円順列の指導についての一考察

北海道札幌稲雲高等学校　山本大輔

1．はじめに

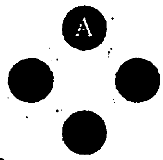
数学の不得意な生徒にとって最も厄介なのが「場合の数と確率」の分野ではないでしょうか。特にこの分野については解答は一つしかないにも関わらず、解法は複数個考えられます。問題集の解答や参考書などは模範解答をのせているだけであり、この分野の苦手な生徒は、自分の解答や考え方のどこが違っているのかがいつまでたってもわからないままにしているところにあるのではないかと考えます。そこで、今回は円順列を例にして考察してみたいと思います。

2．円順列の考え方～4人の場合

①1点固定法

まず、一人を固定します。その後その一人以外を並べます。4人だと、まず一人の場所を固定しその後残り3人を並べます。

（4－1）！＝6（通り）



つまり、(人数－1)！となります。

②重複法

一度一列に並べてから両端で手をつないで輪を作ります。そうすると、

A－B－C—D　，B－C－D－A，
C－D－A－B　，D－A－B－C　は1列に並んだときは別なものであるが、円形に並べると同じものであるので、$\frac{4!}{4}=6$（通り）

つまり、$\frac{(人数)!}{(人数)}$となるわけです。

※　以降男子を○、女子を×で表すことにします

3．具体的な問題例

例題1

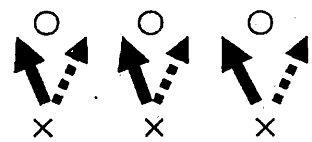
男子3人、女子3人が男女交互に円形に並ぶ方法は何通りあるか

＜解Ⅰ＞　まず男子1人を固定します。その後、それ以外の2人を並べます。×印の場所に女子を並べます。

男1
×　　×
○　　○
×

2！×3！＝12（通り）

＜解Ⅱ＞まず男子3人と女子3人を1列に並べ向かい合わせます



向かい合った人の左側に入るか右側に入るかの2通りできます。これで男女交互が完成です。6人の円順列なので6で割ります。

$\frac{3!\times3!\times2}{6}$＝12（通り）

例題2

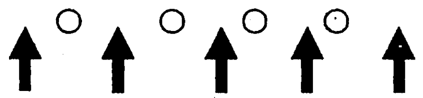
男子4人、女子3人で、女子同士が隣り合わせにならないで円形に並ぶ方法は何通りあるか

＜解Ⅰ＞まず男子1人を固定します。その後、それ以外の男子3人を並べます。×印の場所から3か所選んで女子を並べます。

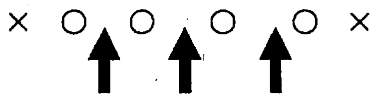
男1
×　　×
○　　○
×　　×
○

$3!\times{}_4P_3=144$（通り）

＜解Ⅱ＞まず男子４人を１列に並べます。
女子３人が入る可能性のある場所は５か所ありますからその中から３か所選んで女子３人を並べて入れます。



しかし、この方法だと　×○○○×○×
というように両端に女子が入ってしまうと、女子が隣り合ってしまいます。
そこで、



と並んだときを引いてやります

$$\frac{4!\times{}_5P_3-4!\times{}_3P_2\times3}{7}=\frac{4!(60-18)}{7}=144$$

こんな面倒くさい解答などする人はいないと思いますが、一応教えるだけ教えておいてどっちのやり方がやり易いのかを考えさせることも大切だと思います。

例題３

７人のうち５人を円卓に座らせる方法は何通りあるか

＜解Ⅰ＞　まず７人から５人を選びその中から一人を固定します。次にそれ以外の４人を並べます。

$$_7C_5\times4!={}_7C_2\times4!=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=504$$

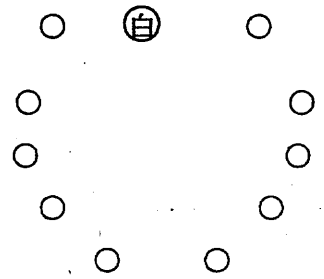
＜解Ⅱ＞　まず７人から５人を選び１列に並べます。次に人数で割ってやります。

$$\frac{_7P_5}{5}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5}=504$$

例題４

白玉１個、赤玉４個、黒玉６個がある。次の並べ方は何通りあるか
（１）これらすべてを円形に並べる方法
（２）（１）で、どの２個の赤玉も隣り合わない並べ方

（１）
＜解Ⅰ＞白玉を固定する。１０か所にまず黒玉の入る場所を６か所選び、次に空いているところに赤玉を入れる



$$_{10}C_6\times{}_4C_4={}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$$

＜解Ⅱ＞すべての玉を１列に並べて、個数の１１で割ると

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$$\frac{_{11}C_1\times{}_{10}C_6\times{}_4C_4}{11}={}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$$

（２）
＜解Ⅰ＞まず白玉が１つしかないので、それを固定します。白玉の右隣から黒玉６個を並べます。赤玉の入る場所は７カ所なので、その中から４カ所を選んで赤玉を入れます。

$$_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$$

＜解Ⅱ＞白玉１個と黒玉６個を１列に並べます。赤玉の入る場所は８カ所あるのでその中から４カ所を選びます。

○ ○ ◎ ○ ○ ○ ○
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

しかし、その中に両端が赤玉になる場合を除かなければいけません。

$$\frac{_7C_1\times{}_8C_4-{}_7C_1\times{}_6C_2}{11}=\frac{7(70-15)}{11}=\frac{7\cdot55}{11}=35$$

つづく