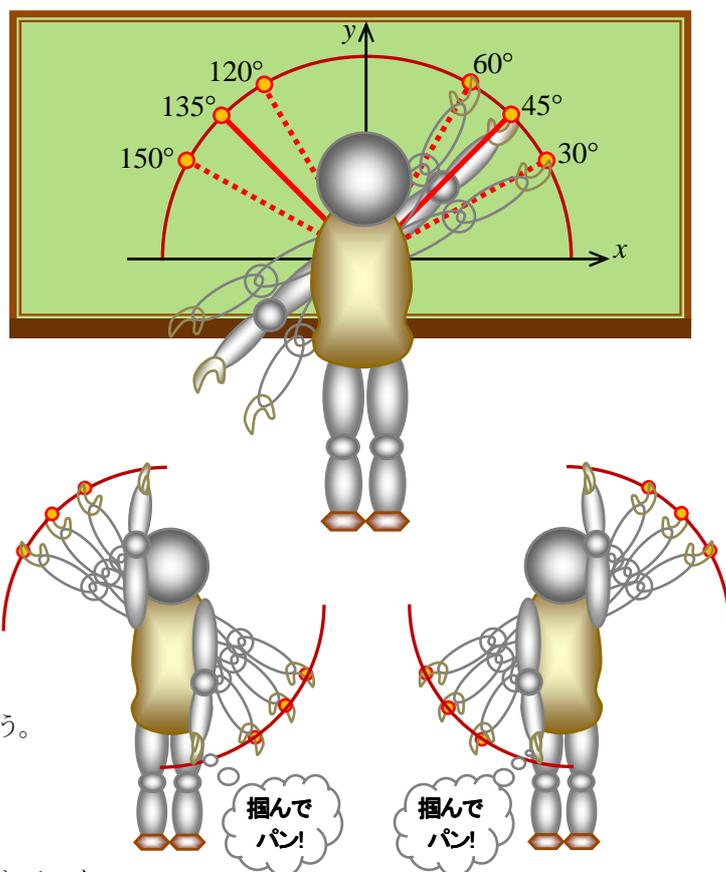
刺す、噛む、掴む

を繰り返すボディトラして、角度と三角比の値を体に刻んでいく。

なお、パチン、トンと音がる場所(点)は、三角比の限界点であり、そこで角度は止まる。

正弦は上下に、余弦は左右に限界点がある。

正接は左腕を上げながら回している状態が、傾き90°を境に右腕を上げている状態に変えなければならない。
すなわち、正接は90°(270°)の値は存在しないことにも注意させよう。



【三角方程式をメイクる】

ポディトラで三角比をイメクることができれば、三角方程式は簡単に解くことができる。
 なお、生徒が解く場合は、単位円と向かい合う向きで、両腕の位置を考える。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

サインはサスと唱え、
 刺す向きを上方にして、やや低く両腕を上げる。
 その腕の位置から、

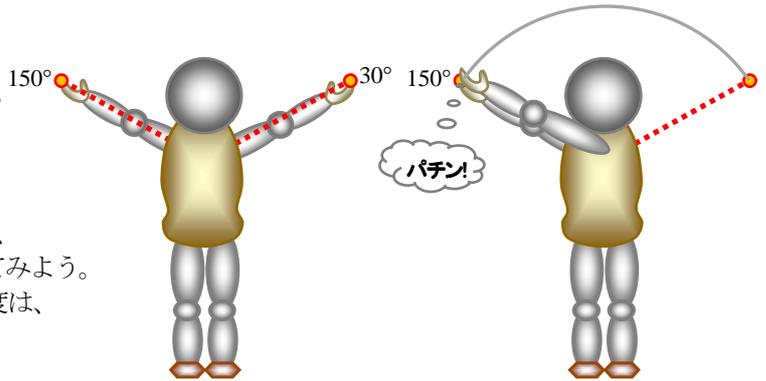
$\theta = 30^\circ, 150^\circ$ (0° と 180° から 30° 上げて)

をイメク。

なお、 150° の値は、右腕を左腕の位置に重ね、
 パチンと手のひらを合わせ、角度をイメクってみよう。

y 軸に関して対称な両腕を表すそれぞれの角度は、
 相互に 180° から引くと得られる。

$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$



(2) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

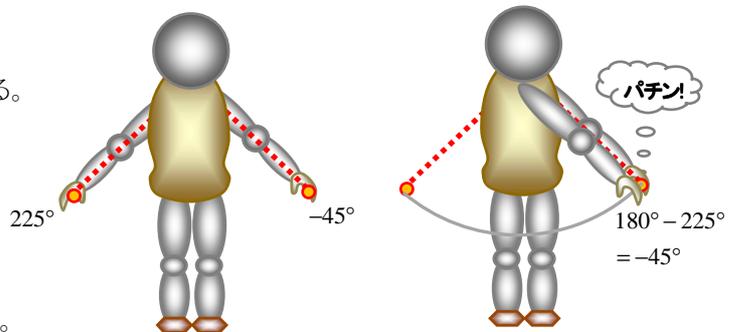
サインはサスと唱え、
 刺す向きを下方にして、中ぐらいに両腕を下げる。
 その腕の位置から、

$\theta = -45^\circ, 225^\circ$ (0° と 180° から 45° 下げて)

をイメク。

片方の腕をもう片方に重ね、
 パチンと手のひらを合わせてみよう。

相互に 180° から引くと、他方の角度が得られる。



(3) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

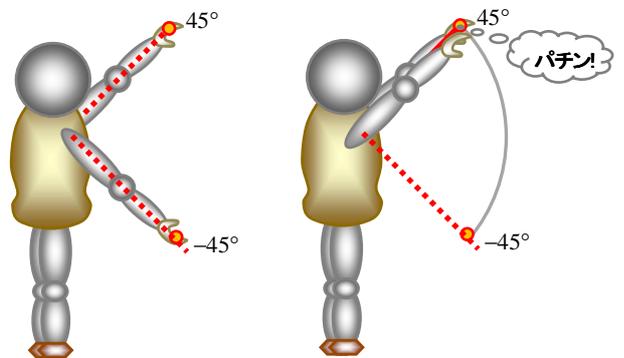
コサインはカムと唱え、
 嚙む向きを右向きにして、中ぐらい両腕を伸ばす。
 その腕の位置から、

$\theta = 45^\circ, -45^\circ$ (0° から 45° を上下して)

をイメク。

片方の腕をもう片方に重ね、
 パチンと手のひらを合わせてみよう。

相互に角度の符号を変えると、他方の角度が得られる。



(4) $\tan \theta = \sqrt{3}$

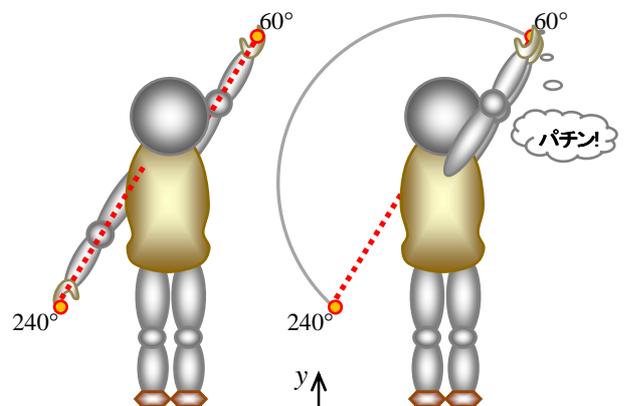
タンジェントはツカムと唱え、
 右手の傾きをやや大きくして、円周上の点を掴む。

$\theta = 60^\circ, 240^\circ$ ($0^\circ, 180^\circ$ にそれぞれ 60° を加えて)

をイメク。

片方の腕をもう片方に重ね、
 パチンと手のひらを合わせてみよう。

相互に 180° を引くと (加えると)、他方の角度が得られる。



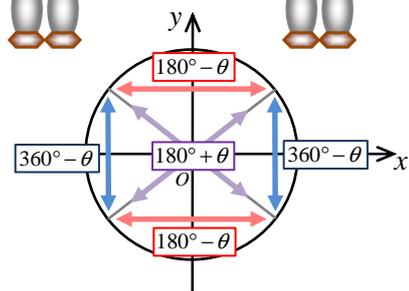
パチンと鳴る音から、ある象限から別の象限への角度の移動をイメクることができる。

角度を θ とすると、

第1(3)象限 \Leftrightarrow 第2(4)象限 (y 軸対称) は、 $180^\circ - \theta$

第1(2)象限 \Leftrightarrow 第4(3)象限 (x 軸対称) は、 $-\theta$ ($360^\circ - \theta$)

第1(2)象限 \Leftrightarrow 第3(4)象限 (原点对称) は、 $\theta - 180^\circ$ ($\theta + 180^\circ$)



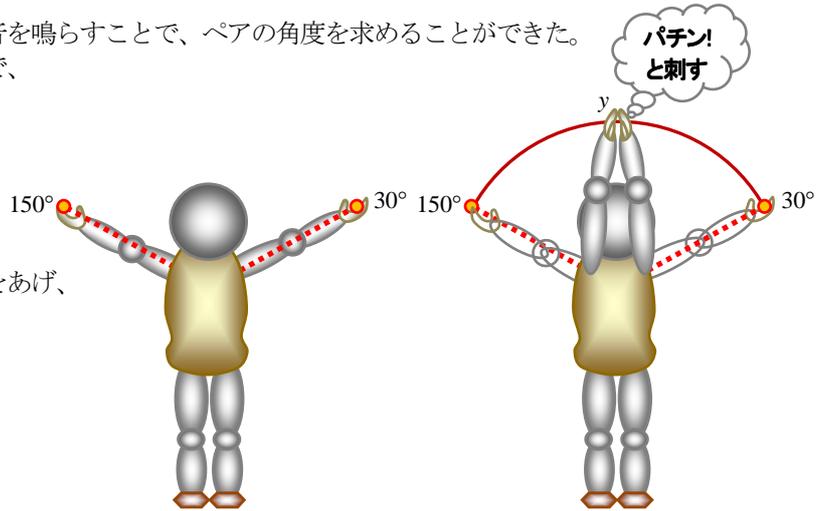
【三角不等式をメイクる】

三角方程式は、片方の腕を他方に重ねて音を鳴らすことで、ペアの角度を求めることができた。
三角不等式は、両腕を三角比の限界点まで、

刺す、噛む、噛む
ことをすれば、その解が得られる。

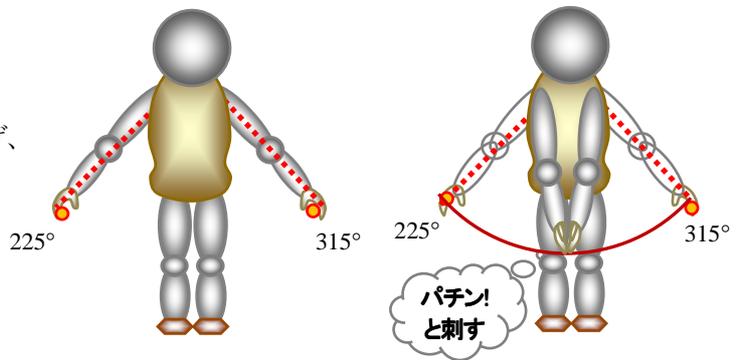
(1) $\sin \theta > \frac{1}{2}$

サインはサスと唱え、
刺す向きを上方にして、やや低く両腕をあげ、
 $\theta = 30^\circ, 150^\circ$
を決める。次に不等号の向きをみて、
両腕を更にあげて、
パチンと手のひらが鳴るまで刺す。
両腕が描く円弧をイメクリ、
 $30^\circ < \theta < 150^\circ$



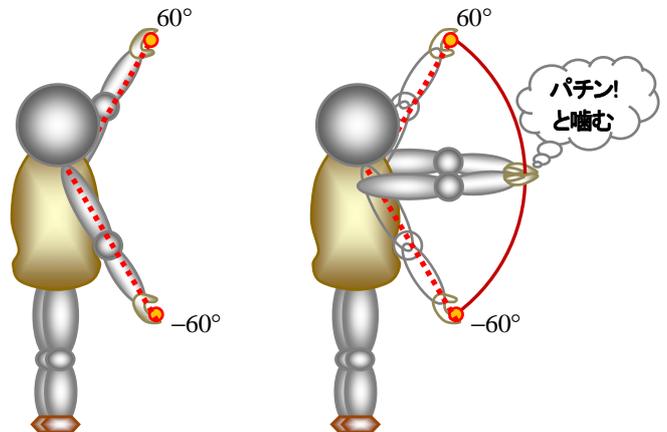
(2) $\sin \theta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

サインはサスと唱え、
刺す向きを下方にして、やや低く両腕をあげ、
 $\theta = -45^\circ(315^\circ), 225^\circ$
を決める。次に不等号の向きを見て
両腕を更に下げて、
パチンと手のひらが鳴るまで刺す。
両腕が描く円弧をイメクリ、
 $225^\circ < \theta < 315^\circ$



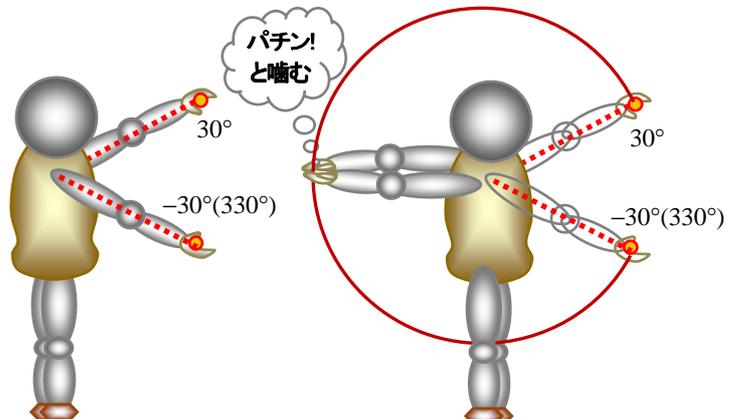
(3) $\cos \theta > \frac{1}{2}$

コサインはカムと唱え、
噛む向きを右方向にして、やや短く両腕を伸ばし、
 $\theta = 60^\circ, -60^\circ$
を決める。次に不等号の向きを見て、
両腕を更に伸ばして、
パチンと手のひらが鳴るまで噛む。
両腕が描く円弧をイメクリ、
 $-60^\circ < \theta < 60^\circ$



(4) $\cos \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

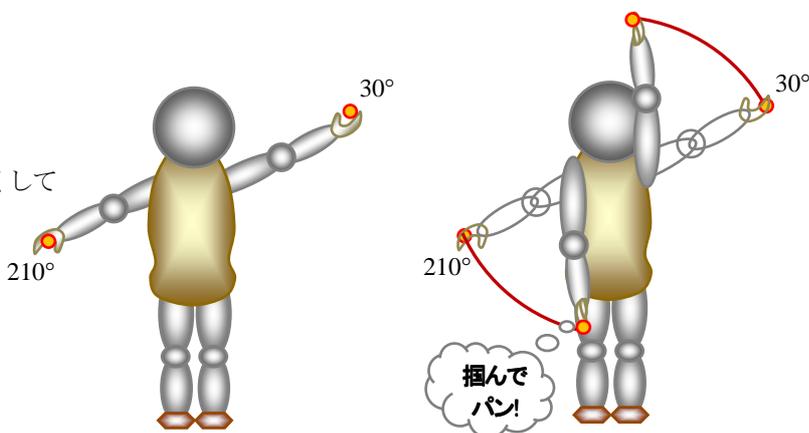
コサインはカムと唱え、
噛む向きを右方向にして、やや短く両腕を伸ばし、
 $\theta = 30^\circ, -30^\circ$
を決める。次に不等号の向きを見て、
左向きにワニが振り返るように
大きく向きを変えて、
両腕を伸ばして、
パチンと手のひらが鳴るまで噛む。
両腕が描く円弧をイメクリ、
 $30^\circ < \theta < 330^\circ$



$$(5) \tan \theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

タンジェントはツカムと唱え、
取る向きを右上に、右腕の傾きをやや小さくして
 $\theta = 30^\circ, 210^\circ$

を決める。次に不等号の向きを見て、
更に傾きを大きくし、
左腕の手が太ももをパンと叩くまで回す。
両腕が描く円弧をイメクリ、
 $30^\circ < \theta < 90^\circ, 210^\circ < \theta < 270^\circ$



あとがき

メイクる数学の興具の中でもボディパラを用いた学習理解は極めて効果的なものでした。なんとといっても体を張っているわけですから。生徒は、パソコンの機能がスマホに凝縮され身近になったことで、2次元、3次元のモノの動きに親しんでいるはずなのに、放物線の問題でも、定義域や軸が変化する最大最小問題など、突然グラフが動き出すと面食らってしまう生徒は多いのです。それは、アニメーションやゲームのように動きのある図形を疑似体験することはできて、その動きのしくみは論理的にトレースできてはいないということなのでしょう。

メイクる数学は、目で図やグラフを追い、イメクリの思考体験をして理解を深めることを目的にしています。

ボディパラは、興具の作成時間をまったく必要としない究極の興具といえます。ボディパラを「みんなもやってみるか」と投げかけると多くの生徒はきっぱり拒否してくれます。それもこの興具の面白いところです。恥ずかしがって拒否はするけど誰もが頭の中で自分自身を面白がって動かしているのです。数学は思考するものだから、ボディパラが描いたイメージを追体験し、イメクリ、頭の中で育てていくことがベストなのです。

さて、ボディパラはその後、3次関数、指数関数、対数関数といったいろいろな関数にも応用されましたが、今回は、満を持しての登場、三角不等式への挑戦です。

三角比の単元は、科目「数学I」では間違いなく最も理解が難しい単元であるといえるでしょう。

直角三角形の比を扱っていながら、あっという間に角度 90° を飛び越え、さらに、いつの間にか三角関数に姿を変え、そのグラフである波は、円関数の単振動に変わってしまいます。その急激な変化に理解が追いつかないことも難しい要因の一つといえます。

直角三角形の斜面を1進んだときの、水平方向、垂直方向の移動距離、そしてその傾きの値を角度に対する物理的な現象であると三角比を捉えれば少しはスムーズな繋がりが見えてくるのかもしれません。しかし、エジプト文明の頃の縄張り師から始まる測量の歴史を語りながら三角比の定義を拡張させていくことも数学の目標であり、長きに渡る歴史を端折り、その結果、飛躍してしまうことも短い学習時間の中ではやむを得ない面はあるのです。

だからこそ、ボディパラのように心に残る印象(心象風景)を育てることが必要になってきます。そこで視覚的なイメージを補う(イメクリ)だけでなく、今回は、触覚と聴覚もくすぐってみることにしました。手のひらを叩き、音が鳴ることが聴覚の刺激であり、音を鳴らすことが触覚の刺激です。腕を回して両手が重なる位置が、三角比(関数)の定義域および値域であり、手や体を叩くことが体に理解を叩きこむこととなります(くだらないオヤジギャクです)。また、三角比と単位円周上の関係も、「サインは刺す、コス(コサイン)は噛む、タン(タンジェント)は掴む」とアルファベットの先頭が同じ言葉で結ぶようにしてここからも聴覚を刺激することにしました。見る、触る、聞くの感覚により、感性から数学の理性を高めることができたとしたならば、これ以上、嬉しいことはありません。

なお、三角比をメイクることを本文では、ボディトラと命名していますが、まだまだいろいろな単元で体を興具とすることは可能であると考えています。例えば、複数の人間が恥じらいの気持ちを捨ててお互い体を使えばもっと複雑なアニメーションも演出できることでしょう。体(Body)を使って数学(Mathematics)をするということで、今後はボディマスと命名しようと思います。新たなボディマスを考案し、ちょっとの恥じらいと持って、あいのりしていきませんか? ※文中、ピースサインの由来について触れましたが、2本指を立てることは、国によってはタブーとなることもあります。手のひらを相手に向けた場合、ギリシアでは犯罪者として相手を侮辱することになります。手のひらを自分に向けた場合は、イギリスやオーストラリアでは性的に相手を侮辱することになります。チャーチルが平和をもたらしたと述べた2本指の意味するところについてはその真偽は分かりませんが、三角比と同様、Vサインも深く、重い歴史を背負っているのです。ところで、広島にある平和記念公園の中の記念碑には、「同じ過ちは繰り返しません」と記載されています。これは誰の過ちに対していつている言葉なのでしょう。敗戦国であるドイツにも同じような記念碑がありますが、そこに刻まれている言葉はとても強いものです。

「忘れるな(vergiss nicht der Schmerzen)」。毎年、数実研の夏期セミナーが終了してから訪れる8月6日。私たちは、誰かが犯した過ち、そして犠牲となった人々に対して、けっして忘れることなく、深い悲しみと決意を未来へ引き継いでいくべきなのでしょう。合掌 (2013.8.3)