3点を通る曲線の小手技

札幌旭丘高校　中村文則

○三人寄れば文殊の知恵！

<先　生> 今日は，３点を通る曲線の方程式の求め方を考えよう。

Ex）次の３点を通る放物線の方程式を求めよ。
(1) $O(0,0)$, $A(1,-1)$, $B(2,2)$
(2) $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(3,4)$

<よしお> ３点を通るので放物線は，一般形 $y=ax^2+bx+c$ に３点を代入すればいいですね。
でも，(1)と(2)ではずいぶん計算量に違いがある。
<まなぶ> そういったときは，早いもん勝ちだろ。(1)を解くね。
まず，原点を通るから，$c=0$。
だから，$y=ax^2+bx$ に２点 A, B を代入すればいい。

$a+b=-1$ ，$2a+b=1$ より，$a=2$, $b=-3$

以上より，放物線の方程式は，$y=2x^2-3x$
(2)は任せたよ。
<かず子> ちょっとー,「サギに油揚げをさらわれる」って感じなんですけど。
<アリス> そんな，ことわざあるんですか。
<先　生> 少し違うけど，この場合は正しいかも。(2)も(1)と少し違うけど，具体的にはどんな違いがあるだろうか。
<まなぶ> 先生なんか，ことわざの方が言いたかったことで，無理やり問題にこじつけてない。まあ，僕は大人だから，ここはひとまずおいといて先に進めましょ。違いは明らかで，変数の個数だよね。(1)は a と b なのに，(3)は a,b,c の３つがあるから，連立方程式を解くのか大変になる。
<先　生> そうだね。だから，２変数にすれば計算は簡単になるということだ。
<よしお> ということは，３点の１つが原点になればいいということですね。そうか，平行移動ですね。
<かず子> なるほど。例えば点 A が原点になるように，x 軸方向に -1 ，y 軸方向に -2 平行移動すると，３点 A,B,C の座標はそれぞれ，$(0,0)$, $(1,-2)$, $(2,2)$ となるわ。
<アリス> あれっ。その３つの座標は(1)と同じなんですね。
<まなぶ> 先生，はめたね。
<先　生> その「はめた」というのはこの場合はヘンだ。うまく条件に「はまった」ということだ。
<よしお> まあ，確かにはまってますね。だから，放物線の方程式は，$y=2x^2-3x$ となるので，
あとは，この放物線を x 軸方向に１，y 軸方向に２だけ平行移動すればいい。
<かず子> それ，私がやるわ。

$y-2=2(x-1)^2-3(x-1)$　これを整理して，$y=2x^2-7x+7$

<まなぶ> 今度は僕の方が,「カラスに油揚げをさらわれた」って気がするんだけど。
<アリス> そんなことわざ，あるんですか。
<かず子> ないわ。
<よしお> 先生，そうすると，原点を通る放物線を考えてから平行移動してもいいってことですね。
まず，$y=ax^2+bx$ とおいて，点 $A(1,2)$ を通るように平行移動すると，

$$y=a(x-1)^2+b(x-1)+2$$

この式に，２点 B,C を代入して a,b を求めればいい。
<アリス> すごい，こちらの方が簡単そうですね。
<まなぶ> なるほどね。それじゃ２変数 a,b をさらに１変数だけで表したらもっと簡単に解けるんじゃないの。
<かず子> それはいくら何でも欲張り過ぎよ。
<先　生> いや，本時の解法のポイントは実はそこなんだ。そして，曲線を１変数で表す方法をみんなは知っている。
<アリス> あっ，わたし，分かったかも。先生が「3点を通る曲線」ていっていたのが最初から気になっていたんです。
ひょっとしたら,「2点を通る曲線」の応用ではないですか。
<先　生> 先生の言葉，アリスは覚えていたんだね。
２曲線 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ が与えられたとき, この２曲線の交点を通る曲線はどのように表されただろう。

<よしお> $g(x,y)=0$ 以外の曲線は，陰関数で表された２曲線の方程式を定数倍した和で表されます。

$$f(x,y)+kg(x,y)=0$$

となります。

<まなぶ> ということは，３つの点のうちで，例えばA,Bを通るような曲線を２つ求めてから，その交点であるA,Bを通る曲線を１変数で表して，そして残った点Cを通るように代入して変数の値を決定し，そして最後に式を整理すればいいってことだ。

<かず子> なんか，言葉を遮られたくないから一気にまくし立てている。とんびに油揚げをさらわれたわ。

<アリス> ことわざの鳥，とんび，だったんですね。

<先　生> それでは解いてみようか。まずA,Bを通る曲線を考えてみよう。

<よしお> 簡単に求められる放物線でないと駄目です。例えば，残りの１点が原点だと，先ほどの平行移動の方法の方が簡単になってしまいます。

<かず子> A,Bのどちらかを放物線の頂点にしたらどうかしら。

例えば頂点が$A(1,2)$で点$(2,1)$を通る放物線は簡単に求められるわ。

<アリス> やってみます。$y=a(x-1)^2+2$として，$(2,1)$を代入すると，$a=-1$ 。

放物線の方程式は，$y=-(x-1)^2+2$ ですね。

<先　生> いいね。陰関数で表すと，　$x^2-2x+y-1=0$ …①

さて，ではもうひとつの曲線は何にする。

<かず子> うーん。今度はBを頂点にするのかな。

<よしお> すでに１つ放物線は作ったから，今度は放物線でなくてもいいんじゃないかな。

<かず子> そっか。そうすると２点を通る曲線は，直線にすれば簡単だわ。

傾きmは，$m=\dfrac{2-1}{1-2}=-1$ 。そして点$A(2,1)$を通るから，

$y=-(x-2)+1$ 　∴　$x+y-3=0$ 　…②

<先　生> いいですね。それでは，最後の仕上げをしよう。

<アリス> ①，②の交点であるA,Bを通る曲線の方程式は，

$$x^2-2x+y-1+k(x+y-3)=0$$

これが点$C(3,4)$を通るので代入すると，$k=-\dfrac{3}{2}$

これから，$2(x^2-2x+y-1)-3(x+y-3)=0$

整理をすると，　$y=2x^2-7x+7$

<かず子> できたわ。三人寄れば文殊の知恵ね。

<アリス> そのことわざ，私も知ってます。

<まなぶ> あれ，アリス，変でしょ。3 人ってことは僕の存在が絶対に消えているから。それによく考えるとこの方法にもちょっと問題があると思う。

<かず子> いちいち細かい。

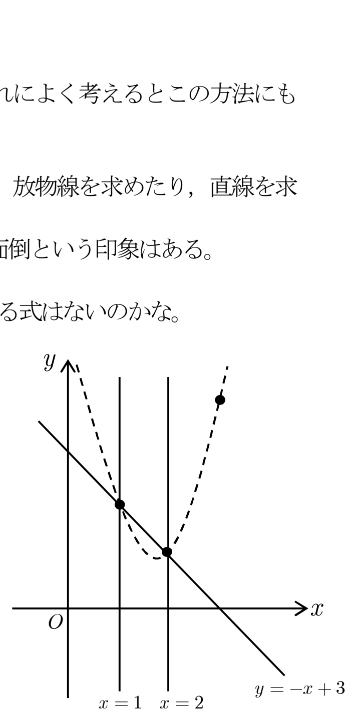
<よしお> でもまなぶがいうことも分かる。だって，1 変数で解いているように見えるけど，放物線を求めたり，直線を求めたりと，実際は手間がかかり過ぎている。

<先　生> 直線の傾きや放物線のグラフの開きは式を立てなくても求められるけど，確かに面倒という印象はある。

では，これをもう少しスリムにすることはできないだろうか。

<まなぶ> 直線はこのままでいいと思う。問題なのは放物線の方だ。もっと簡単に求められる式はないのかな。

<先　生> では，ヒントを出そう。直線$y=mx+1$の意味を考えてごらん。



<かず子> 傾きmでy切片１の直線ですよね。

<アリス> あのう，$(y-1)+mx=0$ とみれば違った見方ができますよね。

<よしお> そうか。２直線 $y-1=0$，$x=0$ の交点を通る直線だ。その交点$(0,1)$がy切片になるってことだ。ということは，$f(x,y)=0$は，xとyの関係式でなくてもいいということですね。

<かず子> ためしに，$(x-1)(x-2)=0$はどうかしら。この式だと，$x=1$または$x=2$ときは０になり，yの値はなんでもいいことになるから，点A,Bを通ると考えられるわ。

<アリス> そうしたら２曲線の交点を通る曲線は，

$$(x+y-3)+k(x-1)(x-2)=0$$

この式に点$C(3,4)$を代入すると，$k=-2$ 。もう一度代入して整理をすると，

$$y=2x^2+7x-7$$

本当に求められたわ。やっぱり三人寄れば…

<まなぶ> そうじゃないってば。

<先　生> それでは同様の方法で次の問題を解いてみよう。

> Ex）次の３点を通る円の方程式を求めよ。
> $A(4,1)$，$B(6,5)$，$C(-3,2)$

まず，３変数，２変数による解き方を復習してごらん。

<まなぶ> 3 変数の方法です。円の一般形は,

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

これに 3 点を代入してa,b,cの連立方程式を解く。いまから思えばだるい方法だ。

<かず子> ダルいまなぶがいうのだから「烏は烏の眼を穿らない」ってことだよ，アリス。

<まなぶ> へんなことわざもちだすなよ。

<アリス> でも，何となく分かりました。では次に２変数の方法です。原点を通る円の方程式は,

$$x^2+y^2+ax+by=0$$

これを，点Aを通るように平行移動すると，

$$(x-4)^2+(y-1)^2+a(x-4)+b(y-1)=0$$

そして，２点B,Cを代入して，a,bを求めます。

<先　生> よくできました。それではいよいよ１変数の場合。

なお，弦の垂直二等分線上に円の中心があることから円の方程式は求めることができるけど，ここでは 2 曲線の交点を通る曲線を利用して求めよう。

<よしお> まず，2 点A,Bを通る曲線の１つは直線ですね。直線ABを求めると，

$$y=\frac{5-1}{6-4}(x-4)+1=2x-7 \quad \therefore \quad 2y-y-7=0$$

もう１つは 2 点を通る曲線が円になるようなものを考えればいい。

<まなぶ> 放物線の場合に倣うと，$(x-4)(x-6)=0$になるけど，円にしなければならないから,

$(y-1)(y-5)$も必要で…，ということは,

$$(x-4)(x-6)+(y-1)(y-5)=0$$

こうすると，この方程式は，確かに 2 点A,Bを通っていて，円の方程式になっている。

<アリス> よそさうですね。そうすると，2 曲線の交点を通る曲線の方程式は,

$$(x-4)(x-6)+(y-1)(y-5)+k(2x-y-7)=0 \quad \cdots(*)$$

そして，$C(-3,2)$を代入すると，$k=4$　もう一度(*)に代入して,

$$(x-4)(x-6)+(y-1)(y-5)+4(2x-y-7)=0$$

これを整理して,

$$x^2+y^2-2x-10y+1=0$$

できました。今日は，ことわざを３つ覚えたし，何か得した気分です。

<まなぶ> 油揚げをさらうのはトンビだからね。3 人寄れば文殊の知恵も，4 人だと使えないからね。

まあ，同じ意味のことわざに「一人の好士より三人の愚者」というのもある。そうみると多少は納得できるけどね。

<アリス> 先生と 3 人ってことですね。師をうやまい自らは謙遜するって，本当に日本語は奥が深いわ。

<まなぶ> ちょっと違うんだけど……

あとがき

今回は，おやじギャグがきつい会話のラリーになっています。3 点のうち１点を原点に平行移動するというアイデアは数実研の菅原代表のレポートのオマージュであり，先生へのリスペクトを込めて，会話内容をいじり(すぎ)ました。

本文の 3 点を通る曲線の解法について補足説明をしましょう。

3 点を通る放物線の問題ですが，過去に「放物線の切片形の小手技」でも紹介しています。ここではスケーリング(あるいはカヴァリエリの原理)を用いて逆行列により 2 次の項の係数を決定していました。

Lagrange 補間多項式にも触れ，次のようにマニュアル化した解法を提示しています。

3 点 $A(1,2), B(2,1), C(3,4)$ では,

$$y=a(x-1)(x-2)+(-x+3)$$

右図より, $a=\dfrac{4}{2}=2$

$$\begin{array}{ccccccccl} 1 & & 2 & & 3 & & 1 & \to & (1-2)(2-3)(3-1)=2 \quad (x\text{ の増分}) \\ & \times & & \times & & \times & & & \\ 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & \\ \hline & -3 & & 5 & & 2 & & \to & -3+5+2=4 \quad (y\text{ の増分}) \end{array}$$

ただ, 時代は変わり, 行列は高校数学から消え(さらにベクトルも次の教育課程では 2 年次までの学習では消え), もうこのような説明は通用しなくなりました。

これからの学力には「思考力, 表現力, 判断力」といった要素が求められ, センター試験のようにバイパスで答えのみを導く傾向は, 新学習要領の前倒し実施の大学入学共通テストからは大きく舵を切ろうとしています。

ゆとりのないゆとり, アメリカの Math-Wars 提言など, 本研究会でも現場の学力低下についてはずいぶん議論されてきました。その深刻な現状は, OECD の PISA 調査で世界から現実を突きつけられて方向転換を余儀なくなされたのです。

思考・表現・判断を問う問題は, 大学入学共通テストではずいぶん古風な名前の太郎くん, 花子さんの 2 人の会話で進められています。でも小手技では既に 30 年以上前からまなぶ, よしお, かず子, そして途中から加わったアリスの 4 人がグローバルに楽しく数学を語ってきました。いまさら感は否めないのです。2 人での会話は, 白黒の 2 値論理になる傾向があります。やがて, 共通テストの会話文にも新たな人物が加わることになるのでしょうか。

話を戻しましょう。

小手技では, 2 曲線の交点を通る曲線群のアイデアを用いて, 3 点を通る曲線を考察しています。

本文中の $(x-1)(x-2)=0$ は,「$x=1$ または $x=2$ 」であり, 2 つの直線を表します。陰関数で方程式を表現する場合, 例えば円の方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ は,

$$y=\sqrt{3-(x-1)^2}+2\,,\quad y=-\sqrt{3-(x-1)^2}+2$$

この 2 つの陽関数(半円)を合わせた多価関数のグラフが円ですから, このように陰関数では 2 つのグラフを表現することもできると考えればいいことになります。

ただ, もう少し違った見方をすると, 放物線 $y=2x^2+3x+4$ は,

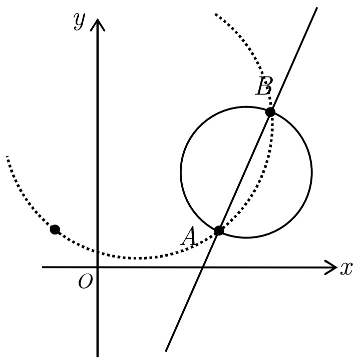
「放物線 $y=2x^2$ と直線 $y=3x+4$ の和関数」

とみなせます (「和関数としての 2 次関数のグラフ」参照)。

そう考えれば,

$$y=a(x-1)(x-2)+(-x+3)$$

として方程式を考えることができ, もう少し分かり易い説明ができるでしょう。



次に, 3 点を通る円の方程式で作られた次の式は図形的な意味があります。

$$(x-4)(x-6)+(y-1)(y-5)=0$$

この式をベクトルの内積で表現すると,

$$(x-4, y-1)\cdot(x-6, y-5)=0$$

すなわち,

$\overrightarrow{OA}=(4,1)$, $\overrightarrow{OB}=(6,5)$, $\overrightarrow{OP}=(x,y)$

とすると,

$\overrightarrow{AP}=(x-4, y-1)$, $\overrightarrow{BP}=(x-6, y-5)$

これから, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ となり, $AP \perp BP$ が得られます。

これより点 P は線分 AB を直径とする円周上の点です。すなわち, 2 つの曲線は, 直線 AB と, 線分 AB を直径とする円を考えればいいわけです。

ただ, 次期指導要領ではベクトルは 2 年次ではまだ学ばないので, その方程式を求めるためには本文のようにするか, 2 点 A , B から円の中心である線分 AB の中点, 円の直径である線分 AB の長さを調べるということになるのでしょうか。

ところが, ベクトルが教科書からなくなることで, 共通テストのオプション科目である数学Bは,「確率分布と統計的な推測」が必須となります。従来の記述統計の内容である「データの分析」はずいぶん古典的な統計でしたが, いきなり推測統計が脚光を浴びることになりました。でも推測統計にはベクトル的なアプローチは当然必要なわけで, そこから生じる基幹のない理論にどう折り合いをつけていくかは骨の折れることになりそうです。