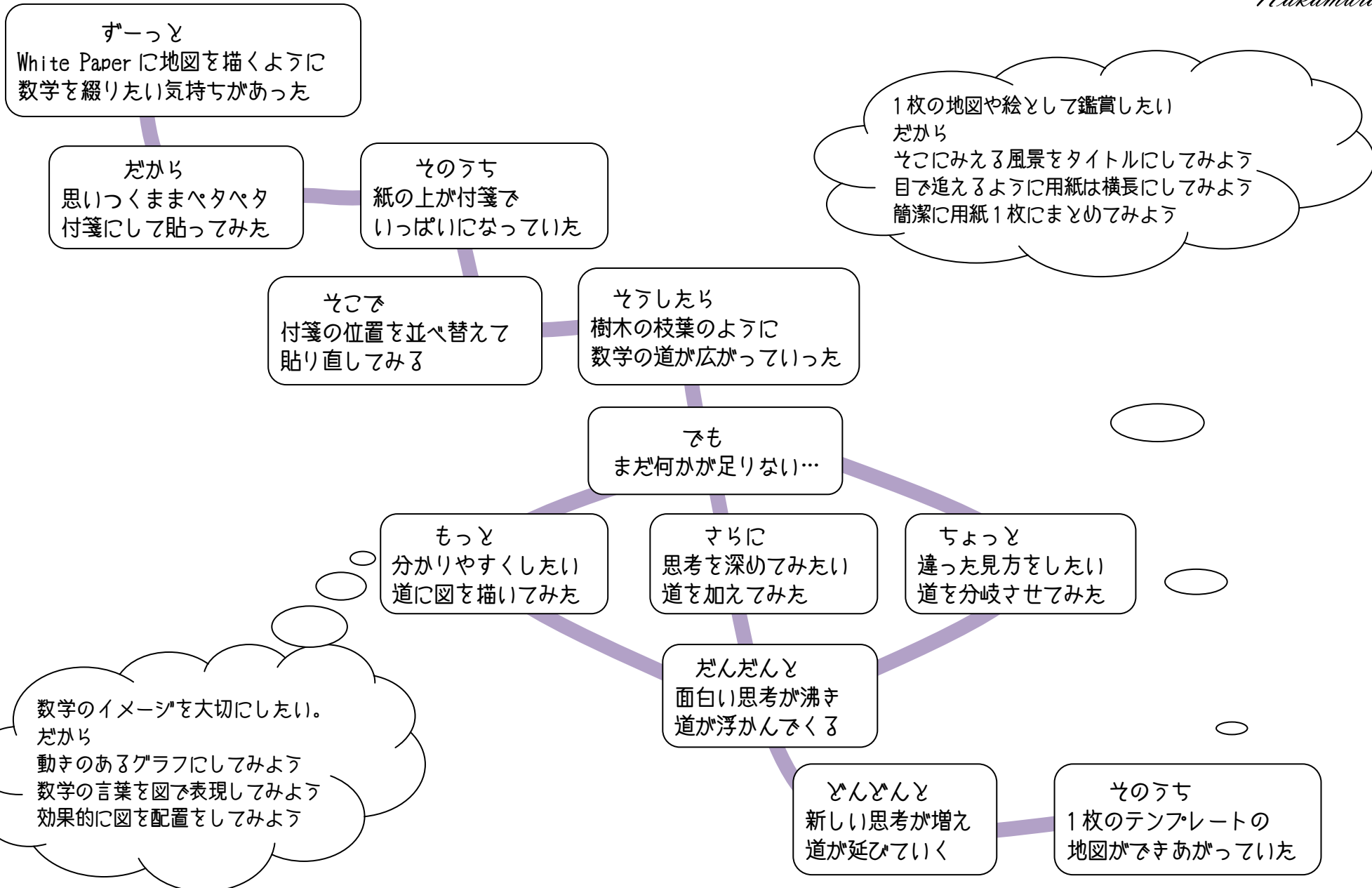


# Math Template

完成した地図や絵に  
サインをしよう

Fuminori  
Nakamura



# 数の道

## 自然数(N)

原始時代より、人には指折り数え、「たくさん」略奪する和の概念は、あった。

やがて集落が生まれ、奪うことだけでなく与えることの必要性を人は知り負の概念が生まれる。しかし、負数が用いられるようになったのは6世紀のインドであり、その後、15世紀になってやっと欧州に広まる。

国が作られ、人口が増えることで、大きな数を処理するために乗法の計算が導入される。整数までの数は、加減乗について閉じている。

社会が形成され、交易が始まると、得た利益の分配をしなければならない。四則演算の除法がここで生まれる。

1857年、ヘンリー・リンド(スコットランド)は、エジプトのナイル湖畔のルクソールという村で、B.C1700年頃のアームスのパピルスを見発する。後にリンド・パピルスといわれるこの書物は、世界最古の数学のパズル本であり、1次方程式・不定方程式の解法が触れられており、その解は有理数の範囲で求められる。しかし、2次方程式の解は、有理数範囲では求めることができないものもある。

ピタゴラスはB.C500年頃のギリシアの数学者であり、ピタゴラス学派という教団を作る。学派は「万物は数である」ことを教義とし、すべての数は細かい粒子が結びついて構成されていると考えた。「三平方の定理」は学派が発見した有名な定理であるが、その斜辺の長さは有理数で与えられないものもある。このことは学派の教義を否定することになるため、上層部は「秘密にせよ(アロゴン)」と固く口止めをし、門外秘とし、その事実を漏らしたものは暗殺されたという。しかし皮肉にも学派のシンボルであるある五芒星形にも黄金比という無理数は潜んでおり、やがて、この学派は市民により追放されるのである。

16世紀、イタリアの数学者カルダノは3次方程式の一般解を求めようとする過程で、「平方すると負になる数」が必要であることに気づく。17世紀になって、直交座標を考案したデカルトは、このような実在しない数を虚数とよぶ。1831年、ガウスは実数全体が数直線上に配置できるならば、その上にこの実在しない数を配置することで、虚数の存在を示した。  
実数に虚数を合わせた複素数を用いることで、流体力学の基本概念が説明でき、人類は空そして宇宙への一歩を踏み出すのである。

## 0(零)

0はその形から悪魔を呼び出す魔法陣の出入口に似ており、呪術的な数と見られた。また、どんな数とも積が0になる不合理な数でもあり、疎んじられ広まることはなかった。欧州では、2階1階の下は地下1階であり、0階が抜け0階を地上階ということもある、その名残がある。

0はどこから来たの

①ギリシア文明の頃(B.C500年)に0の概念が芽生える。130年、プロレマイオスは空位の0を60進法の表記で使用。

エジプト文明(B.C3000～)では0は普及しなかった。

③イスラム帝国8世紀の頃、アラビアに0が伝わりアラビア数学が発展する

④1000年頃、十字軍・スペイン人により、欧州に0が数として戻る。

明王朝(14～17世紀)に零が0として用いられる。

幕末から明治(17世紀)にかけて、オランダより伝わる。

マヤ文明(B.C300)では20進法の位取りとして、0が用いられる。

## 負の自然数

## 整数(Z)

### 有限小数

### 循環する無限小数

## 分数

循環しない無限小数って？

## 有理数(Q)

## 無理数

実数全体は、数直線上に配置することができる。無理数は、その長さは目で見ることができないが、正確な値は小数では表現できない。

コンパスを回せば無理数がみえる!!

## 実数(R)

1辺の長さが1である正方形の斜辺の長さ  
 $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

無理数は、2次方程式の解として得られる。有理数を係数とする高次方程式の解を代数的数というが、無理数の中にはこのような方程式からは求められない不思議な数もある。その代表的なものとして、円周率 $\pi$ や、ネイピア数 $e$ といったものが知られており、これらの数を超越数という。

## 虚数

$i^2 = -1$  ということは  
 $i = \pm\sqrt{-1}$  変は負数を含む

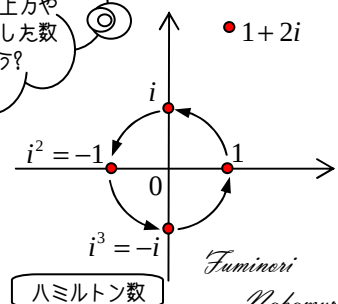
## 複素数(C)

そして、神は降臨し、円周率 $\pi$ を人間に与えた。

複素数は、ロケットを宇宙に飛ばせるのだ。

1843年、ハミルトン(アイルランド)は複素数を拡張した四元数を考案する。四元数は、4次元内で視覚化することができる。この数の概念はコンピュータの3DグラフィックスなどITの先端技術に利用されている。そして、八元数が考案され、数の道はさらに延びていく。

### ガウス平面



## 四元数

### ケーリー数

## 八元数

# 完全平方式の旅

項数を増やす

$$a^2 + b^2 + 2ab =$$

$$(a + b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

次数を増やす

2 乗して 2 数を掛けて 2 倍

数学は形式美を重んじる。  
 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow \dots$   
 のような文字の並びの式を  
 「輪環式」という。

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

3 次

4 次

3 項

$$(a + b + c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

a  
 c ← b

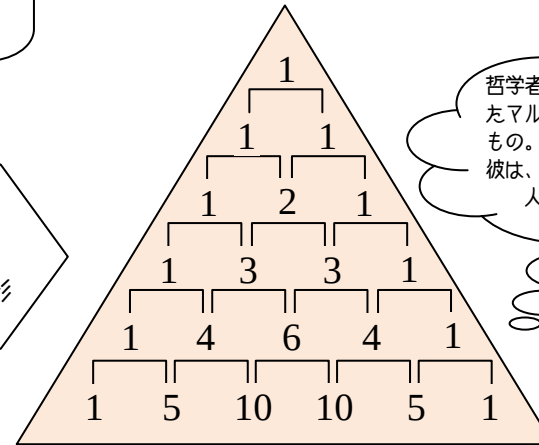
4 項

$$(a + b + c + d)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

2 数の積は、  
 a を含むものを考え、次に a を含まない b を含むものというように求めていく。

a は降べきの順、  
 b は昇べきの順  
 各項の係数は、  
 パスカルの三角形で得られる。



哲学者・数学者・物理学者・神学者といったマルチ学者であったパスカルが考案したもの。  
 彼は、つぎの有名な言葉を残している。  
 人間は考える葦である(パンセ)

Fuminori  
 Nakamura

無理数などの計算はこの方法を用いるとスムーズな計算ができる。

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (5 + 3) - 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{15}$$

これを展開とみると、因数分解は 2 重根号を外すことを意味する。

$$\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \text{和 } p、\text{積 } q \text{ である 2 数 } a, b (a > b)$$

$$= \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \text{ (複号同順)}$$

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = (\text{和 } 8, \text{積 } 15 \Rightarrow 5, 3) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

式の中の 2 文字・3 文字を相互に入れ替えても元の式と変わらないような式を対称式という。対称式は基本対称式で表すことができる。

2 文字の基本対称式  $a + b, ab$

3 文字の基本対称式  $a + b + c, ab + bc + ca, abc$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

2 次式から、完全平方式を作り出す操作を「平方完成」という。平方完成は、2 次関数の概形を調べるために用いられる。

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$$

$$2a = p \text{ とおく、}$$

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

半分

引く

2 乗

# グラフの装い

グラフは幽霊のようなもの  
憑依しなければ、実体化はできない

関数には次の3つの表現法がある。

○陽関数  $\Rightarrow y = f(x)$  ex)  $y = 2x + 3$

○陰関数  $\Rightarrow f(x, y) = 0$  ex)  $2x - y + 3 = 0$

○関数の媒介変数(parameter)表示

$$\Rightarrow x = f(t), y = g(t) \text{ ex) } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$$

関数の関係を示す点  $(x, y)$  を平面上に打っても、雪の上の足跡が残るだけ。

雪の上を歩いた体を探さなければならない。

$f(x, y) = 0$  を元の体にしたのであれば、点  $(x, y)$  を、

$x$  軸の正の向きに  $-p$ 、 $y$  軸方向に  $-q$

平行移動した点  $(x-p, y-q)$  が  $f(x, y) = 0$  上にあることから、これに代入する。

頂点  $(p, q)$  である放物線を、頂点  $(0, 0)$  の

放物線の基本形  $y = ax^2$  に戻すと、

$x$  軸の方向に  $-p$ 、 $y$  軸の方向に  $-q$

移動するから、 $y = a(x-p)^2 + q$

Following Me?

$x$  軸方向に  $-p$

$(x, y)$

$y$  軸方向に  $-q$

もとの憑依  
する関数

ボクはここに  
いるよ!!!

$f(x-p, y-q) = 0$

グラフ上の点  $(x, y)$  に  
対し、憑依するグラフ  
 $f(x, y) = 0$  上の点を  
 $(s, t)$  とすると、

$f(s, t) = 0$

が成り立つ。このとき、  
平行移動は、

$p + s = x, q + t = y$   
点  $(a, b)$  の対称移動は

$$\frac{x+s}{2} = a, \frac{y+t}{2} = b$$

の関係が成立する。

点  $(a, b)$  に関する対称移動

①  $(a, b)$  が原点になるように平行移動

$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$

② 原点に関して対称移動

$(x+a, y+b) \rightarrow (-x+a, -y+b)$

③ 原点が  $(a, b)$  になるように平行移動

$(-x+a, -y+b) \rightarrow (2a-x, 2b-y)$

$x$  座標の値の向きを変える

$f(-x, y) = 0$

このハートは、方程式  
 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}|x|\right)^2 = 1$   
で描かれます。

○  $x$  軸に関する対称移動

$\Rightarrow y$  を  $-y$  に変える

○  $y$  軸に関する対称移動

$\Rightarrow x$  を  $-x$  に変える。

○ 原点に関する対称移動

$\Rightarrow x$  を  $-x$ 、 $y$  を  $-y$

に変える。

$x$  座標及び  $y$  座標の  
値の向きを変える

$f(-x, -y) = 0$

$(x, y)$

$y$  座標の値の向きを変える

$(x, y)$

$f(x, -y) = 0$

$f(x, y) = 0$

$(x, y)$

$f(2a-x, 2b-y) = 0$

Fuminori  
Nakamura

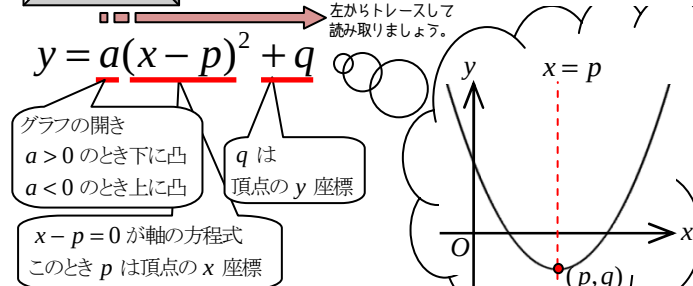




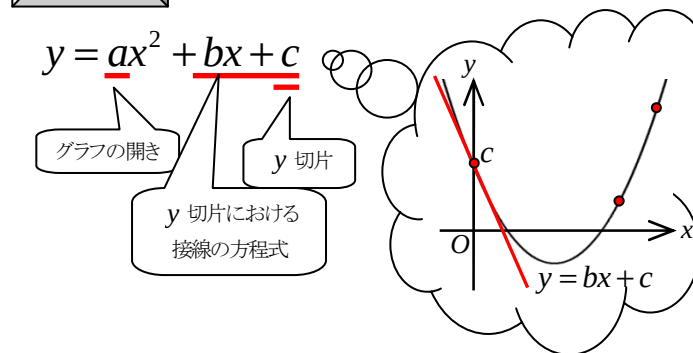
# 放物線の姿態

放物線には3つの顔がある。顔(式)は三者三様。だけど、どんなに着飾っても体型(グラフの開き)は変わらない!!

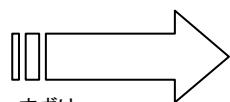
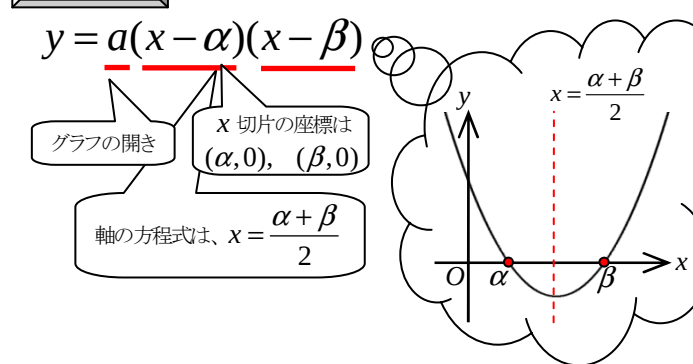
**標準形** …あなたは素直。すべてがみえてしまう。



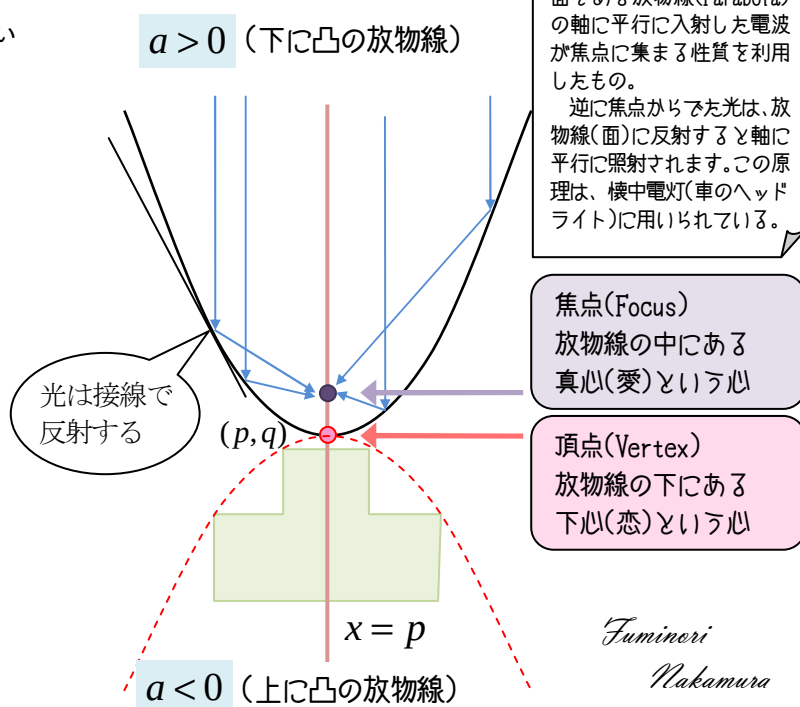
**一般形** …あなたは綺麗。でも親しみにくい。



**切片形** …あなたは個性的。惹かれてしまいそう。



①放物線には2つの心がある?!



②放物線の決定

与えられた条件(性質)を満たす放物線の方程式を求める。  
 一番 fit する放物線の姿を image してみよう。

放物線固有の性質をもっとも有するのは標準形。したがって Key-Word が

(A) 軸・頂点 ⇒ 標準形  
 であるとき用いる。

得体のしれない一般形は、固有の性質だけから求めることは難しい。

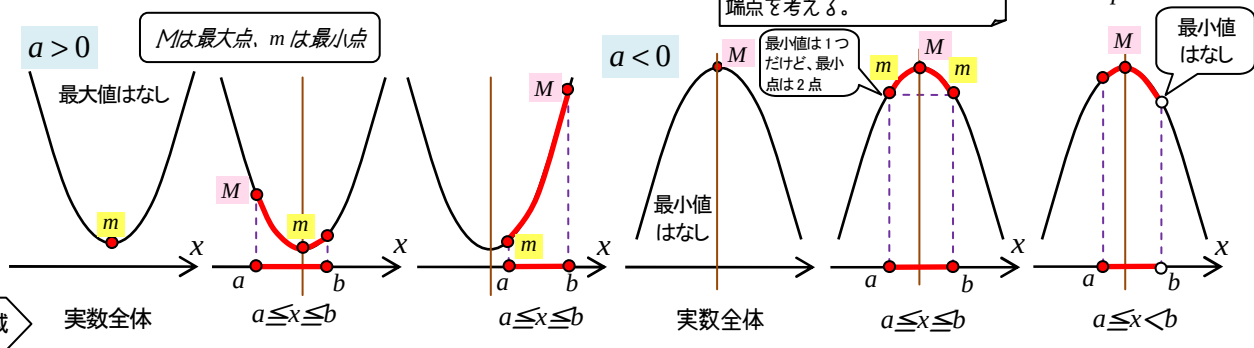
(B) 2点~3点 ⇒ 一般形  
 であるとき用いる。

個性的な切片形は、利用も限定される。放物線が  $x$  軸と交わっていれば、

(C)  $x$  軸との交点 ⇒ 切片形  
 であるとき用いる。

③放物線のグラフの最大・最小

放物線は「頂点・右端点・左端点のいずれかで最大・最小となる。」



# 2 次方程式の解の配置ルール ～学名「てんじくちょう」という放物線の捕まえ方

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a > 0) \quad \xrightarrow{\text{グラフ化}} \quad \begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c & (\text{放物線}) \\ y = 0 & (x \text{ 軸}) \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{標準形(種類)}} \quad f(x) = a(x - p)^2 + q$$

## てんじくちょうの捕獲手順

チョウの2本の足が $\alpha$ より大きい木の枝の位置にある場合

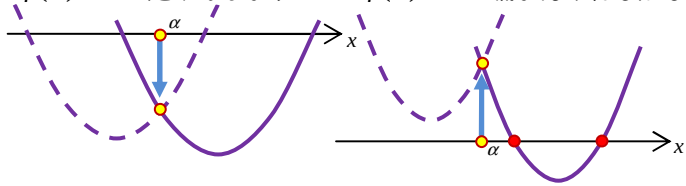


点

点(Point)で、チョウを追い込め

条件で与えられる点の周りしか動けないように  
放物線(チョウ)を追い込む

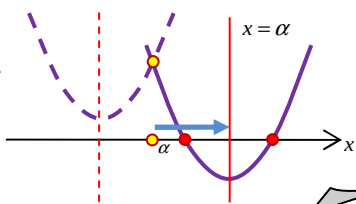
$f(\alpha) < 0 \Rightarrow$  逃げてしまう  $f(\alpha) > 0 \Rightarrow$  捕まえられかも



軸

軸(Axis)で、左右の動きを封じろ

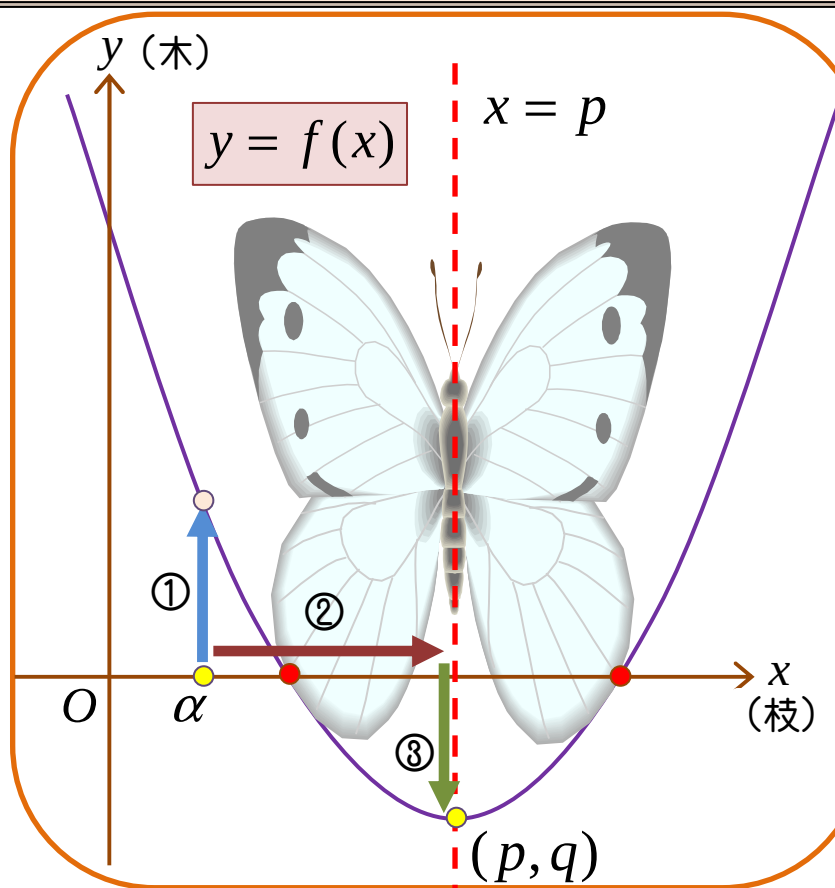
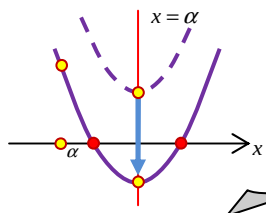
左右の移動を決定する  
軸の位置の範囲を決めて、  
チョウを追い詰める



頂

頂点(Vertex)で、上下の動きを封じろ

上下の移動を決定する  
頂点の位置を上から押し下げ、  
空に逃げないようにして、  
チョウを捕まえる



開きが $a$  (下に凸)、  
軸 $x=p$  頂点 $(p, q)$   
である放物線

てんじくちょう!!  
と唱えて  
蝶々を捕まえよう

プロは一般形から、  
軸は $x = -\frac{b}{2a}$   
 $x$  軸と交わることは  
判別式 $D \geq 0$   
として捕獲する。

てんじく蝶の標本見本

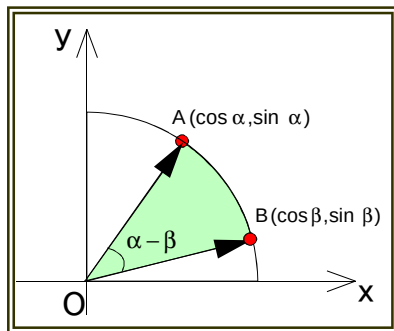
$(\alpha < \beta < \gamma)$

| Case | 解の配置                                       | てん                                           | じく                   | ちょう                           |
|------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| A    | $\alpha$ より大                               | $f(\alpha) > 0$                              | $\alpha < p$         | $q \leq 0$                    |
| B    | $\alpha$ より小、 $\alpha$ より大                 | $f(\alpha) < 0$                              | 任意                   | $q \leq f(\alpha) < 0$ より必要なし |
| C    | $\alpha$ と $\beta$ の間                      | $f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0$                | $\alpha < p < \beta$ | $q \leq 0$                    |
| D    | $\alpha$ と $\beta$ 、 $\beta$ と $\gamma$ の間 | $f(\alpha) > 0, f(\beta) < 0, f(\gamma) > 0$ | 必要なし                 | $q \leq f(\beta) < 0$ より必要なし  |

# 加法定理と仲間たち

【加法定理はベクトルの内積】

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) \\ = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



【合成の公式】

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

なんて公式はいらぬ  
 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$   
 でよい。

Fuminori  
Nakamura

【加法定理】

$$\begin{aligned} ① \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ ② \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ ③ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

$\beta = \alpha$   
とおく

【2倍角の公式】

$$\begin{aligned} ① \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ ② \\ ③ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

$2\alpha = \theta$

【半角の公式】

$$\begin{aligned} ① \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ ② \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ ③ \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

合成は加法定理の逆演算  
 加法定理が展開なら  
 合成は因数分解

左辺の2乗に  
 注意

加法定理①, ②の和・差

【積和の公式】

$$\begin{aligned} ① 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ ② 2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ ③ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ ④ 2 \sin \alpha \sin \beta &= -\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\} \end{aligned}$$

$\alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B$

【和積の公式】

$$\begin{aligned} ① \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ ② \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ ③ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ ④ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

作るな！覚えろ！

咲いたわ(+)咲いた 庭に(2)咲いたコスモス  
 咲かない(-)咲かない 庭にコスモス咲かない  
 心と心が結ばれて 2人は恋焦がれ  
 心と心が離れて (身)引いて 2人はさよならさよなら

【3倍角の公式】

$$\begin{aligned} ① \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ ② \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

2倍角の公式と

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

を使うと

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ とすると}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

三角方程式・不等式を  $t$   
 の高次方程式・不等式に  
 変換します

ミシン引く吉田さん(なんのこっちゃ)  
 サンシャイン 風邪引いて夜風が身にしみる  
 というのもある



# 関数値の存在定理のグラフ上の視点

連続(continuous)は、曲線がつながっている(Link)  
微分可能(differentiable)は、曲線がなめらか(Smooth)

最大値・最小値の原理  
(Weierstrass)

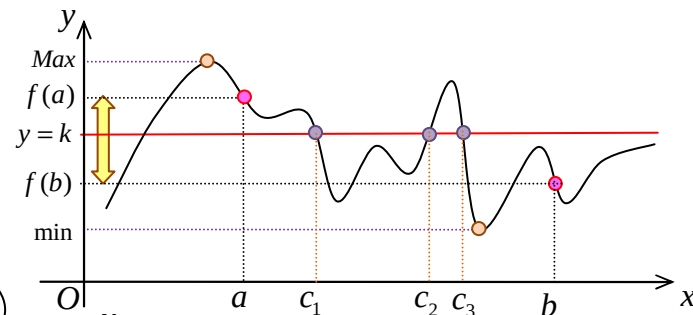
$[a, b]$  で連続な関数は、  
その区間で最大値および最小値をもつ。

人生は山あり谷あり。  
一番辛かったことや楽し  
かったことは必ずある。  
そんな当たり前のことから  
すべてが始まる。

中間値の定理

$f(x)$  が  $[a, b]$  で連続で、 $f(a) \neq f(b)$  のとき、  
 $f(a)$  と  $f(b)$  の間の値  $k$  に対して、  
 $f(c) = k \quad (a < c < b)$   
となる値が少なくとも1つ存在する。

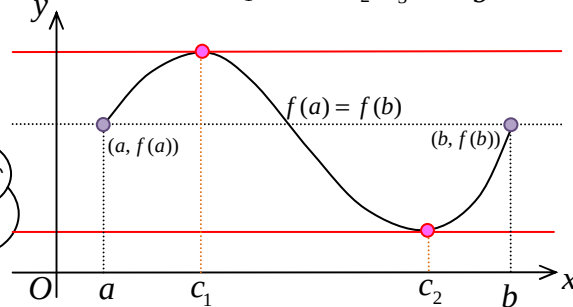
最小値  $m$ 、最大値  $M$  のときは、  
 $m$  と  $M$  の間の  $k$  に対して存在  
 $f(a)f(b) < 0$  のときは、  
 $f(c) = 0$  となる値が存在



Rolle の定理

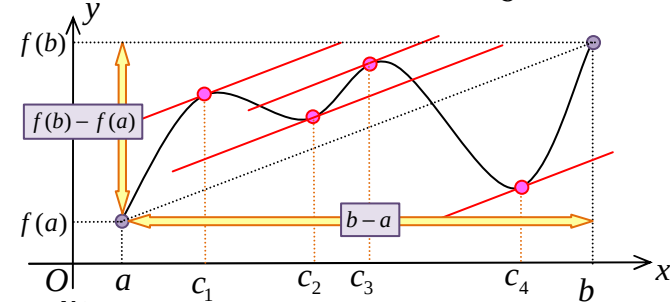
関数  $f(x)$  が  $[a, b]$  で連続で、 $(a, b)$  で微分可能であって、  
 $f(a) = f(b)$   
ならば、 $f'(c) = 0, \quad a < c < b$   
を満たす実数  $c$  が存在する。

水平方向に平行に視線を移すと、  
局所的(部分的)に、  
一番高い点(極大点)、  
一番低い点(極小点)  
が必ず存在する。



平均値の定理  
(Lagrange)

関数  $f(x)$  が  $[a, b]$  で連続で、 $(a, b)$  で微分可能であるならば、  
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad a < c < b$$
  
を満たす実数  $c$  が存在する。

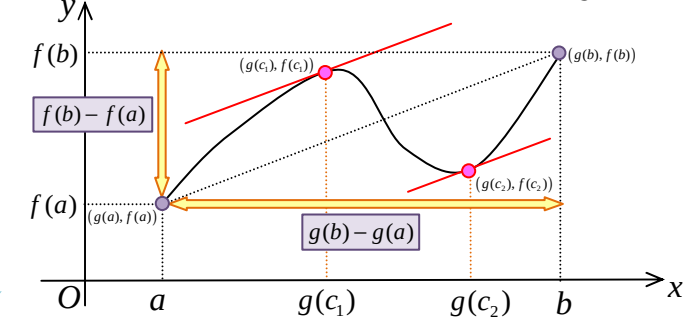


Cauchy の定理

関数  $f(x), g(x)$  が  $[a, b]$  で連続で、 $(a, b)$  で微分可能で、  
かつこの区間でつねに  $g'(x) \neq 0$  であるならば  
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a < c < b$$
  
を満たす実数  $c$  が存在する。

$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow y = h(x)$   
と parameter 表示

$h = b - a, \quad \theta = \frac{c - a}{b - a}$  とおくと、  
 $0 < \theta < 1 \quad (a < c < b)$



L' Hospital の定理

関数  $f(x), g(x)$  が、 $x = a$  および  
それに十分に近い  $x$  について微分可能で、  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  とするとき、  
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$f(x), g(x)$  は  $x = a$  で連続より、  
 $f(a) = g(a) = 0$   
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$$
  
$$= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

関数  $f(x)$  が  $[a, a+h]$  で連続で、 $(a, a+h)$  で微分可能であるならば、  
 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad 0 < \theta < 1$   
を満たす実数  $\theta$  が存在する。