ロジック イン ザ キャロル ワールド

キャロル図による論理の国への招待

札幌旭丘高等学校　中村文則

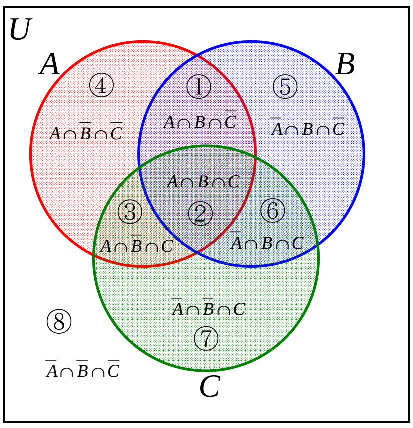
集合(真理集合)の包含・補集合の関係を視覚的に示すシェーマ(Schema)図としては、イギリスの数学者ジョンーベン(John Venn)が考案したベン図が有名であり、集合の性質の説明に用いられる。ベン図では幾つかの集合の交わり、結びの位置関係が明快に示される。しかしながら、集合とその補集合は、集合の内側と外側の関係になるため、例えば、補集合の性質であるドーモルガンの法則等の説明には適してはいない。

これを補うシェーマ図がモーリス・カルノー(Maurice Karnaugh)が考案したカルノー図である。カルノー図では、集合とその補集合は、全体集合を上下あるいは左右のパーテーションに分けて配置するから、集合の関係は対等であり性質の理解は容易である。集合が A, B の２つの場合は、全体集合は $2^2=4$ 個になるようにパーテーションで仕切られ、それぞれの領域は集合 $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ の「交わり」で並列に配置される。これからドーモルガンの法則の性質の理解は一目瞭然である。そのカルノー図も、３つの集合の関係になると、明快さは影を潜める。３つの場合は、$2^3=8$ 個の領域が必要であるが、これを対等に配置することは難しいのである。しかし集合の性質の議論としては３つの集合がもっとも扱われるわけだから、カルノー的に対等な配置図法を考えるなら、立体的にパーテーションで分割をしなければならなく、ここにカルノー図の限界がある。これに対してベン図では、３つの集合の交わりが中心に位置して、集合の交わりが少なくなるよう放射線状に配置されるから分かりやすい(ちなみに、n 個の集合により分割される平面の数は n^2-n+2 である。$n=1,2,3$ のときはこの値は 2^n に等しく、ベン図・カルノー図いずれであっても問題は起きない。$n \geqq 4$ になると、カルノー図ではパーテーションによる分割個数は $2^4=16$ であるのに対し、部分集合の個数は 14 であるため、３つの集合のそれぞれの属性により２つ以上のブランクの領域ができてしまう。ベン図では３つの集合の重なりを変えることでこの問題は起きないが、カルノー図は、全体集合の中に幾つかの穴が空くのである)。

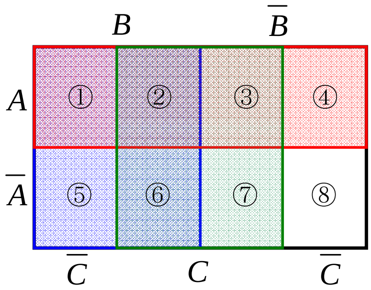
さて、３つの集合の位置関係を明確に表現できるシェーマ図はないのだろうかと思っていたところ、ジョン･フィッシャー著のキャロル大魔法館(高山宏　訳　河出書房新社)の中でキャロル図の存在を知った。この本は、「不思議の国のアリス」の作者、ルイス・キャロルが子供たちのために考えた手品・なぞなぞ・ゲームそして言葉遊びを編集したものであり、キャロル図は論理ゲームの１つとして考案されている。キャロルが考えた論理世界は、３つの属性のうちの２つの属性によって平面世界を上下・左右のパーテーションで４つの領域に分け、さらにもうひとつの属性により内側と外側に分けるというものである。２つの集合はカルノー図として配置し、３つめの集合はベン図として配置するわけで、「いいとこどり」をしたことになるが、そこから生み出されたゲームの世界観は論理的、代数的である。

幾つかの集合に関する演習問題を通して、キャロルワールドに触れてみよう。

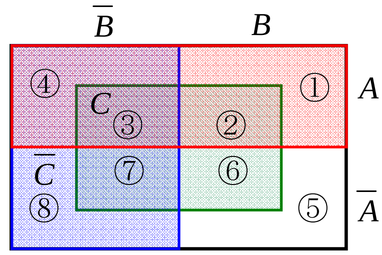
ベン図



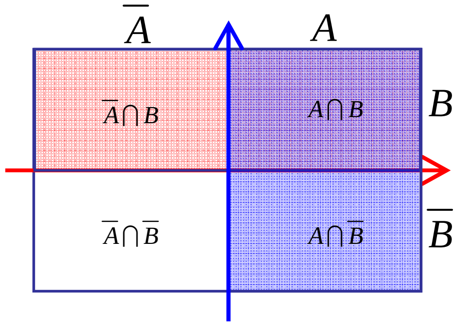
カルノー図



キャロル図



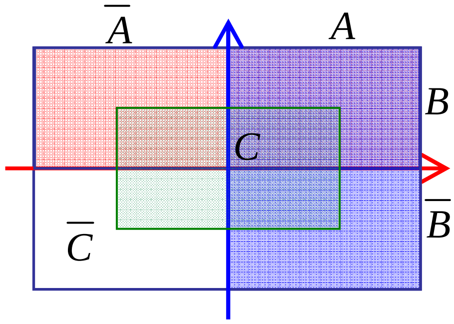
１．キャロルワールドの創造



　３つの集合から２つの集合 A, B を選び、カルノー図として配置する。集合 A とその補集合 $\overline{A}$ を左右に、集合 B とその補集合 $\overline{B}$ を上下になるようにパーテーションで仕切り、４つの領域を作る。これらの領域は、集合およびその補集合の「交わり」として表され、

$$A\cap B,\ \overline{A}\cap B,\ \overline{A}\cap\overline{B},\ A\cap\overline{B}$$

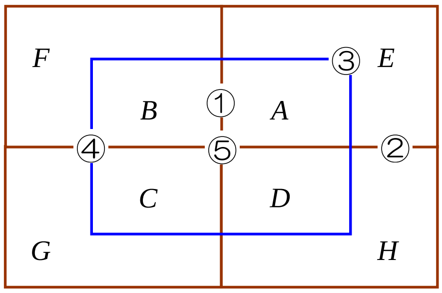
が各領域に置かれる。この並列的な配置は、パーテーションである横線を x 軸、縦線を y 軸とみることで、座標平面が構築されたと考えることができる。補集合は集合の負領域と捉えることで、対等であるというより、負から正へ上昇していく世界が創造されたのである。３つめの集合 C は、この世界の中では矩形の内側に配置し、補集合はその外側に配置する。この３つめを全体の基盤の集合とみて、キャロルに倣い「～の宇宙」ということにする。例えば集合 C が人間全体を表すならば、「人間の宇宙」が矩形の内側にあり、「人間でない宇宙」が外側にあることになる。すなわち、ある意味集合 C とその補集合により、平面は擬似空間とみなせることになる。このように配置されたシェーマ図をキャロル図ということにする。



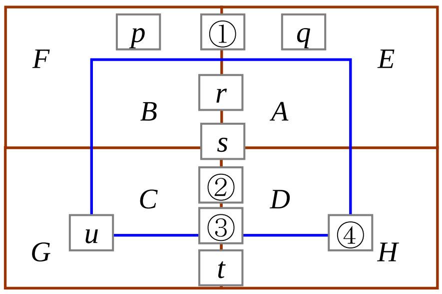
２．要素の個数の配置

　３つの集合の関係は、属する要素の個数の関係に集約される。
　キャロル図にその個数を次のルールに基づき、配置していく。

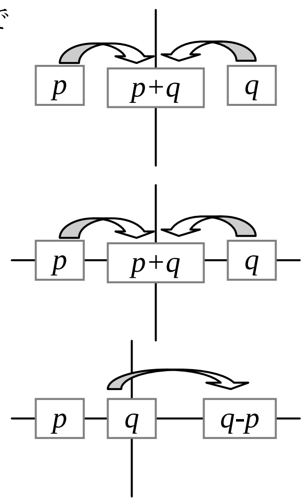
集合の境界線または端点に、共有する集合の要素の個数の和を記入



　全体集合を３つの集合およびその補集合の交わりによりパーテーションで８つに分割し、それぞれを右図のように A～H の集合(領域)とする。①は集合 A と B の共有する境界線であるから、ここには２つの集合の要素の個数の和を記入する。②は E と H の和である。③は、集合 A と集合 E の端点を共有するから A と E の要素の和を記入する。④は集合 B,C,F,G の端点を共有するからその和であり、すなわち、縦線によって左右に分けられた右部分の集合の補集合の個数を記入することになる。⑤は、A,B,C,D の端点が集まっているから、内側と外側(内側の補集合)に分けられた内側の宇宙の要素の個数である。



　このように記入された境界線上の幾つかの集合の個数から他の境界線上に集合の要素の個数を集めることができる。右図で、①は集合 E,F の境界線上であるから２つの集合の要素の個数の和 $p+q$ が入る。同様に、集合 A,B と集合 C,D の集合の要素の和は、それぞれ r と②である。また矩形の内側の宇宙は集合 A,B,C,D の和でありその要素の個数は s である。 これから②に入る数値は $s-r$ である。集合 G,H の要素の個数の和は t であり、③は横線で仕切られた下側である C,D,G,H の要素の個数の和より、③に入る数値は、②と t の和である $s-r+t$ である。同様に④は、集合 D,H の要素の個数の和より、③から u を引いたものであり、 $s-r+t-u$ となる。これらのことより、



○境界線に配置する集合の個数は、境界線を共有する集合の個数の和 ○格子点に配置する集合の個数は、格子点の両側に配置されている境界線上の個数の和

これはまた、
　「線上に配置する集合の個数は、手前の格子点ともうひとつ手前の線上に配置されている個数の差」
であることを示している。

３．キャロルワールドを体感する

Exercise1）すべての領域の要素の個数が確定する問題

> 100 人のうち、A 市に行ったことのある人は 50 人、B 市に行ったことのある人は 13 人、C 市に行ったこのとのある人は 30 人であった。A 市と B 市に行ったことのある人は x 人、A 市と C 市に行ったことのある人は 9 人、B 市と C 市に行ったことのある人は 10 人であった。A 市と B 市と C 市に行ったことのある人は 3 人、A 市にも B 市にも C 市にも行ったことのない人は 28 人であった。このとき、x の値を求めよ。

キャロルワールドを作るためにはまず「～たちの宇宙」を創造する。本問は 3 つの都市にいったことがあるかどうかの調査であるから、そのうちの 1 つの都市に行ったことのある人の集合を基盤にする。ここでは「C 市へいったことのある人たちの宇宙」としよう。そしてこの宇宙の中で、A 市に行った人・行かなかった人の人数を横軸に、B 市に行った人・行かなかった人の人数を縦軸にとり座標を作る。このように創造された世界に要素の個数を配置していく。

問題文で与えられた要素の個数を配置すると下図のようになる(○の中に示された数字)。次に、A 市、B 市に行ったことのある人数からその補集合である行ったことのない人数が決まる。こうやって配置された世界に、「配置ルール」の規則に基づき、他の領域の要素を埋めていく(図の中の□の中に示された数字)。

配置は、

① 座標軸上の数値(いくつかの領域の和集合)

② 領域上の数値

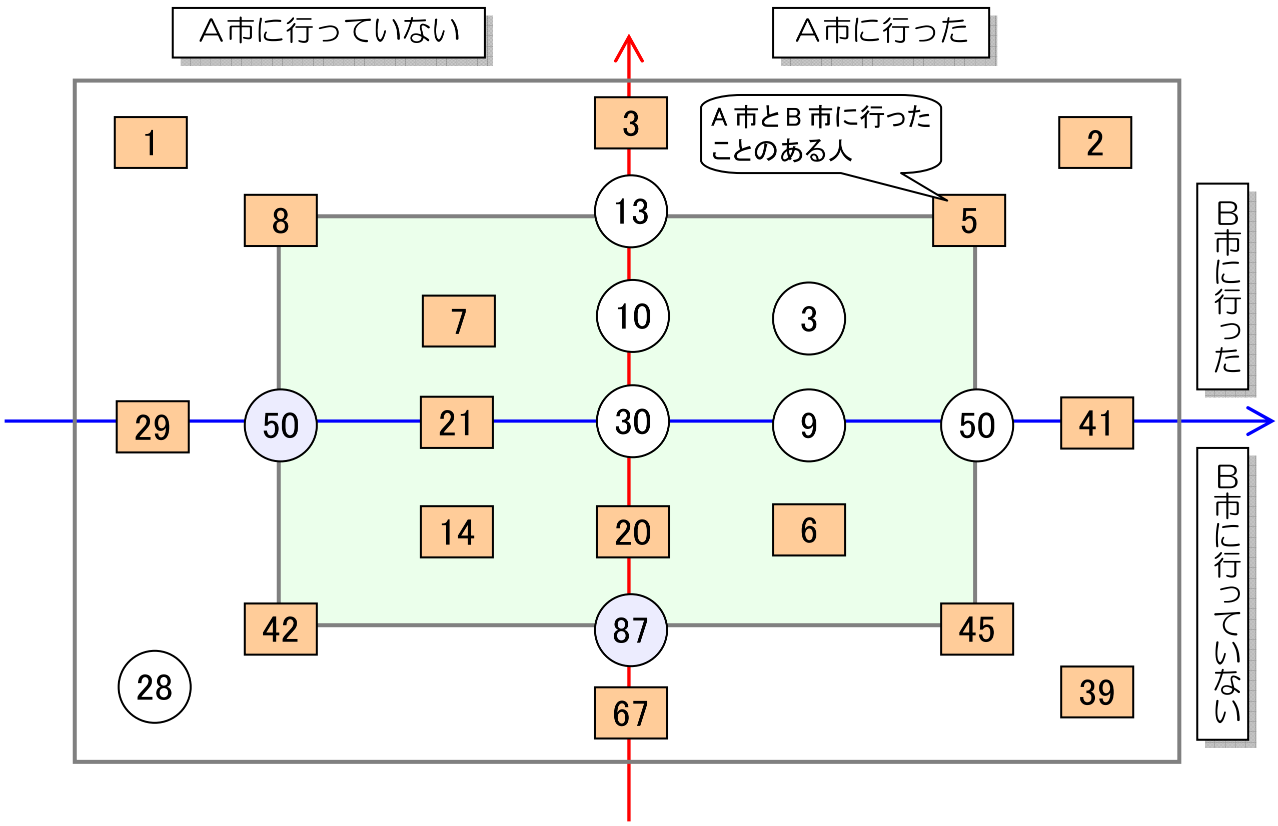
の順に進めていく。

そうすると下図のように、C 市に行ったことのある人たちを中心にして、要素の個数が恒星のように配置され、対称性鮮やかな宇宙が作られる。

この図から A 市と B 市に行ったことのある人の人数は 5 人である。

どんな条件の人数でも、即座にこの図から求めることが可能であることが分かる。

(例えば、B 市は行ったが、A 市、C 市には行っていない人は、1 人だけである)



Exercise2）和集合の領域の人数が確定する問題

ある大学の入学者で、他の a 大学、b 大学、c 大学を受験した者全体の集合を A,B,C で表す。

$n(A)=65$， $n(B)=40$， $n(A\cap B)=14$， $n(A\cap C)=11$

$n(A\cup C)=78$， $n(B\cup C)=55$， $n(A\cup B\cup C)=99$

であるとき、次の問いに答えよ。

(1) c 大学を受験した者は何人か。

(2) a 大学、b 大学、c 大学のすべてを受験した者は何人か。

(3) a 大学、b 大学、c 大学のどれか 1 大学のみを受験した者は何人か。

「C 大学を受験した者の宇宙」を下図のように作る。最初に、

$n(A)=65$， $n(B)=40$， $n(A\cap B)=14$， $n(A\cap C)=11$

を配置する。次に

$n(A\cup C)=78$， $n(B\cup C)=55$， $n(A\cup B\cup C)=99$ ……(*)

の配置であるが、キャロル図ではパーテーションで分けた領域は集合の「交わり」で表されるから「結び」の集合の配置は面倒である。基本はパーテーションにより 8 つの独立国を作ることになる。したがって(*)は、ドーモルガンの法則によりその補集合を用いて「交わり」に変える。

全体集合の要素の個数を n とし、(*)の補集合を求めると、

$n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=n-78$， $n\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=n-55$， $n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=n-99$

である。これをキャロル図に書き入れる。また、

$n\left(\overline{A}\right)=n-65$， $n\left(\overline{B}\right)=n-40$

も書き入れよう。後は軸上、領域上の要素の個数を配置し下図が完成する。この図より、

(1) c 大学を受験した者は 24 人

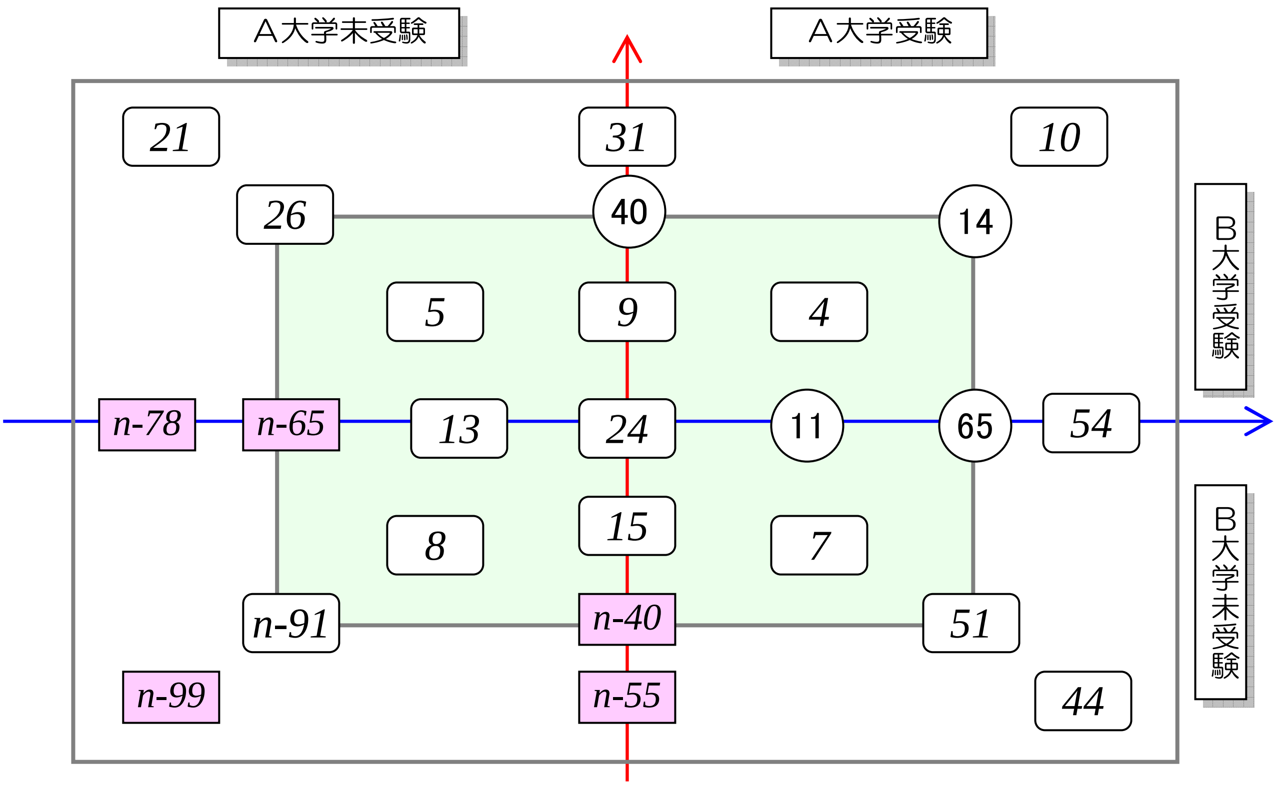
(2) a 大学、b 大学、c 大学のすべてを受験した者は 4 人

(3) a 大学、b 大学、c 大学のどれか 1 大学のみを受験した者は、

a 大学のみ 44 人　b 大学のみ 21 人　c 大学のみ 8 人

より、$44+21+8=73$(人)

なお、この問題は、$A\cap B\cap C=\phi$ とすると、全体集合は $A\cup B\cup C$ となる。この形でキャロル図を書いても一般性は失われない。



Exercise3）座標軸上にすべての要素の個数が確定する問題

ある学校で 1 年生の A 組と B 組の生徒に対して、先月の図書館の利用状況を調査したところ、83 人の生徒が利用していることが分かった。また、生徒の組別、性別の図書の貸し出し状況は①から④の通りであった。このとき、図書を借りた B 組の女子生徒は何人か。

① 男子生徒の利用者は 36 人であり、このうち 11 人は A 組の生徒であった。
② A 組の生徒の利用者は 38 人であり、このうち 7 人は図書を借りなかった。
③ 図書を借りた生徒は 61 人であり、このうち 24 人は男子生徒である。
④ 図書館を利用したものの図書を借りなかった B 組の女子生徒は、図書を借りた A 組の男子生徒の 4 分 3 である。

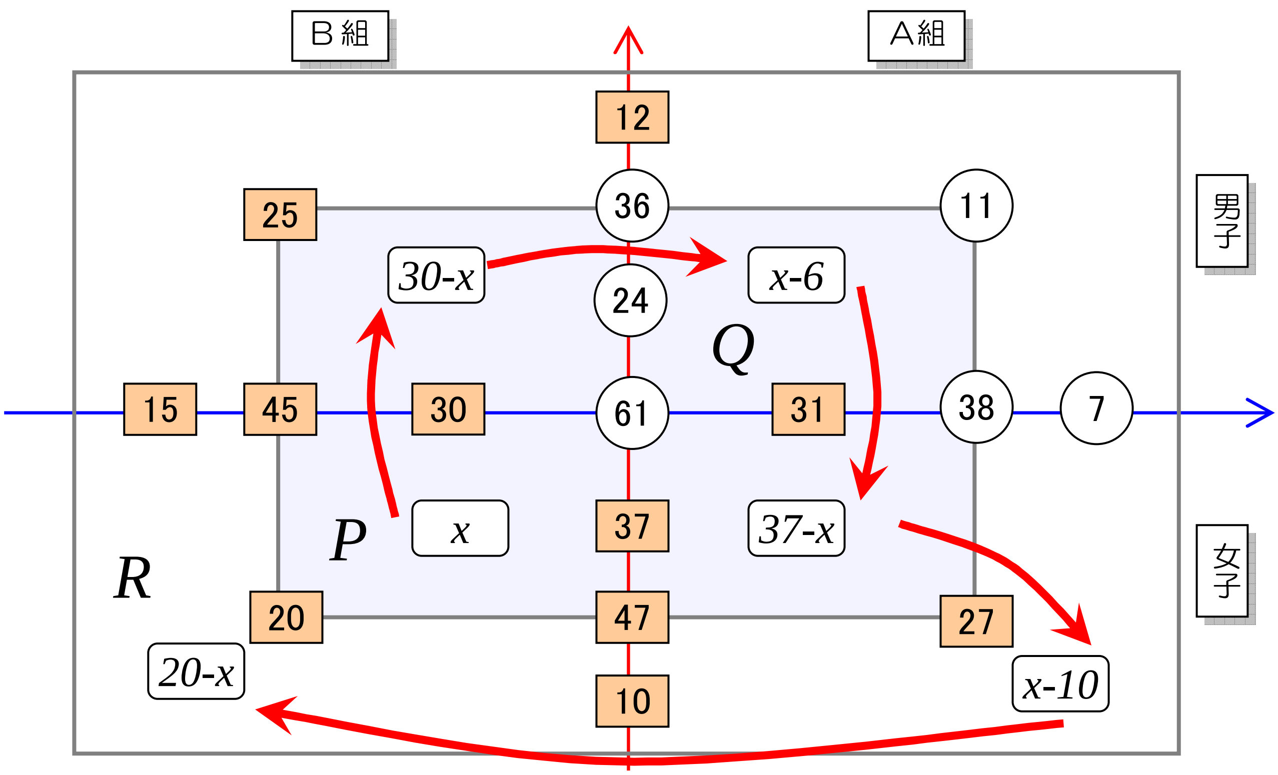
本問はインターネット上でパズルとして公開されている問題である。解答はもちろんキャロル図によるものではない。興味ある方は検索いただきたい。

さて、キャロルワールドを作るために「～たちの宇宙」をまず設定する。本問は図書館の利用状況に関する調査であり、集合として、

組別　…　A組と補集合のB組
性別　…　男子と補集合の女子
利用別…　図書を借りた生徒と補集合の借りなかった生徒

が考えられる。この場合は、図書の貸出状況における B 組生徒の人数を調べるわけだから、貸出しをキーワードとして、「本を借りた生徒の宇宙」を作ってみる。左右、上下のパーテーションにより、それぞれ組別、性別を配置して座標を作る。まず、条件①・②・③の数値をキャロル図に配置する(図中、○で囲んだ数値)。さらに図書館利用者が 83 人であるから、条件①より女子生徒の利用者 47 人、条件②より B 組生徒の利用者 45 人が決まる。次に、配置のルールにより左右、上下に分けている座標軸上の数値を入れていくと、すべてが求められることが分かる。最後に領域 P「図書を借りた B 組の女子」の人数を x 人として、領域 Q「図書を借りた A 組の男子」から領域 R「図書を借りなかった B 組の女子」まで人数を追いながら領域を移動させる(領域 P から領域 R へは、直接移動は可能である)。これから領域 Q、領域 R の人数はそれぞれ $(x-6)$ 人、$(20-x)$ 人であり、条件④より　$\frac{3}{4}(x-6)=20-x$

これを解いて、$x=14$（人）



Exercise4）座標軸上の要素の個数を１変数で確定する問題

> リンゴ 18 個、カキ 15 個、ナシ 13 個を 40 人に配ったところ、リンゴだけをもらった人が 9 人、カキだけをもらった人が 8 人、ナシだけをもらった人が 5 人であった。ただし、1 人はどの種類の果実も 2 個以上はもらわないとする。
> (1) リンゴ、カキ、ナシを 1 個ずつ計 3 個もらった人は何人以下か。
> (2) 1 個ももらわない人は何人以下か。

「1 人がどの種類の果実も 2 個以上はもらわない」ということは、「1 個ももらわない」または、「1 個だけもらう」ということだから、40 人がもらう果実は、それぞれ異なる種類で 0 個～3 個である。したがって、リンゴをもらった人、カキをもらった人、ナシをもらった人の集合を考えキャロル図を作る。「ナシをもらった人の宇宙」を作ろう。

まず、リンゴ、カキ、ナシをもらった人の人数、リンゴ、カキ、ナシのみを 1 個もらった人の人数を書き入れる。

次にリンゴを貰わなかった人数($40-18=22$)、カキを貰わなかった人数($40-15=25$)を入れる。

そして、「リンゴとナシを貰った人数」を x 人とし、横軸(x 軸)を埋め、さらに領域の人数を入れると縦軸(y 軸)上もすべて x を用いて表される。

領域の中の人数は 0 以上であることより、$2x-10 \geqq 0$、$8-x \geqq 0$ より、

$$5 \leqq x \leqq 8$$

である。これより、

(1) リンゴ、カキ、ナシを 1 個ずつ 3 個もらった人は $(2x-10)$ 人より、

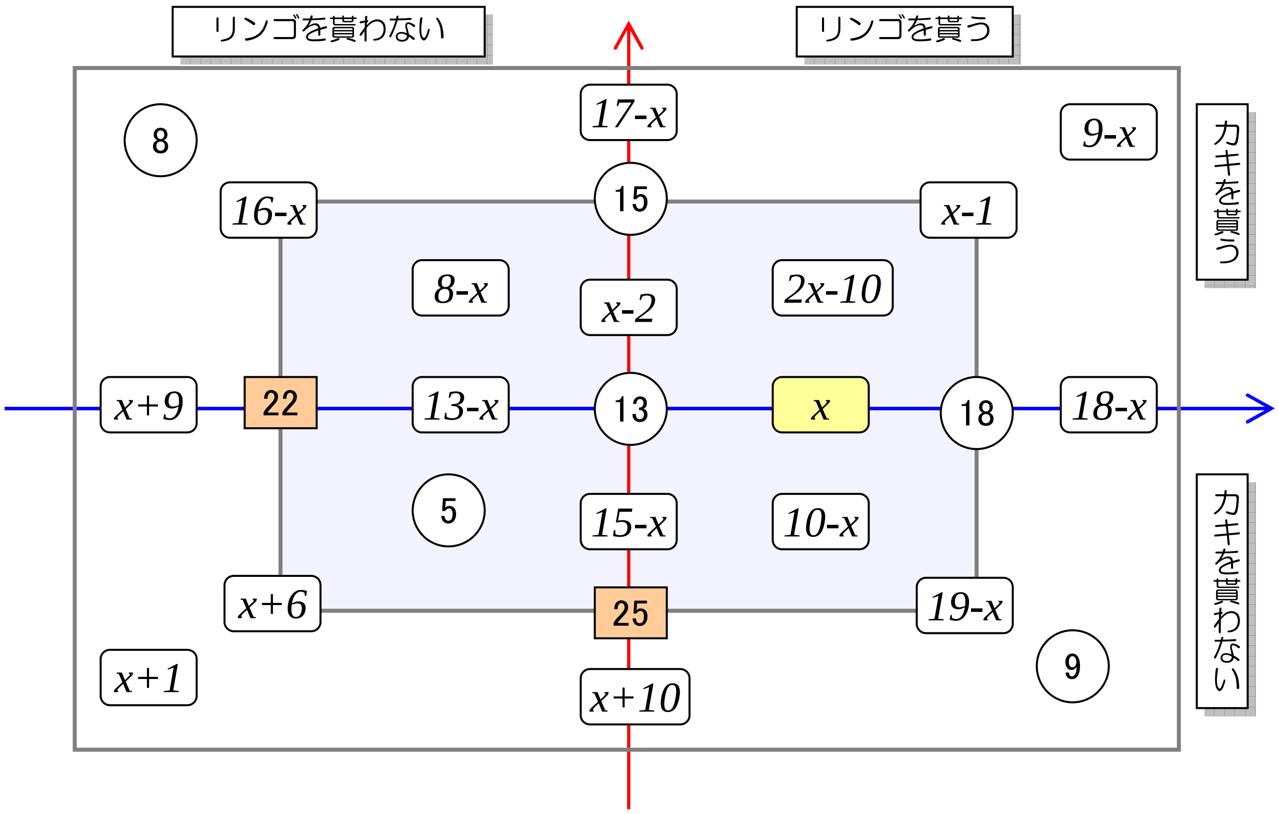
$$0 \leqq 2x-10 \leqq 6$$

すなわち、6 人以下である。

(2) 1 個も貰わなかった人は $(x+1)$ 人より、

$$6 \leqq x+1 \leqq 9$$

すなわち、9 人以下である。



Exercise5）両座標軸の個数を２変数で確定する問題

　3 種類の商品 A,B,C について市場調査を行ったところ、500 人から回答を得た。集計結果によれば、商品 A を買った人は 224 人、商品 B を買った人は 237 人、商品 C を買った人は 266 人であり、また 3 種類とも買った人は 20 人、3 種類のどれも買わなかった人は 9 人であった。次の問いに答えよ。
(1) 2 種類以上の商品を買った人は何人か。
(2) 商品 A,B,C のうち、3 種類すべては買わなかったが、どれか 2 種類を買った人は何人か。
(3) 商品 A,B,C のいずれか 1 種類だけを買った人は何人か。

「商品 C を買った人の宇宙」を考える。条件で表された数値を配置し、商品 C を買った人の宇宙で、A を買った人、B を買った人の人数をそれぞれ x 人、y 人として、座標軸上に配置する。次に、分割される 8 つの領域を下図のように、P～W に分ける。カッコ内の数字は買った品物の個数である。この領域はすべて、3 種類とも買った人数と 3 種類とも買わなかった人数を用いることで、x,y により表現することができる。

(1) 2 種類以上の商品を買った人は、P,Q,S,T であるから、

$$20+(y-20)+(x-20)+(236-x-y)=216\,(人)$$

(2) 2 種類のみの商品を買った人は、(1)から P を除けばよい。

$$216-20=196\,(人)$$

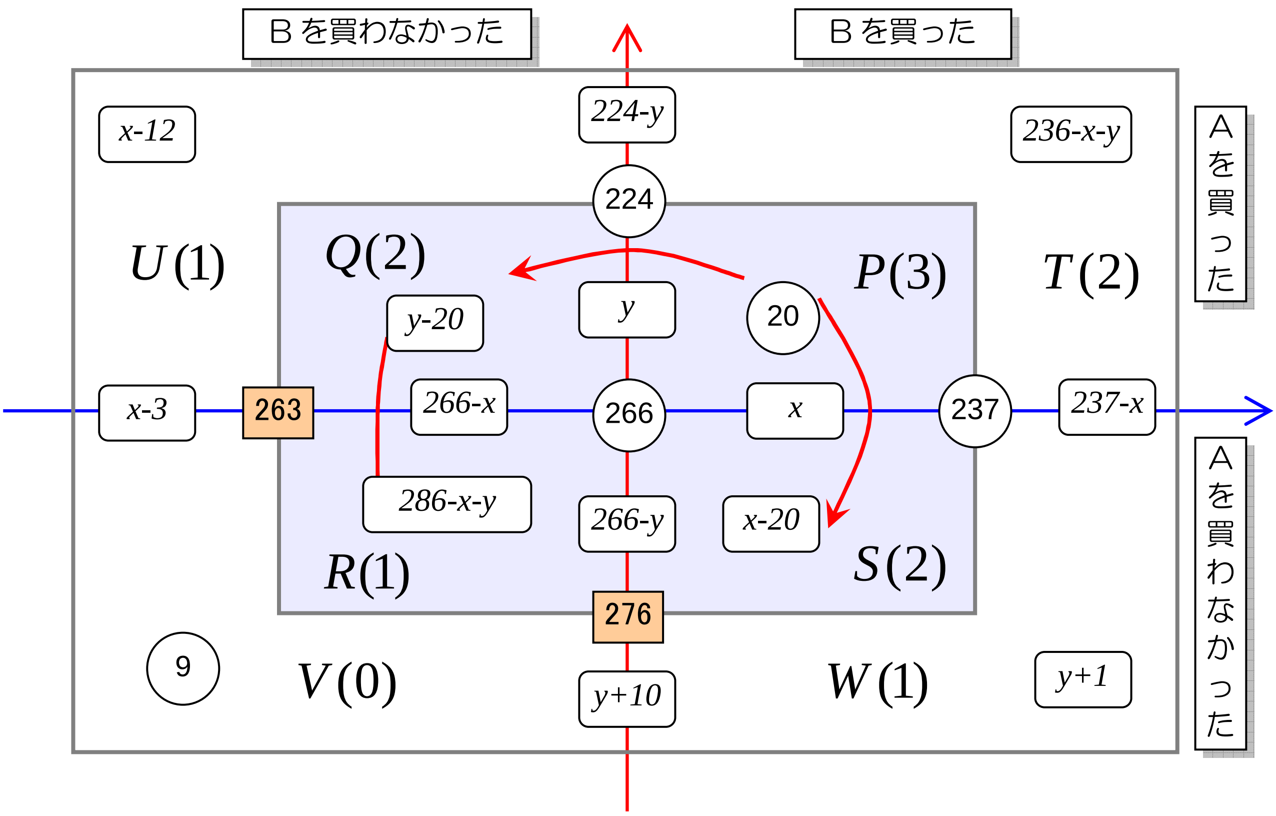
(3) いずれか 1 種類のみを買った人は、U,R,W であるから、

$$(x-12)+(286-x-y)+(y+1)=275\,(人)$$

　なお、全体人数 500 人から、(1)の 2 種類以上の買った人数およびひとつも買わなかった集合の人数を引いてもよい。

$$500-216-9=275\,(人)$$

本問をベン図で解くと、集合を表す 3 つの円により分けられる 8 つの領域のうち、条件で与えられている 2つを除き、要素の個数を変数で与えて立式し求めることになる。キャロル図では、x 軸、y 軸上に変数を配置すれば、すべての領域は下図のように x,y で表現することができ、扱いやすくなる。また、各領域・座標上の要素の個数は 0 以上であることより、x,y の満たすべき条件も定められる。



Exercise6）両座標軸および１領域を３変数で確定する問題

定期試験の結果について、生徒 100 人を対象に調査したところ、数学に合格した生徒は 75 人、英語に合格した生徒は 80 人、国語に合格した生徒は 90 人であった。3 科目とも合格した生徒の人数は、少なくとも何人といえるか。

「数学に合格した生徒の宇宙」の中で x 軸に国語の合否、y 軸に英語の合否の人数を考える。

まず、数学の合格者数を原点、国語、英語の合格者数をそれぞれ x 軸、y 軸上に配置する。全体人数が 100 人であることより確定する国語の不合格者、英語の不合格者の人数を軸上に配置する。数学に合格した生徒の宇宙の中で、国語の合格者、英語の合格者の人数をそれぞれ x 人、y 人として、軸上の値を x, y で表す。軸上の値はすべて 0 以上の値であることより、

$65 \leqq x \leqq 75$

$55 \leqq y \leqq 75$

が得られる。これから、

$120 \leqq x + y \leqq 150$

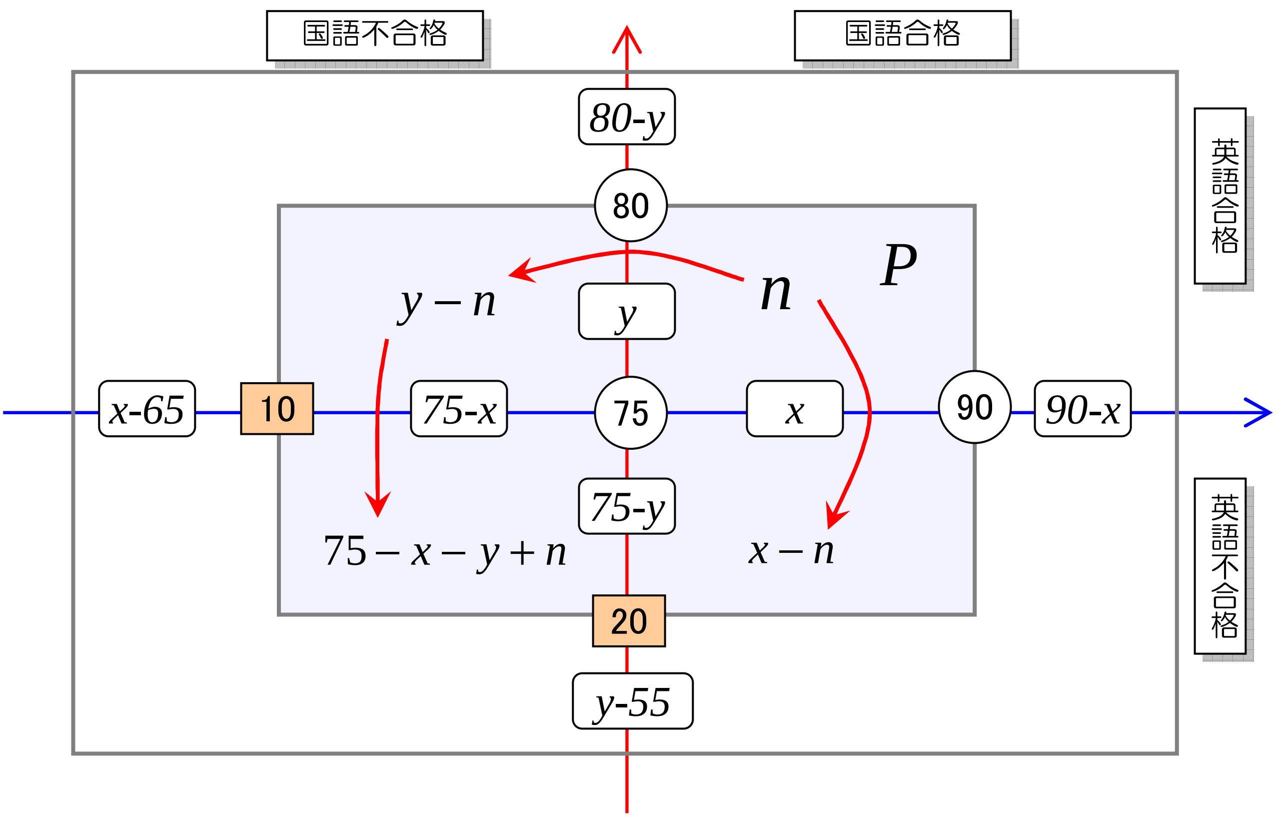
である。次に、3 科目とも合格した生徒の人数を n 人として、「数学に合格した生徒の宇宙」内を移動させて、下図のように各象限の人数を x, y, n で表す。どの象限も 0 以上の値であるから、

$n \leqq x$、 $n \leqq y$、 $n \geqq x + y - 75$

よって、 $n + 75 \geqq x + y \geqq 120$ 　より　 $n \geqq 120 - 75 = 45$

以上より、3 科目とも合格した生徒の人数は少なくとも 45 人である。

この問題で x 軸上の各数値が 0 以上であることより得られる x の値の範囲「$65 \leqq x \leqq 75$」は、数学に合格しなかった生徒(外宇宙)の領域別人数の上限・下限を決定する。$x = 65$ のときは、外宇宙で英語の合否に関わらず、国語の不合格者が 0 人、国語の合格者は 25 人である。また、 $x = 75$ のときは、外宇宙の国語の合格者は 15 人、不合格者は 10 人になる。同様に y 軸についても考えることにより、領域人数の最大値・最小値が求められる。



Exercise7) 1 変数で条件領域を補填する問題

> 集合 A,B,C の要素の個数はどれも 10 であるとする。$A\cap B\cap C=\phi$ であり、$A\cap B, B\cap C, C\cap A$ は ϕ でなく、かつこれらの要素の個数は等しい。このとき、$A\cup B\cup C$ の要素のとり得る値の範囲を求めよ。

「集合 C の宇宙」を下図のように考える。
条件で与えられている

$$n(A)=n(B)=n(C)=10\ 、\ n(A\cap B\cap C)=0$$

を配置する。さらに、

$$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=n \quad (n\neq 0)$$

として、座標平面に書き入れる。そして軸上、領域上の要素の個数を書き入れていく。
次に、各領域の要素の個数は 0 以上であるから、

$$10-2n\geqq 0\ 、\ n\geqq 1 \quad より、\ 1\leqq n\leqq 5 \qquad \cdots\cdots(*)$$

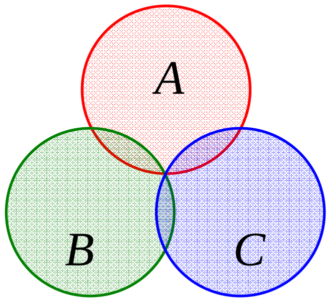
ここで、集合 $A\cup B\cup C$ は $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ の補集合であることより、その要素の個数の和 x は、

$$x=(10-2n)+n+(10-2n)+10=30-3n$$

(*)の範囲を考えると、$15\leqq x\leqq 27$ である。なお、

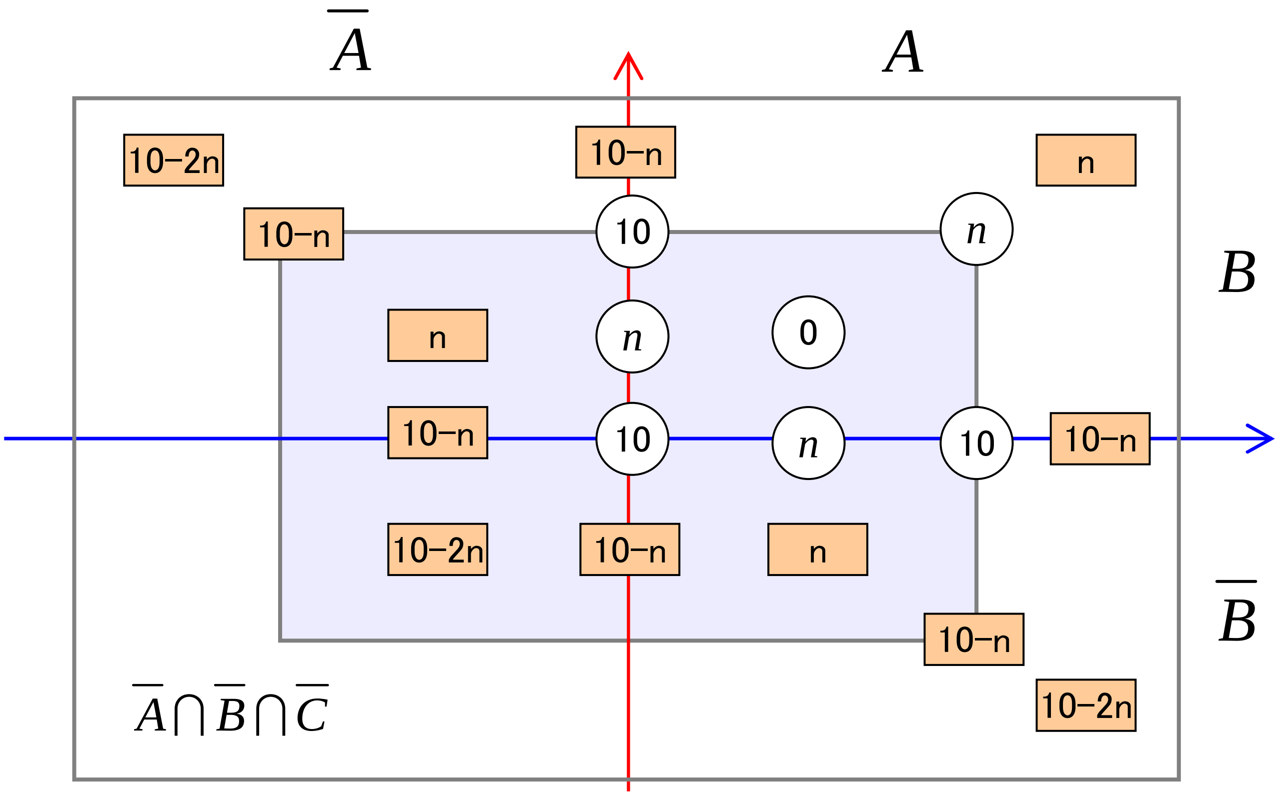
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=10+10+10-n-n-n+0$$
$$=30-3n$$

これを用いて $A\cup B\cup C$ の要素の個数を求めることはできる。
ただ(*)の式を見つけることは難しい。ベン図では $A\cap B\cap C=\phi$ より、
右図のように表され、



$$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(A\cap\overline{B\cup C})$$
$$=n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=2n+n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\geqq 2n$$

これより、$n\leqq 5$ が得られる。



Exercise8）両座標軸上および領域の 4 変数を確定する問題

ある大学の貿易学科の 1 学年の学生数は 190 人であり、そのうち男子学生は 148 人である。また調査の結果、これらの学生のうちアルバイトをしている学生は 151 人、サークル活動をしている学生は 127 人である。
(1) アルバイトをしている女子学生は、少なくとも何人か。
(2) サークルに所属もせず、アルバイトもしていない男子学生は、最も多くて何人か。
(3) サークルに所属し、アルバイトもしている男子学生は、少なくとも何人か。

性別に関する人数を求める問題なので、「男子学生の宇宙」を考え、下図のようにキャロル図を設定する。条件の集合およびその補集合の要素の個数を記入する。男子学生(の宇宙)でアルバイトをしている者、サークル活動をしている者の人数をそれぞれ x, y とする。これを用いて x 軸上、y 軸上の個数を確定し、そのすべての値が 0 以上であることより、

$$109 \leqq x \leqq 148,\quad 85 \leqq y \leqq 127 \quad \cdots\cdots(*)$$

を得る。次に、アルバイトおよびサークル活動をしている男子の人数を a 人とし、男子の宇宙の領域人数を a, x, y で表す。

(1) アルバイトをしている女子学生は $(151-x)$ 人であるから、(*)より、$3 \leqq 151-x \leqq 42$ である。

∴　少なくとも 3 人いる。

(2) 男子の宇宙のすべての象限の人数は 0 以上であることより、

$$a \geqq 0,\quad y-a \geqq 0,\quad x-a \geqq 0,\quad b=148-x-y+a \geqq 0 \quad \cdots\cdots(**)$$

サークル活動をしていなく、アルバイトもしていない男子学生は、男子の宇宙の第 3 象限である。その人数を b 人とすると、$b=148-x-y+a$ である。

(*)と(**)を用いると、

$148-x-b=y-a \geqq 0$ より、$b \leqq 148-x \leqq 148-109=39$

$148-y-b=x-a \geqq 0$ より、$b \leqq 148-y \leqq 148-85=63$

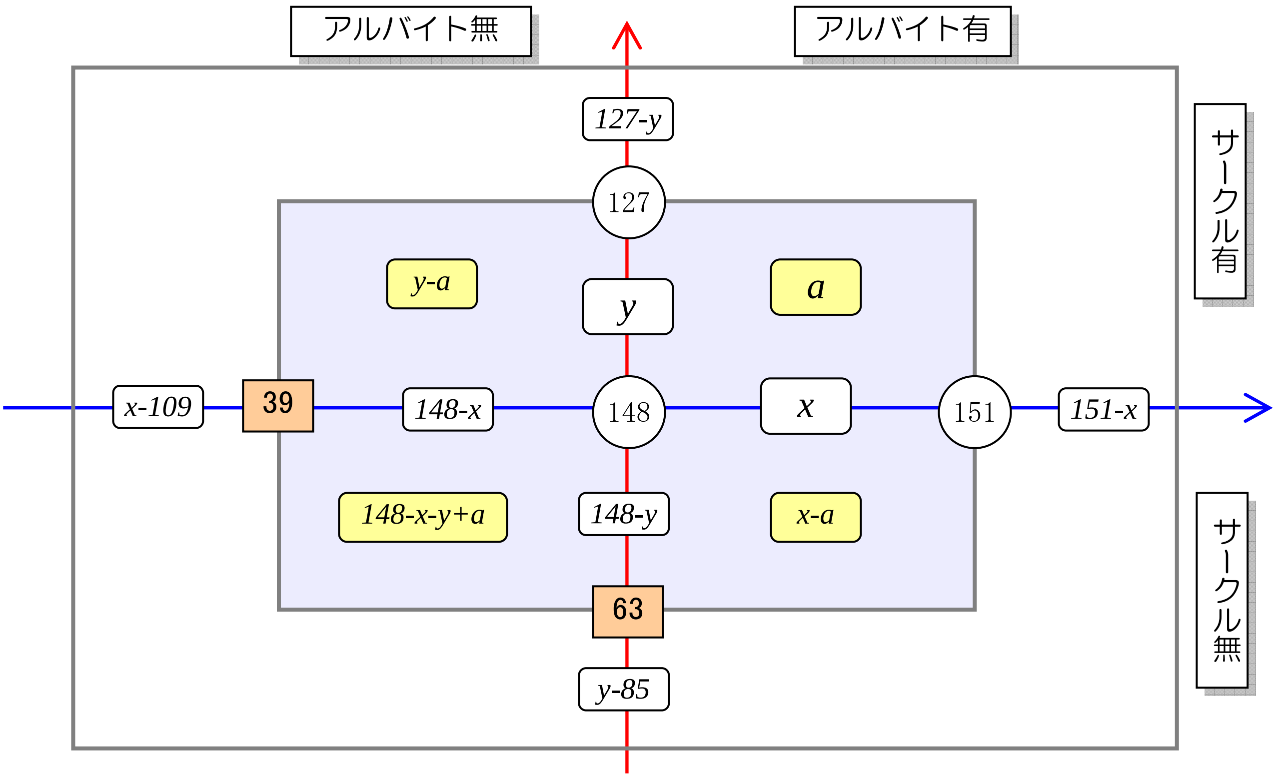
∴　もっとも多くて 39 人である。

(3) サークルに所属し、アルバイトもしている男子学生は a 人であるから、

$148-x-y+a \geqq 0$ より、$a \geqq x+y-148$

ここで(*)より、　$194 \leqq x+y \leqq 275$ であるから、$a \geqq x+y-148 \geqq 194-148=46$

∴　少なくとも 46 人である。



あとがき

「キャロル大魔法館」はジョン・フィッシャーが編纂したキャロル伝であり、秀逸の読み物である。キャロルが生涯を通して編み続けた論理は、茶化しながらも深い感銘を与えつつ散りばめられている。例えばユークリッドの第３公準「ある任意の点を中心とし、その点から任意の(等しい)距離の線を引くと円になる」さえもキャロルにかかると、「ある任意の論争をめぐってある隔たりを保ちながら立ち回ると論争になる」と茶化されるが、これは第３公準を理解しているからクスッとパロディを受け入れ納得できるのである。キャロル図もそういった趣のものであり、楽しさの中にも論理を理解し学んでて欲しいという数学教師キャロルの想いが込められている。キャロル図はもともと論理ボードゲームとして、オイラーが考えた方法を幼稚園児童向けに発展させたものである。そう、幼稚園児童向けのものなのである。キャロルは、知合いの幼稚園の女の先生にお願いして出版前にゲームを体験してもらったとのことであるが、「キャロルさんは子供向けに作ったようですけど、大学の学生でないと無理であり、私も子供たちもダウンしました」と先生は感想を述べている。その結果(顛末)も含めてキャロルらしい。こんな話もある。「不思議な国のアリス」を読んだビクトリア女王が「面白い本だから、他の著書も読みたい」といったところ、女王の元へ数学の学術書「行列式初歩」が送られてきたという(これは作り話らしいが)。

彼の言動・行動・生き方、その影響力まですべてが「不思議で魅惑的なパロディ」である。

さて、本文のキャロル図は、キャロルのボードゲームのアイデアをシェーマ図にしたものであるが、実際のボードゲームは論理問題で、前提から結論までの道筋を三段論法的に示すものである。ゲームの中での「～たちの宇宙」は、キャロルは複数の属性をもつある事柄としている。前提はこの事柄により、その属性をもって肯定的・否定的に表現されるのである。例えば、

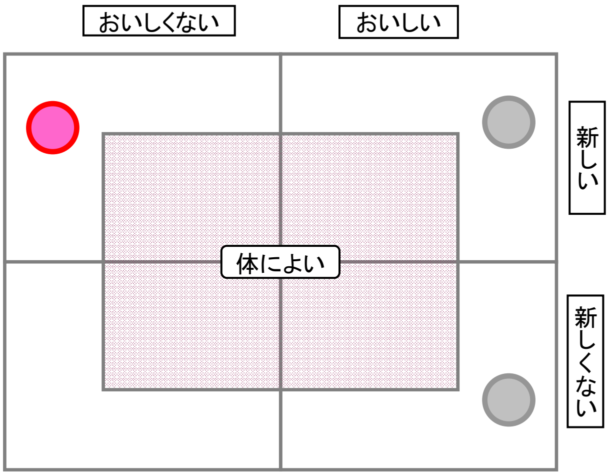
(1) いくつかの新しいケーキは体によくない

(2) おいしいケーキで体によくないものはない

という前提を考えてみよう。(1)、(2)どちらもケーキについて述べているわけだから、この場合は「ケーキたちの宇宙」を考えることになる。ケーキは、

①体によい　②おいしい　③新しい

という３つの属性をもち、(1)、(2)の両方に関わる属性である「①体によい(よくない)」を基盤として、本文のキャロル図と同様の方法で右のように作成する。



まず、(2)の否定的な前提を考えると、「おいしい、体によくない」領域は、第１象限、第４象限の外側であり、(2)はその否定であるから、ボートのここには「空ら」を表すグレーのチップを置く。次に(1)を満たす領域は、第２象限の左上領域であるからここには肯定を表す赤のチップを置く。

そして、第１象限から第４象限の中で、どの象限が前提の結論(後提)として望ましいかを考えるのである。第１象限と第４象限は「空」を含むから除外する。第３象限は何も置かれていないから分からない。したがって第３象限が残り、これを整理すると

「いくつかの新しいケーキはおいしくない」

ということになる。キャロルはこのゲームを幼稚園児は面白がって夢中になりやるだろうと思い大真面目で作ったのである。懲りない彼は後にこのゲームを発展させ「記号論理学」の中に著すが、そこではなんと 10 以上の前提から結論を導いている。ちなみに著者名は本名のドジスンではなく「ルイス・キャロル」。どこまでも、どこまでもキャロルらしい。本文のキャロル図は、このボードゲームをモデルにし、「～たちの宇宙」は３つの集合の主格となる集合を内宇宙、外宇宙に分け、他の２つの集合から座標平面を作った。属性は要素の個数に置き換えている。でもキャロルの発想はそのままだから、要素の個数の配置をみていくと自然とキャロルワールドは沸き立つ。

ところで、数学教師・小説家として活躍したキャロルは晩年はオックスフォード大学という俗世界から隔絶された小宇宙に自分の生涯を閉じ込めることになる。論理ゲームのように自らを「キャロルの宇宙」に委ねるのである。

(あとがきは、「キャロル大魔法館」から一部抜粋し、参考にさせていただきました)

たちの宇宙

キャロル図作成シート