微分係数の定義の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○微分係数でロピタルもどき

<アリス> 微分係数の定義は教科書では2つ用意されてますねよ。どっちが主流なのかしら。
<かず子> 次の2つのことね。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \cdots(\mathrm{a})$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \cdots(\mathrm{b})$$

(a)はなんとなく平均速度から瞬間的な速度を求めていて，(b)の式は直線の傾きから接線の傾きを求めているような印象かな。(a)はニュートン，(b)はライプニッツ的ということかしら。
<よしお> (a)は平均変化率に対して変化率というから，微分係数として考えれば(b)かな。
<まなぶ> でも，「定義にしたがって」導関数を求める場合は，(a)の a を x に変えてから次の式を用いている。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

そう，考えると(a)を定義とした方が自然のようにも思えるけど。
<先　生> 面白い話題だね。それでは今日は，微分係数の定義に関する問題を考えてみようか。

Ex1）　次の極限値を求めよ。

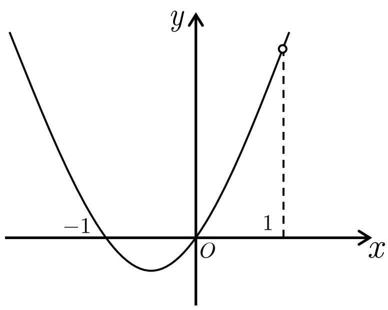
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}$　　　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

<かず子> よくある極限値の問題ですね。(1)を解きます。分母・分子の x を単純に限りなく1に近づけると0になってしまい不定形になってしまう。だからまず式変形をして，

$$\frac{x^3-x}{x-1}=\frac{x(x+1)(x-1)}{x-1}=x(x+1)$$

これから，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2$$



<アリス> 確かこの問題は次のような説明だったのを覚えている。

関数 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$ のグラフは，放物線 $g(x)=x(x+1)$ のグラフの中で，点 $(1,2)$ のところだけ穴が空いている。でも極限値は同じになる。
<よしお> 極限値を求められるように空いている穴をふさいだともいってました。
<まなぶ> でも，この問題と今日の本題はどういう関係があるのかな。
教科書ではこういった極限の演習をしたあとで，微分係数の定義をしたのでは。
<先　生> そうだったね。では，そのことを考えるために，ちょっと解答に細工をしてみよう。

$f(x)=x^3-x$ とおいて，(1)の問題を書き直すとどうなる。

<アリス> $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ です。
<まなぶ> アリス，それで終わっちゃうと，設問の意図の理解の前に，先生の根深い性格を理解していないことになる。
絶対にもうひとひねりある。
<先　生> 先生の性格から質問の内容を推し量るのはどうかなと思うけど，確かにこの場合は定義の式と比較してもう少し考えてみよう。
<アリス> 定義ですか…,。$a=1$ とすると(b)の定義のようになるけど $f(1)$ がありません。$f(1)$ がないということは…,
あっ，ひょっとしたら $f(1)$ は0になるのでは。やってみます。

$$f(1)=1^3-1=0$$

予想通りです。(1)は $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ になるのですね。

<まなぶ> どうだい，質問を理解したかったら，先生を理解すればいいというのがポイントだ。もし先生の性格を詳しく知りたかったら授業のあとにじっくり教えてあげるよ。

<かず子> だめだよ，それだと何にも理解できたことにならないから。でも，これから，(1)の極限値は，$f'(1)$ になるということが分かったわ。ここで，$f'(x)=3x^2-1$ だから，$f'(1)=2$

極限をとらないで，極限が求められるのね。

<よしお> (2)も同じように考えるてやってみます。

$f(x)=x^3-3x-2$ とおくと，$f(2)=0$ だから，

$$(\text{与式})=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+1)}=f'(2)\times\frac{1}{3}$$

$f'(x)=3x^2-3$ より $f'(2)=9$

極限値は，$\dfrac{1}{3}f'(2)=3$

<まなぶ> あれ，でもこれだと本末転倒のような気がする。

<先　生> 確かに極限と微分の定義の順番は逆になっているけど矛盾しているわけではない。

<よしお> 微分の定義のあとに，改めてそれを利用して極限を考えということですね。

<先　生> では，次の問題はどうなる。

Ex2) 次の極限値を a , $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(h)}{h}$

<かず子> (1)は変形が少し面倒な問題でしたよね。

$$\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}=\frac{f(a)\{x^2-a^2\}-a^2\{f(x)-f(a)\}}{x^2-a^2}$$
$$=f(a)-\frac{a^2}{x+a}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

これから極限値を求めると，

$$(\text{与式})=\lim_{x\to a}\left(f(a)-\frac{a^2}{x+a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=f(a)-\frac{a^2}{2a}\cdot f'(a)=f(a)-\frac{af'(a)}{2}$$

<まなぶ> これを，先ほどの方法で解いてみようということか。

$g(x)=x^2f(a)-a^2f(x)$ とおいてみると，

$g(a)=a^2f(a)-a^2f(a)=0$

ということは，

$$(\text{与式})=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x+a}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{1}{2a}g'(a)$$

ここで，$g'(x)=2f(a)x-a^2f'(x)$ だから $g'(a)=2af(a)-a^2f'(a)$

極限値が求められている。うーん，簡単だけど，何か妙な気分。

<アリス> (2)はどうなるのでしょう。

この場合は，$h\to0$ だから変数は h とみるのですね。だから，

$g(h)=f(a+3h)-f(a)$ とおくと，$g(0)=f(a)-f(a)=0$

$$(\text{与式})=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=g'(0)$$

あれ，でも $g'(h)$ が求められない。

<かず子> h の関数というのもなんか違和感あるから，

$x=a+3h$ とすればいいかも。そうすると，$h\to0$ のとき，$x=a+3h\to a$ となるから，

$g(x)=f(x)-f(a)$ とおけて，$g(a)=0$

ここで，　$h=\dfrac{x-a}{3}$　だから，

(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=3g'(a)$

$g'(x)=f'(x)$ より，$g'(a)=f'(a)$

以上より，極限値は$3f'(a)$

<まなぶ> でもそれだったら，最初から(a)の定義を使って，$h\to 0$　のとき，$3h\to 0$　これから，

(与式)$=\displaystyle\lim_{3h\to 0}3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=3f'(a)$

こちらの方がまっとうな方法だと思うな。

<かず子> まなぶから「まっとうな」という言葉がでるとは思わなかったわ。

<アリス> 「まっとう」って「まっとうな生き方」のように使う言葉ですよね。「適当な生き方」ではないということですね。

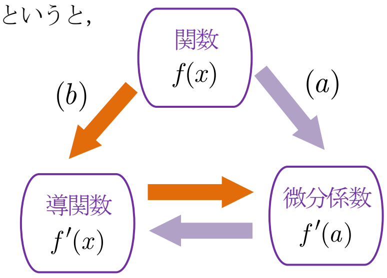
<まなぶ> たとえがよくないよ，アリス。

<先　生> まあ，確かに(2)は(a)の定義から導いた方が楽だね。そこで(a),(b)の定義をもう一度みてみよう。
この2つの式は，同じものだということは知っているね。(a)のh はx の増分を表していて，
$h=x-a$ とおくと，$h\to 0$　のとき，$x\longrightarrow a$　となり，これから(b)が得られる。
逆を辿れば(b)から(a)への変形ができる。では，なぜ2種類の定義があるかというと，利用する場面の違いと考えればいい。

(a)では，変数はh であり，h を0に近づけることで微分係数を定義し，さらにa を変数とみて，導関数が定義される。

(b)は，式の中に$f(x)$ はすでにあるわけだから，どちらかというと，導関数を求めて微分係数を計算していると考えられる。

だから，単純に微分係数を計算するときは(a)だけど，関数の極限を求める場合は，(b)の方が使いやすくなる。応用問題では(b)の考え方が威力を発揮することが多い。



では，最後に次の問題で確認してみようか。

> Ex3) 次の式が成立するとき，定数a ,b の値を求めよ。
>
> (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{3x^5+ax^3+bx^2+2}{x^2-1}=-2$

まず，(1)を通常の方法で解いてごらん。

<よしお> $g(x)=x^2+ax+b$　とおきます。そうすると，

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}\cdot(x-2)=1\times 0=0$$

$g(x)$ は2次の整式ですから，$\displaystyle\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)=4+2a+b$

$\therefore$　$2a+b+4=0$　より，$b=-2a-4$　…①

これを用いて，$g(x)$ を因数分解し，穴をふさぎます。

$$g(x)=x^2+ax-2a-4=(x^2-4)+a(x-2)=(x-2)(x+2+a)$$

(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2+a)=a+4$

これから，　$a+4=1$　　$\therefore$　$a=-3$　①に代入すると，$b=2$

<まなぶ> もっと簡単な方法もあった。$(x-2)$ で約分できると考えれば，分子は$g(x)=(x+c)(x-2)$ と因数分解できる。これからc を求めてしまえばいい。でも，(2)はこの方法でも解くのは難しい。

<先　生> では微分から微分係数を求める方法で解いてごらん。

<かず子> $g(x)=x^2+ax+b$　とおいて，$g(2)=0$　までは一緒ですね。そうすると，

(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

$g'(x)=2x+a$　ですから，$g'(2)=4+a$

$\therefore$　$a+4=1$　これから，$a=-3$

a だけが，先に求められてしまう。あとは先ほどの①からb を計算すればいいわ。

<アリス> こちらの方がずっとスマートですね。(2)も同じでしょうか。

$g(x)=3x^5+ax^3+bx^2+2$ とおくと，$g(-1)=0$

$g(-1)=3\times(-1)^5+a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+2=-a+b-1$

$\therefore\quad -a+b-1=0 \quad \cdots①$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=-\frac{1}{2}g'(-1)$$

$g'(x)=15x^4+3ax^2+2bx$ より，$g'(-1)=3a-2b+15$

$\therefore\quad -\dfrac{1}{2}(3a-2b+15)=-2$ より，$3a-2b=-11 \quad \cdots②$

①，②より，$a=-9$, $b=-8$

やっぱり，こちらの方がスマートね。

〈先　生〉 ちなみにEx2-(2)が(b)の方法でできなかった理由は，$f(a+3h)$ の微分を知らなかったからだ。

$g'(h)=3f'(a+3h)$ より，$g'(0)=3f'(a)$

これを知っていれば，やっぱり(b)の方が計算は早い。

〈まなぶ〉 微分の公式を覚えれば，(b)の応用範囲はどんどん広がっていくということですね。先生の性格を知れば，問題の理解が深まるのと一緒だ。

〈かず子〉 でもね，まなぶの性格のように，理解しようすればどんどん訳が分からなくなってしまうということもあるわ。もっとも，理解しようとは思わないけど。

あとがき

本文のサブタイトルは「微分係数でロピタルもどき」となっていますが，もちろんこれはロピタルの定理のことです。

高校数学では，ロピタルの定理を用いることは推奨されていません。ロピタルの定理は不定形の極限を容易に得られるので重宝な定理なのですが，定理を使える条件の確認が難しいというのがその理由です。しかし，ロピタルの定理の条件を限定してしまえば，利用できます。

ロピタルもどきの定理

関数 $f(x)$, $g(x)$ は，$x=a$ を含む区間で微分可能であり，$g'(x)\neq 0$ とする。

$f(a)=g(a)=0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

証明）

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ロピタルの定理の証明は，コーシーの平均値の定理を用いますが，ロピタルもどきの定理は，微分係数の定義から容易に導くことができます。したがって，その証明も含めて解答としてしまえば問題はないわけです。本文でも触れているように種々の微分の公式を覚えれば，その微分係数を計算することで極限は求めることができます。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$ を求めよ。

解）$f(x)=\sin x-\sin x^2$ とおくと，$f(0)=0$　　$f'(x)=\cos x-2x\cos x^2$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{1-x}=f'(0)$$

ここで，$f'(0)=1$ より，極限値は1

この問題は，本来は平均値の定理を用いて解答しますが，ロピタルもどきでは，微分係数の定義だけで処理ができてしまいます。もともとすべての定理は微分の定義から出発しているわけですから原点回帰とみれば当たり前なのですが。

なお，本文の題材は，「関数の極限のちょっとした小手技」でもずいぶん昔に扱っています。そちらは結構まっとうな方法で解いているのですが，あとがきでは Maclaurin 展開をして関数を近似する，漸近展開という方法で極限を求めています。

だんだんそういう説明が難しい教育課程になってしまいましたが。