「場合の数」と「確率」　～　区別する？　しない？

北海道札幌真栄高等学校　山本　大輔

数学Aで「確率」を教えるときにまず場合の数を教えます。その後、

$$\boxed{（確率）＝（その事象の起こる場合の数）／（起こり得るすべての場合の数）}$$

と教えていましたので、場合の数がしっかり理解できるかどうかで確率が理解できるか決まると生徒には言っていました。しかし、本当にそうでしょうか？「場合の数」は区別するものとしないものがはっきりしていますが、「確率」についてはすべてを区別して答えを出した方がうまくいきます。次の問題を見てください

Ex.1　赤玉3個と白球6個を横一列に並べるとき、次の場合の数を求めよ。
（1）　3個の赤玉が連続して並ぶ
（2）　3個の赤球がどの2個も隣り合わない
（3）　先頭から3番目までがすべて白球になる

＜解答＞　赤球を○、白玉を×としてみました

（1）
○○○××××××
×○○○×××××
××○○○××××
×××○○○×××
××××○○○××
×××××○○○×
××××××○○○

以上7通りあります

（2）まず白玉を6個並べます(並べ方は1通り）

　×　×　×　×　×　×
↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑

次に、赤球の入る場所を7か所の中から3か所選びます　${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$　通り

（3）×××□□□□□□

□の中には○が3カ所（または×が3カ所）入るので、${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 通り

次に、この問題を確率を求める問題に変えて解いてみましょう。

Ex.2　赤球3個、白球6個とを横一列に並べるとき、次の確率を求めよ。
（1）　3個の赤球が連続して並ぶ
（2）　3個の赤球がどの2個も隣り合わない
（3）　先頭から3番目までがすべて白球になる

＜解答1＞　Ex.1と同様に赤球を○、白球を×としてみました

（1）　赤球3個、白球6個を1列に並べるには、9個の□を用意してその中から○が入る場所3か所を選択すること、分子はEx.1(1)を参照して7通りあるので、$\frac{7}{{}_9C_3}=\frac{7\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{12}$

（2）　分母は(1)と同様。次に白球を6個並べ、その間や両端の7か所から赤球が入る場所を3か所選んで赤球を入れます。すなわち、$\frac{{}_7C_3}{{}_9C_3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{12}$

（3）　並び方は　×××□□□□□□　　□の中には○が3カ所入るので、${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$　　よって、$\frac{{}_6C_3}{{}_9C_3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{21}$

<解答２～別解>　～ここで、白球６個と赤球３個はすべて区別できると考えてみます。

（１）　ここで、全部で９個の球を一列に並べる(9!)ことが分母、赤球３個を１個として白球６個と合わせて７個の並び方と、そのそれぞれに赤球の並び方があり、それが分子となるので、

$$\frac{7!\cdot 3!}{9!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{12}$$

（２）　まず、白球６個を並べてからその間や両端の７か所に赤球３個を並べて入れると

$$\frac{6!\cdot {}_7P_3}{9!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot7\cdot6\cdot5}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{5}{12}$$

（３）　Ex.2 より、並び方は${}_6C_3=20$通りだが赤球３個と白球６個の並び方はそれぞれ3!，6!通りあるので

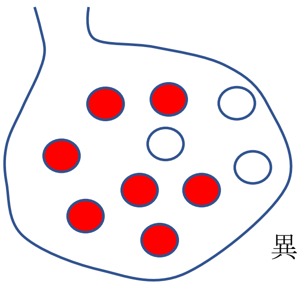
$$\frac{{}_6C_3\cdot 3!\cdot 6!}{9!}=\frac{20\cdot3\cdot2\cdot1\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{5}{21}$$

<解答 1>に比べて<解答 2>の方が生徒にとっては理解しやすいようです。次の問題 Ex.3 では、球の代わりに人間に置き換えてみました。これだと問題を解くときは区別しなければならないので,生徒が混乱を起こすことはなく正解にたどり着けるはずです。**場合の数では、数字や色付きの球は区別しないが人だけ区別します。**

Ex.3　男子６人と女子３人が横一列に並ぶとき、次の確率を求めよ。
（１）　女子３人が連続して並ぶ
（２）　女子３人のうち、どの２人も隣り合わない
（３）　先頭から３番目までがすべて男子になる

さて、ここで赤球と白球は区別できないはずなのに、何故区別すると考えて解いても正解が出るのでしょうか？それは、確率の定義にあります。分母に「起こりうるすべての場合の数」というのは、その根元事象は**「同様に確からしく」**なければならないので、同じ色の球でも区別しなければ確率を求めることができません。

Ex.4　　袋の中に全く同じ大きさの赤球７個、白球３個が入っている。この中から３個の球を取り出すとき、赤球１個、白球２個を取り出す確率を求めよ。



袋の中に入っている球は全く同じ大きさの区別のつかない球である。
しかし、ここでこの球に
赤 1、赤 2、赤 3、赤 4、赤 5、赤 6、赤 7、白 1、白 2、白 3 と名付ける。
異なる 10 個の中から 3 個の球を取り出す場合の数は${}_{10}C_3 = \frac{3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8}=120$通り

これらは同様に確からしい。さらに、赤１個、白２個の球の取り出し方は、${}_7C_1\cdot{}_3C_2=7\cdot3=21$通り

よって、$\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$となる。このように、実際には区別のつかない球の取り出し方も**区別をつけられる**として計算するとうまく求められます。

そこで昨年度の北大の問題です。

Ex.5　　（2018年北海道大学理系）

数字の2が書かれたカードが2枚、同様に数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ2枚あわせて8枚のカードがある。これらから4枚を取り出し横一列に並べてできる自然数をnとする。ただし0のカードが左から1枚、または2枚現れる場合は、nは3桁または2桁の自然数とそれぞれ考える。例えば左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合はnは11である。

（1）　省略

（2）　nが9の倍数である確率を求めよ

（3）　nが偶数であったとき、nが9の倍数である確率を求めよ。

（2）nが9の倍数になるのは、各位の数の和が9の倍数の時である。よって、そうなる組み合わせは

（ア）和が9となるとき、　(0,0,1,8)

（イ）和が18となるとき、　(0,2,8,8)，(1,1,8,8)

0.1.2.8 のカードがそれぞれ2枚づつあるが、これらをすべて区別して考えると

8枚のカードから4枚のカードを取り出し左から並べる方法は、${}_8P_4=8\cdot7\cdot6\cdot5=1680$

(0,0,1,8)、(0,2,8,8)、(1,1,8,8) の並べ方は4! 通り、その取り出し方は、

$4+4+1=9$ 通り、よって、$\dfrac{9\cdot4!}{1680}=\dfrac{9}{70}$

（3）nが偶数である事象をA、nが9の倍数である事象をBとおく。$P_A(B)$ を求めればよいので、

nが偶数となるのは、一の位が偶数すなわち0か2か8のときなので、

$0, 0', 1, 1', 2, 2', 8, 8'$ のように同じ数字はすべて区別して

$$\left.\begin{array}{l} \square\square\square\,0 \ \ or \ \ \square\square\square\,0' : \ 7\cdot6\cdot5\cdot2=420 \\ \square\square\square\,2 \ \ or \ \ \square\square\square\,2' : \ 7\cdot6\cdot5\cdot2=420 \\ \square\square\square\,8 \ \ or \ \ \square\square\square\,8' : \ 7\cdot6\cdot5\cdot2=420 \end{array}\right\} \text{以上より、} P(A)=\frac{420\cdot3}{8\cdot7\cdot6\cdot5}=\frac{3}{4}$$

ここで、nが偶数でかつ9の倍数となるのは、

(0,0,1,8) の並び方は、$3\cdot3!=18$ 通りになりその取り出し方は4通りなので、$4\cdot3\cdot3!=72$

(0,2,8,8) の並び方は、$4!=24$ 通りになりその取り出し方は4通りなので、$4\cdot4!=96$

(1,1,8,8) の並び方は、$2\cdot3!=12$ 通りになりその取り出し方は1通りなので、$1\cdot2\cdot3!=12$、

$$P(A\cap B)=\frac{72+96+12}{{}_8P_4}=\frac{180}{8\cdot7\cdot6\cdot5}=\frac{3}{28}$$

以上より、$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\left(\dfrac{3}{28}\right)\div\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{28}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{7}$

このように、同じ数字があっても異なるものとして計算することで、簡単に計算することができます。教科書には、詳しく書いてありませんがこのことは重要な事項ではないでしょうか？生徒が混乱する要因はたくさんありますが、**「場合の数」では区別するかしないかは結果が全然違ってきます**が、**「確率」の分野では「区別しないもの」を「区別するもの」とさせて計算した方がよりわかりやすい**のではないでしょうか。この事を取り上げている教科書や参考書がほとんどないということも、生徒が「確率」を苦手にして、自学自習できない原因ではないでしょうか。