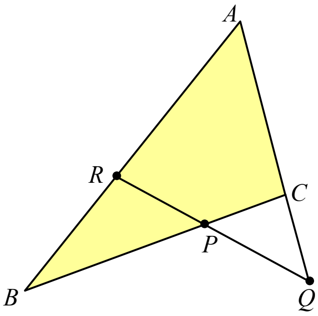
メネラウス・チェバの定理のちょっとした小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○メチェっていざ周遊の旅へでかけよう！



<アリス> メネラウスの定理は三角形の辺を直線で切るときの分点に成立する性質だけど、理屈は分かっていても使おうとするとどの三角形をどの直線で切るのかよく分からないですよね。

<まなぶ> 僕はそんなことあまり意識したことはないけどね。メネラウスの定理が使えるのは右のようなブーメラン型の図形だって分かっていればなんとなくできてしまうだろう。ヒョイヒョイとバランスよく点を移動していけばいい。先生は「メネる」といっていたっけ。

<かず子> ほとんど右脳しか機能していないまなぶがバランスよくなんてよく言えたものね。まあっ、確かにできるのは分かるんだけど。

<先　生> まなぶのように結果オーライ主義的な性格には都合のいい定理かもしれない。でも問題で要求している比をみると三角形と切る直線は自然に見えてくる。

<まなぶ> 生徒の純真な心に塩を塗りたくる２人のその性格、何とかならないのかな。結果よければよければすべてよしっていうのは努力あっての賜物だと思うけどな。でも問題から三角形と直線が分かるってどういうことですか。

<先　生> 例えば、 $AR:RB$ を求めるとしよう。その場合は、線分 AB の分点が R ということだ。たがら辺 AB を１辺とする三角形がもともとの三角形と考えればいい。

<アリス> 辺 AB を１辺とするから…、三角形 ABC ですね。そうか、そうすると直線上の点が R ということになるから、点 R を通る直線を探すと…、切る直線は、直線 PQ ですね。

<かず子> でも $AR:RB$ を調べるには $AB:BR$ でもいいじゃない。そういう問いになっているとやっぱり分からなくなってしまうと思うわ。

<よしお> その場合は、辺 AR の分点を B とみればいいと思う。辺 AR を１辺とする三角形 ARQ に対して、点 B を通る直線 PC で切ると考えればいいのでは。

<かず子> なるほど、確かに結果オーライですね。あれっ、でも、 $AR:RB$ を求めるということは、 $AR:AB$ の比でいいわけでしょ。。その場合は $RA:AB$ とみることになり、線分 RB を１辺とする三角形を点 A を通る直線で切るっとことですよね。 RB を辺とする三角形って何かしら。

<まなぶ> 例えば三角形 RBP とすると直線は CQ になる。だめだ、直線が三角形を切らない。三角形 RBQ とすると直線 CQ は三角形の頂点を通っているからこれもダメ。もう、これは絶対無理だよね。つまり先生の結果オーライは僕と違い見通しを持っていなかったということだ。

<先　生> まなぶと一緒にされるのは心外だな。諦めないでまなぶ流の直感法で「メネる」とどう点を移動できるかな。

<まなぶ> 先生も案外意固地ですね。まあ、付き合ってあげましょう。まず、 $RA:AB$ だから、 $R\to A\to B$ と進む。次に B から P にでも移動しようかな。だから、 $B\to C\to P$ 。そして最後に P から R に戻って終わりだから $B\to Q\to R$ 。一応は何となく「メネる」ことができたけどいいのかな。

<先　生> ではメネラウスの定理に当てはまるとどうなるかな。

<アリス> 何かすごく不安ですけどやってみます。

$$\frac{RA}{AB}\times\frac{BC}{CP}\times\frac{PQ}{QR}=1$$

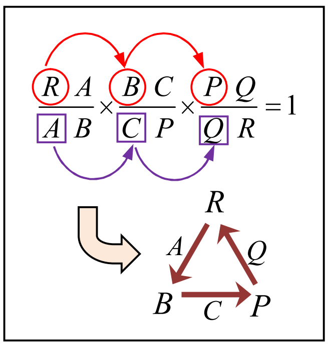
ということでしょうか。

<先　生> うん。いいね。アリスの不安な気持ちはまなぶの解答に対してではなくまなぶに対してのものだと思うから気にしなくていいんだよ。さて、結論をいうけど、この式は間違っていない。

<まなぶ> 先生、僕をダシにしてカウンセリングもどきをするの、やめてくれない。正しいことの説明をしてよ。。

<先　生> 問題文の比をみると、三角形と直線が分かるといったね。メネラウスの定理はその比をまとめた完成形だからその式に三角形と直線がきちんと整理されて示されているんだ。

　メネラウスの定理において３つの分子のそれぞれの線分の左端点を結ぶと三角形 RBP になる。次に３つの分母のそれぞれの線分の左端点 A,C,Q は同一直線上の点になっている。これが、三角形とその辺を切る直線の関係を表している。



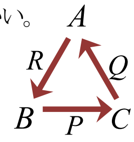
<まなぶ> 三角形 RBP を直線 CQ が切る……これは先ほど無理っていったケースで直線は辺を切ってないじゃないですか。

<よしお> まなぶ、分かった。これらの点はすべて外分点なんだ。直線は辺を延長したもので切っているということですね。

<かず子> そうか、メネラウスの定理は辺を切っていなくとも辺の延長上で切っていればいいんですね。

<先　生> その通り。メネラウスの定理は、辺の外分点の個数が奇数個(1 個または 3 個)で成立するんだ。これから、$AR:RB$ が与えられた場合は次のようにイメージしていけばいい。

$\boxed{AR:RB}$ ⇨ $\boxed{\text{三角形 } ABC \text{ を直線 } PQ \text{ で切る}}$ ⇨

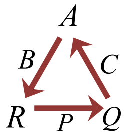


⇨ $\boxed{\dfrac{AR}{RB}\times\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}=1}$

では同様に、$AB:BR$ についてイメージを作ってごらん。

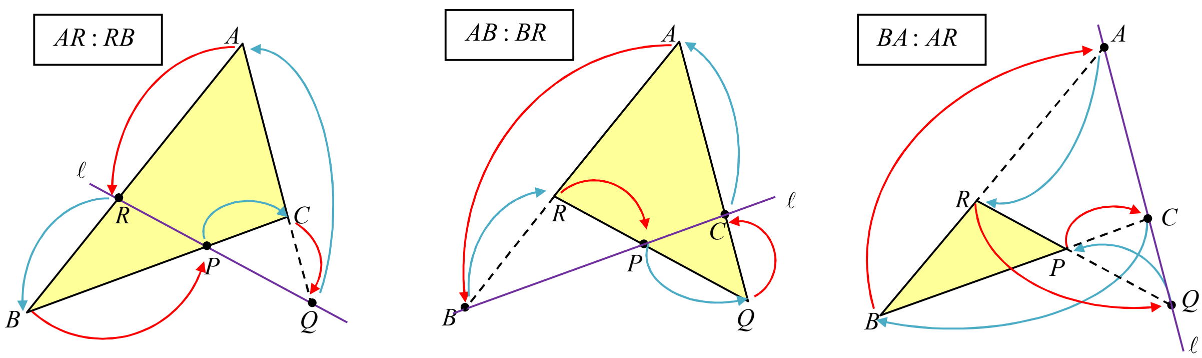
<アリス> やってみます。

$\boxed{AB:BR}$ ⇨ $\boxed{\text{三角形 } ARQ \text{ を直線 } PC \text{ で切る}}$ ⇨



⇨ $\boxed{\dfrac{AB}{BR}\times\dfrac{RP}{PQ}\times\dfrac{QC}{CA}=1}$

<先　生> それぞれの比で三角形をメネると次のようになる。



さて、これから「結果オーライ的まなぶ直感法」はこのイメージプロセスを逆に辿る安直な解法ということになる。メネラウスの定理の点の移動は次の手順で進めて「メネる」と対応する比例式が手順にしたがい浮かび上がってくる。

① 出発点と移動点を選ぶ。
② 出発点と移動点を結ぶ直線上の中継点を見つける。
③「出発点⇒中継点⇒移動点」の順に進む。
④ 移動点を出発点として同様に進める。
⑤ 最初の出発点に戻った時点で終了。

<かず子> この単純な思考手順がまなぶの右脳の中身ってわけですね。

<まなぶ> 単純じゃなく、効率的といって欲しいな。先生、質問があるんですが、僕の右脳は複雑を好むからつい経路を寄り道してしまうことがあるんです。それでも正しい比は求められていますよね。

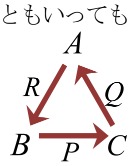
例えば、$A\to R\to B$ と進み、次は B から C の移動はやめて、$B\to C\to P$ として P に移る。次は、$P\to R\to Q$。そして最後に、$Q\to C\to A$。これでぐるっと「メネる」ことになる。これを式にすると、

$$\frac{AR}{RB}\times\frac{BC}{CP}\times\frac{PR}{RQ}\times\frac{QC}{CA}=1$$

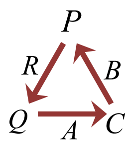
これは正しいと思うのだけど。

<先　生> うーん、なんか野生の本能ともいってもいい直感だな。確認してみよう。次の図を見てごらん。

$$\boxed{\frac{AR}{RB}}\times\frac{BC}{CP}\times\boxed{\frac{PR}{RQ}}\times\frac{QC}{CA}=1$$



$$\frac{AR}{RB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}=1$$



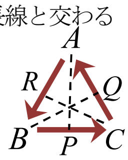
$$\frac{PR}{RQ}\times\frac{QA}{AC}\times\frac{CB}{BP}=1$$

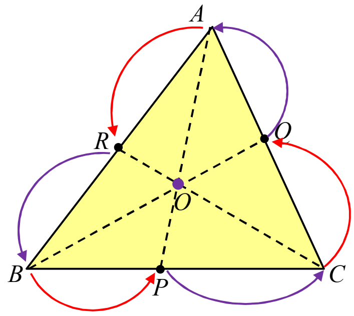
2 式を辺々掛けて

$$\boxed{\frac{AR}{RB}}\times\frac{BP}{\boxed{PC}}\times\frac{\boxed{CQ}}{QA}\times\boxed{\frac{PR}{RQ}}\times\frac{QA}{\boxed{AC}}\times\frac{\boxed{CB}}{BP}=1$$

分かるかな。一見寄り道をしているように見えるけど、2種類のメネ経路を重ねてコンパクトにしたと見ることもできるね。実は、どのように寄り道をしても最終的に出発点に戻ってしまえば、メネラウスの定理の複合形とし

て成立してしまうことが知られている。
<かず子> なんかまなぶの右脳と比較しちゃいけないような素晴らしい結論だわ。
<よしお> 先生、このように考えるとチェバの定理についてもメネラウスの定理の複合形と考えることはできるのではないでしょうか。
<まなぶ> チェバの定理って、例の「チェバる」ヤツだよな。ちなみに僕はチェバったことなんて一度もない。「メネる」と同じ手順で進めていっても比は求められているけどね。
<アリス> まなぶ、すごーい。それって、「ケータイを持ったサル」ってことですよね。
<まなぶ> おいおい、アリス、どこでその不適切な言葉を仕入れたんだい。後でじっくり話をしようか。だいたい、「チェバる」は、三角形の辺を点で切るということだろ。その意味、めちゃくちゃ分かりにくいでしょ。
<よしお> 平面上の点と三角形の頂点を結ぶ直線が、対辺またはその延長線と交わる点を分点とする性質のことだよね。定理の形としてはメネラウスよりずっと見やすいとは思うけどね。イメージ図を描くと、右図のようになりますね。



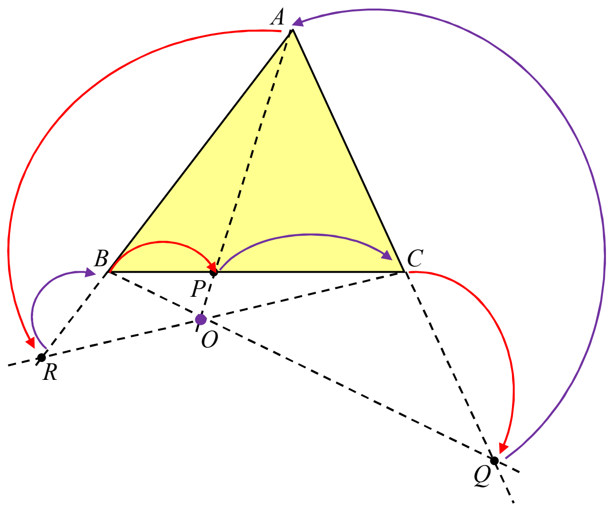


<まなぶ> でも分かり易いのは、点が三角形の内部にある場合だろ。

外部に点がある場合はやっぱり複雑だ。でも何となく点を移動するとこれも直感でできてしまう。だって図を見てみると分かるけど、ブーメランの形になっているだろ。だから、A から B へ行くのに点 R を経由して、$A \to R \to B$。次に点 B から始めて、$B \to P \to C$。そして最後に、$C \to Q \to R$ で完成。
この流れを式にすると、

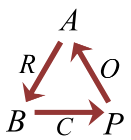
$$\frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} = 1$$

結局これをチェバの定理っていっているだけですよね。

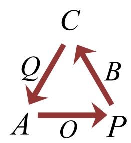


<先　生> メネラウスの定理のように三角形を直線で切っているわけでもなく、この式が成立する根拠はまったくない。それなのになんか説得力があることが悲しい、そしてさらに残念ながら確かに成立してしまう。まなぶ以外のみんなにはこのことを先ほどのメネるの複合形で示して納得してもらおうか。
挑戦してみよう。
<よしお> 僕が求めてみます。

$$\boxed{\frac{AR}{RB}} \times \frac{BP}{PC} \times \boxed{\frac{CQ}{QA}} = 1$$



$$\frac{AR}{RB} \times \frac{BC}{CP} \times \frac{PO}{OA} = 1$$



$$\frac{CQ}{QA} \times \frac{AO}{OP} \times \frac{PB}{BC} = 1$$

2 式を辺々掛けて

$$\boxed{\frac{AR}{RB}} \times \frac{BC}{\boxed{CP}} \times \frac{PO}{OA} \times \boxed{\frac{CQ}{QA}} \times \frac{AO}{OP} \times \frac{\boxed{PB}}{BC} = 1$$

<かず子> 確かにチェバの定理が導かれたわ。ということは、チェバの定理はメネラウスの定理を含んでいるってことだから、メネラウスの定理の亜種ってことになりますね。
<アリス> アシュっていうと、元々のものが変態したような感じで嫌な響きだわ。
<先　生> それは、まなぶから亜種をイメージするからで、亜種そのものに罪はない。むしろ素晴らしい性質だと思うよ。
<まなぶ> 先生、アリスのフォローができても僕のフォローになってないし。でもこれで僕の直感法が正しいと分かっただろう。「メネる」とか「チェバる」とかはどうでもいいわけで、ブーメラン型の図形は中継点に止まりながら辺を移動し、最初の点に戻ればいいだけってこと。だから例えば $BP : PC$ を求めたいときは、C の後は R を中継して O に移動し O から P を中継して A、最後に A から R を経由して B に戻る。すなわち、$\frac{BP}{PC} \times \frac{CR}{RO} \times \frac{OP}{PA} \times \frac{AR}{RB} = 1$。これでもいいってことになる。もう「メネる」「チェバる」はどうでもよく敢えていうなら「メチェる」ってことかな。
<先　生> まなぶの「結果オーライ学的直感法」では 三角形や直線、点を見つけてメネラウスやチェバの定理が成立するように当てはめなくても柔軟に経路を辿ることが可能になってしまう。
<よしお>　メネラウスとチェバを含んでいるまなぶ的直感法は、キメラ解法っていえるかもしれないですね。
<アリス> キメラって、1 つの個体に 2 つの遺伝子情報を持っている生命体のことですよね。なんか気持ち悪い。
<かず子> 私もそのネーミングは正しくないと思う。だってまなぶ的直感法なら、単細胞の解法ってことでしょ。
<先　生> 直感法は素晴らしい方法だよ。でも、まなぶと結びつけちゃ……。
<まなぶ> 先生、もういいよ。陥れるためのフォローしかしていないし。

あとがき

メネラウス・チェバの定理においては、$\dfrac{BP}{PC}$ は分数として扱うべきだろうか。

分数の概念は、リンド・パピルスにも記載されているが、横棒「−」を入れて分子と分母を表現する分数表記は 1202 年にイタリアのフィボナッチが始めたものである。その後、スイスのラースが 1659 年に分数を抽象化した割り算の記号「÷」を用いる。さらに、1684 年には、記号化の達人であったドイツのライプニッツが「÷」の横棒を取り「：」とし、割算と比のどちらでも表現できるようにし、いまでもヨーロッパでは「÷」を用いず「：」で割算を表す国もある。すなわち、

$$a:b=a\div b=\frac{a}{b}$$

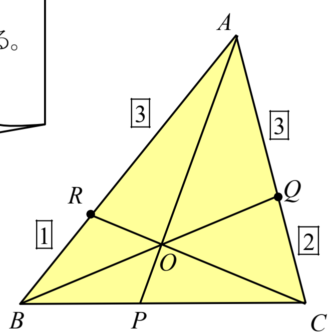
としてもいいのである。

メネラウス(Menelaus)は 1 世紀の頃のギリシアの数学者・天文学者であり、球面幾何学の著書に定理が記されている。この時代には実数の概念はまだなく、有理数を表す分数も比の値として捉えていた。だからメネラウスの定理は「比の値の積」とすべきなのである。メネラウスの定理を言葉で読むときは、「PC ぶんの BP 」ではなく「BP たい PC 」とした方が、三角形を巡るイメージがつかみ易いのではないだろうか。

本文では、チェバの定理はメネラウスの定理に含まれ、どちらもブーメラン型の図形で線分比をつないでいくことで処理できることを示している。チェバ(Ceva)は、17 世紀から 18 世紀にかけて活躍したイタリアの数学者であり、メネラウスの存在を知っていたかは定かではなくオリジナルの定理として著書に掲載している。メネラウスから1600年後のことである。確かにチェバの定理はメネラウスの定理の応用として導かれるが、「点で三角形を切る」という観点はメネラウスの時代には難しい概念であったかも知れない。

ところで小手技シリーズでは、本文の中で 1 つの問題の解法を起点として「小さな解法の手技」を生み出し、あとがきでその拡張を触れている。ただ今回に限って例題は本文では扱っていない。会話の流れからそのような構成になってしまっただけなのであるが、最後に例題で確認してみよう。

Ex）三角形 ABC おいて、
辺 AB を $3:1$ の比に内分する点を R 、辺 AC を $3:2$ の比に内分する点を Q とする。
線分 BQ と線分 CR の交点を O とし、直線 AO が辺 BC と交わる点を P とする。
(1) $BP:PC$ を求めよ。　(2) $CO:OR$ を求めよ。　(3) $AO:OP$ を求めよ。



解)

(1) 三角形 BCQ 、三角形 ABQ の順に点 B を出発点として反時計回りに「メネる」

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CA}{AQ}\times\frac{QO}{OB}\times\frac{BO}{OQ}\times\frac{QC}{CA}\times\frac{AR}{RB}=1 \quad \cdots(*)$$

これから、

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{5}{3}\times\frac{QO}{OB}\times\frac{BO}{OQ}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{1}=1 \text{ より、} \frac{BP}{PC}=\frac{1}{2} \qquad \text{以上より、} BP:PC=1:2$$

(2) 点 A を出発点として「メチェる」

$$\frac{AR}{RB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CO}{OR}\times\frac{RB}{BA}=1 \quad \cdots(**)$$

これから、

$$\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{CO}{OR}\times\frac{1}{4}=1 \quad \text{より、} \frac{CO}{OR}=\frac{8}{3} \qquad \text{以上より、} CO:OR=8:3$$

(3) 点 A を出発点として「メチェる」

$$\frac{AO}{OP}\times\frac{PB}{BC}\times\frac{CO}{OR}\times\frac{RB}{BA}=1 \quad \cdots\cdots(***)$$

これから、

$$\frac{AO}{OP}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}=1 \quad \text{より、} \frac{AO}{OP}=\frac{9}{2} \qquad \text{以上より、} AO:OP=9:2$$

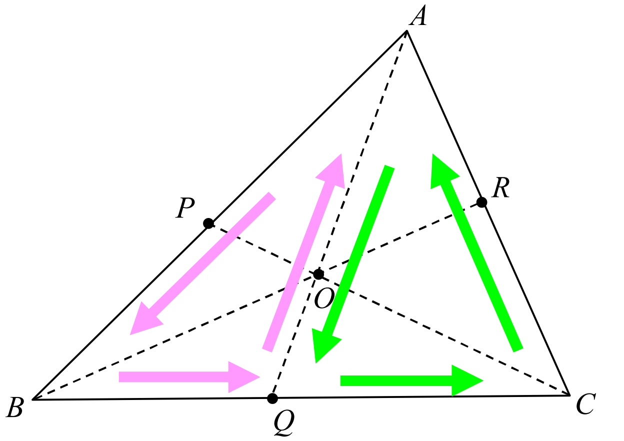
(1)の(*)はチェバの定理を表している。すなわちチェバの定理はメネラウスの定理を辺 BQ を重複して 2 度一巡したものであることが分かる。(2)の(**)は、三角形を巡ったものではない。点 B を出発点としてブーメラン型の図形を一巡したものであり、この場合もその積は 1 になる。だが式をよくみると、三角形 BCR において反時計回りにメネラウスの定理を用いただけである。(3)の(***)もまたブーメラン型の図形の変則的な移動である。もちろんこの場合は、三角形 ABP において点 A を出発点として時計回りにメネラウスの定理を用いれば簡単ではあるが。

ただこのようにオートマチックな操作に終始する解法は、どんな図形に対しても点を巡れば成立しているという誤った理解につながってしまう。やはり一巡したあとにメネラウス・チェバがどう用いられたか確認することが大事である。メネラウスやチェバの定理は、多角形さらには空間内の図形においても同様に成立する。そういった拡張は点の巡り方を正しく理解していないと得ることはできないのである。(これらについては、拙著「メネラウスで三角形を巡る」を参照されたい)。

メネラウスの定理により，メネり辺を相殺することで得られる性質

三角形でのチェバの定理

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1$$



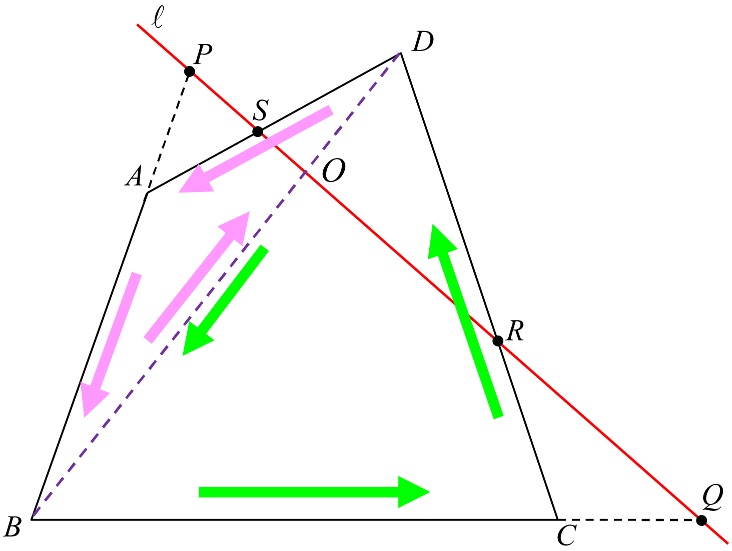
　メネラウスの定期で考えれば，
三角形 ABQ の頂点を，頂点 A を出発点にして，反時計回りにメネった後，三角形 AQC の頂点を頂点 A を出発点にして反時計回りにメネり，頂点 A に戻ると，最初の移動で通る辺 QA とその次の移動で通る辺 AQ が相殺されることになり，チェバの定理が得られる。

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BC}{CQ}\times\boxed{\frac{QO}{OA}\times\frac{AO}{OQ}}\times\frac{QB}{BC}\times\frac{CR}{RA}=1$$

相殺される

凸四角形でのメネラウスの定理

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}=1$$



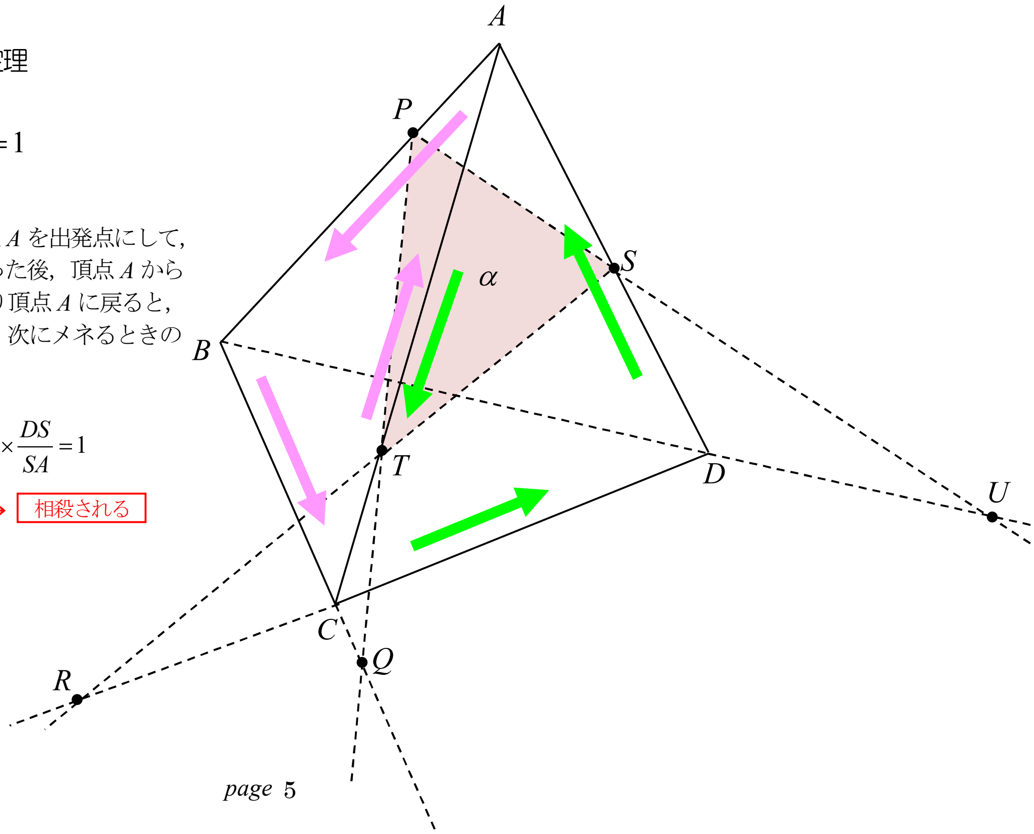
　三角形 DAB を反時計回りにメネった後，
三角形 DBC を反時計回りにメネると，
四角形 $ABCD$ の対角線 BD は，最初にメネるときの辺 BD と次にメネるときの辺 DB が相殺される。

$$\frac{DS}{SA}\times\frac{AP}{PB}\times\boxed{\frac{BO}{OD}\times\frac{DO}{OB}}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}=1$$

相殺される

四面体でのメネラウスの定理

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}=1$$



四面体 $ABCD$ の頂点を，頂点 A を出発点にして，三角形 ABC を含む面でメネった後，頂点 A から三角形 ACD を含む面でメネり頂点 A に戻ると，最初にメネるときの辺 CA と，次にメネるときの辺 AC が相殺される。

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\boxed{\frac{CT}{TA}\times\frac{AT}{TC}}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}=1$$

相殺される