

第59回：数実研レポート 3 囚人問題とベイズの定理

平成 18 年 12 月 2 日
留萌千望高校教諭 佐川 大樹

1. はじめに

ある日のこと、生徒と次のようなやりとりがあった。

生徒A：「先生、3 囚人問題って知ってる？」

佐川：「サンシュウジン？」

生徒A：（3 囚人問題を説明して）「それで、確率はいくつになるの？」

佐川：「2分の1じゃないのか。」

生徒A：「でも、インターネットでは3分の1って書いてあるんだけど、何で3分の1になるか教えてくれる？」

恥ずかしい話、私は『3 囚人問題』というのを知らずに、何となく感覚で2分の1と答えたが、それこそこの問題の落とし穴である。いろいろこの問題を調べていくうちに、感覚で「各根元事象が同様に確からしい」としてしまうことの危険性とベイズの定理による鮮やかさを学ぶことができた。以下、このレポートでは次の6つのことについてまとめてみたいと思う。

『3 囚人問題』とはどんな問題か

『3 囚人問題』の解答

ベイズの定理

安易に「同様に確からしい」としてしまうことに対する危険性

過去の入試問題から

『3 囚人問題』をどう生徒にわかりやすく教えていくか

2. 『3 囚人問題』とはどんな問題か

3人の囚人A, B, Cがいる。3人とも処刑されることになっていたが、王子が結婚するので王様が一人だけ恩赦にしてやることになった。誰が恩赦になるのか決定されたが、まだ囚人たちには知らされていない。

結果を知っている看守に、囚人Aが「BとCのうち、どちらかは必ず処刑されるのだから、処刑される一人の名前を教えてくれないか」と頼んだ。

看守は、その言い分に納得して「囚人Bは処刑されるよ」と教えてやった。

囚人Aは、「はじめ自分の助かる確率は $\frac{1}{3}$ だった。今、助かるのは自分とCのどちらかになったので、助かる確率は $\frac{1}{2}$ になった」と喜んだ。

さて、看守の返事を聞いた後の囚人Aの助かる確率はどれだけか？

ただし、王様は意図的に恩赦にする者を決めているわけではない（等確率で恩赦にする者を選

んでいる) こと. 看守はうそをつかないこと. 囚人B, Cがともに処刑される場合には $1/2$ ずつの確率でどちらかの名前を言うものとする.

3. 『3囚人問題』の解答

この問題は, 「Bが処刑されるということを知ったという条件のもとで, Aが助かる確率」を求めるわけだから, 明らかに条件付確率の問題である. 確率の記号を次のように定める.

$P(A)$: Aが助かる確率

$P(b)$: Bが処刑されると看守から教えてもらう確率

$P(A|b)$: Bが処刑される看守から教えてもらい, かつAが助かる確率

$P_b(A)$: Bが処刑される看守から教えてもらう条件のもとで, Aが助かる確率

すると題意より, 3人とも等しい確率で王様から恩赦を受けるから,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

看守はうそをつかないから,

$$P_B(b) = 0, P_C(b) = 1$$

Aが助かる場合は, 看守は「Bが処刑される」または「Cが処刑される」を等確率で言うから,

$$P_A(b) = P_A(c) = \frac{1}{2}$$

求める確率は $P_b(A)$ であるから,

$$P_b(A) = \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \dots\dots$$

ここで, $P(b) = P(A|b) + P(B|b) + P(C|b)$

$$= P(A)P_A(b) + P(B)P_B(b) + P(C)P_C(b) \quad \text{であるから, ①より}$$

$$P_b(A) = \frac{P(A)P_A(b)}{P(A)P_A(b) + P(B)P_B(b) + P(C)P_C(b)} \dots\dots$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

4. ベイズの定理

上の3囚人問題の解答の中で出てきた②式が, ベイズの定理と呼ばれているものである. すなわち, ベイズの定理をきちんと説明すると次のようになる.

互いに排反な事象 A_1, A_2, \dots, A_n があって、そのうちの少なくとも1つは必ず起こるものとする。すなわち、 $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$ とする。このとき、任意の事象 B に対して次の式が成り立つ。

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}$$

$$= \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

条件付確率は、人間の常識的な直感と実際の確率とが異なる場合に引き合いに出されることが多く、この例は上の3囚人問題のほかにも、下の入試問題（問題. 3）などいろいろ考えられる。

5. 安易に「同様に確からしい」としてしまうことに対する危険性

普段、確率の計算をするときは何気なく、「ある事象の起こる場合の数」を「全体的場合の数」で割って計算している。しかし、これはあくまでも「各根元事象が同様に確からしい」という前提があるから、このような計算が可能なのである。この「同様に確からしい」というキーワードが頭の中から消えてしまったとき、解答者（生徒、教師の両方）はしばしば痛い思いをするのである。実際に、大人（解答作成者、あるいは出題者も？）が間違えた例を紹介する。

（問題. 1）

12人の人がボールを1個ずつ持っていて、順番にA, B, Cの箱のいずれかに入れていくものとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、同名の人はなく、空の箱があってもよいものとする。

- (1) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合、ボールの入り方は何通りあるか。
 - (2) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合、Aの箱にちょうど8個のボールが入る入り方は何通りあるか。
 - (3) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合、A, B, Cの箱に入ったボールの個数の組合せは何通りあるか。
 - (4) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合、8個以上のボールが入る箱がある確率を求めよ。
- （平成12年：長崎総合科学大学）

次の解答は、旺文社の全国大学入試問題正解の中に掲載されている解答（誤答）である。

- (1) 1番目の人がボールを3つの箱に入れる方法は3通りあり、その各々に対して2番目の人が3つの箱に入れる方法も3通りある。このようにして、12人それぞれ3通りずつあるから、ボールの入れ方は全部で、

$$3^{12} = 531441 \text{ (通り)}$$

- (2) 12個のボールの中のどの8個をAの箱に入れるかが ${}_{12}C_8$ 通り
残り4個のボールをBまたはCの箱に入れる方法は 2^4 通り

よって、求めるものは、

$${}_{12}C_8 \cdot 2^4 = 7920 \text{ (通り)}$$

(3) A, B, C の箱に入るボールの個数をそれぞれ a, b, c とすると、

$$a + b + c = 12 \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これを満たす 0 以上の整数解 (a, b, c) の個数が求めるものであるが、それは、異なる 3 種類の a, b, c の中から重複を許して 12 個を組合せる方法の数に等しい。

よって、

$${}_3H_{12} = {}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = 91 \text{ (通り)}$$

(4) まず、A の箱に 8 個のボールを入れる。 $a - 8 = a'$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より

$$a' + b + c = 4 \quad (a' \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$$

これを満たす 0 以上の整数解 (a', b, c) の組は

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

B または C に 8 個以上のボールを入れる場合も同じであるから、求める確率は

$$\frac{15 \times 3}{91} = \frac{45}{91} \quad (= 0.4945 \cdots)$$

この解答の誤っているところは(4)である。感覚的に考えても、同じ箱に 8 個以上もボールが入るといふかなり偏っている確率が 50% 近くもあるわけがないと感じてしまう。この問題の構成を見ると、(3)で重複組合せの問題をあたかも(4)の誘導としていることから、出題者も「同様に確からしい」ということをうっかりしていたと勘繰りたくなってくる（これを引っかけ問題として出題したとすれば、出題者は相当な意地悪な人かもしれない）。

(4)を解くとき、ボールに名前を書こうと書くまいと確率の問題として考えるのであれば、ボールは 1 個 1 個異なるものとして扱っていかなければ、同様に確からしいということが保証できない。例えば、A の箱に 12 個のボールが入っている場合と、A の箱に 11 個のボールが入っていて残り 1 個が B の箱に入っている場合は同様に確からしくない。すなわち、 $(12, 0, 0)$ の整数解と $(11, 1, 0)$ の整数解は等確率ではないのである。もっと身近な例で言えば、袋の中にいくつか入っている赤球と白球の中から球を取り上げるというような確率の問題を考えるとき、たとえ見た目では区別できない色の同じ球でも、白 1, 白 2, ……というように異なるものとして計算しなければならない。

上の問題の(4)の正しい解答は次の通りである。

各根源事象が同様に確からしいことを保証するために、ボールに名前を書いてそれぞれのボールを異なるものとして計算する。

ボール A の箱にちょうど 9 個のボールが入る入り方は(2)を参考にして、

$${}_{12}C_9 \cdot 2^3 = 1760 \text{ (通り)}$$

同様にボール A の箱にちょうど 10 個, 11 個, 12 個のボールが入る入り方はそれぞれ

$${}_{12}C_{10} \cdot 2^2 = 264 \text{ (通り)}$$

$${}_{12}C_{11} \cdot 2^1 = 24 \text{ (通り)}$$

$${}_{12}C_{12} \cdot 2^0 = 1 \text{ (通り)}$$

よって B, C の箱に 8 個以上入る場合も同様であるから、求める確率は

$$\frac{(7920 + 1760 + 264 + 24 + 1) \times 3}{3^{12}} = \frac{9969}{3^{11}} = \frac{3323}{3^{10}} = \frac{3323}{59049} (= 0.0562\dots)$$

以前、定期考査で次の問題を出題したことがあったが、授業では例題を説明するたびに、「同様に確からしいから……」確率の計算ができるということを話してきたが、生徒の出来が思うようによくなかったことを記憶している。

(問題. 2)

3人でじゃんけんをするときについて、次の問いに答えよ。

- (1) 人を区別しないとき、手の出し方は何通りあるか。
 (2) 勝負が決まらない(あいこになる)確率を求めよ。

この問題に対する次の解答には誤りがある。その誤りを指摘し、その理由を述べ、さらに正しい解答を作れ。

(解答)

- (1) 以下、グー、チョキ、パーをグ、チ、パと略して書くと、手の組合せは
 (グ, グ, グ) (チ, チ, チ) (パ, パ, パ) (グ, グ, チ)
 (グ, グ, パ) (チ, チ, グ) (チ, チ, パ) (パ, パ, グ)
 (パ, パ, チ) (グ, チ, パ) の計 10 通。

- (2) (1) の 10 通のうち、勝負が決まらないのは次の 4 通りある。

(グ, グ, グ) (チ, チ, チ) (パ, パ, パ) (グ, チ, パ)

よって、求める確率は $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

正しい答えはもちろん $\frac{1}{3}$ であるが、なぜ上記の解答が誤りであるのかきちんと説明できていた解答が少なかった。生徒に最初に確率を教えるときには、「同様に確からしい」ということをしっかり徹底させていかなければ、たとえ確率の答えが計算できても、本質的なことがきちんと理解していないのではないかと思ってしまうのである。

6. 過去の入試問題から

ベイズの定理を使った解答はたいへん鮮やかで、かつ興味深いものである。過去には次のような問題も入試に出題されていた。しかし現在は、条件付確率は数学Cに追いやられ、しかも数学Cを受験科目としている大学も「ただし確率は除く」という具合に、なかなか条件付確率の問題が日の目を見ることはなくなった。ベイズの定理といっても、例えば3囚人問題の解答の①式から②式まではうまく誘導問題を作れば、何も「ベイズの定理」を知らなくても大丈夫ではないだろうか。最近の入試問題、および学習指導要領の変遷を見ると、だんだん確率や統計が軽視されていく流れになっていないか個人的に心配である。

(問題. 3)

5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が、正月にA, B, C 3軒を順に年始回りをして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。2軒目の家Bに忘れてきた確率を求めよ。(昭和51年:早稲田大)

(解答)

帽子を忘れるという事象を F とする。また A, B, C の家に忘れてきた事象をそれぞれ A, B, C とすると、求める確率は $P_F(B)$ である。

$$P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} \quad \dots\dots$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } P(F) &= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) \\ &= P(A)P_A(F) + P(B)P_B(F) + P(C)P_C(F) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

$$(\because P_A(F) = P_B(F) = P_C(F) = 1)$$

であるから、①より

$$\begin{aligned} P_F(B) &= \frac{P(B \cap F)}{P(A) + P(B) + P(C)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B) + P(C)} \quad \dots\dots \\ &= \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{25}{125} + \frac{20}{125} + \frac{16}{125}} \\ &= \frac{4}{25} \div \frac{61}{125} \\ &= \frac{20}{61} \quad \left(\frac{1}{3} \text{ ではないのがミソ!} \right) \end{aligned}$$

7. 『3囚人問題』をどう生徒にわかりやすく教えていくか

本校の教育課程では、工業系も商業系（本校は電気システム科，建設科，情報ビジネス科の3学科からなる併置校である。）も数学Cを履修しないことになっている。では、なぜ生徒は3囚人問題を質問してきたのか。それはたまたまインターネットを見て興味に思ったからであったが、注目すべきことは、確率の問題は問題文が読みやすく（数学的な専門用語は必要としない）、問題内容も身近なものをテーマにできるということである。今回の3囚人問題は非現実的な話ではあるが、物語調で謎めいた要素もあり思わず引き込まれるものである。

そういう問題を生徒から質問されたらどう答えたらいいだろうか。本校の生徒に対しては、数学的な説明（ベイズの定理を用いた計算）はできない。私なりに数学的な知識を用いない説明を考えてみた。

(説明. 1)

考えられる可能性をすべて書き上げていくと

A, Bが死刑になる場合

A, Cが死刑になる場合

B, Cが死刑になる場合

①, ②については, 看守のセリフは決まっている (①の看守のセリフは「Bが処刑される」, ②の看守のセリフは「Cが処刑される」) が, ③の場合は看守のセリフはそれぞれ2分の1の確率で「Bが処刑される」と言ってみたり「Cが処刑される」と言ってみたりするわけである. ①, ②, ③はどれも等しい確率で起こる中で, ③だけが看守のセリフで2つに分けられるので, 看守のセリフも含めて, 考えられる可能性をすべて書き上げていくと,

~~(1)~~ A, Bが死刑になって, 看守が「Cが処刑される」と言う場合

~~(2)~~ A, Bが死刑になって, 看守が「Cが処刑される」と言う場合

~~(1)~~ A, Cが死刑になって, 看守が「Bが処刑される」と言う場合

~~(2)~~ A, Cが死刑になって, 看守が「Bが処刑される」と言う場合

~~(1)~~ B, Cが死刑になって, 看守が「Bが処刑される」と言う場合

~~(2)~~ B, Cが死刑になって, 看守が「Cが処刑される」と言う場合

ここで, ①と②をそれぞれ重複して書いたのは, そうすることで, 上の6つの場合がどれも同じ確率で起こるからである (上の6つの場合はそれぞれ同様に確からしいから).

したがって, BとCのどちらが処刑されるのかという質問に対して仮に「Bが処刑される」と答えたとき, 可能性としては ~~(1)~~, ② ~~(2)~~, ③ ~~(1)~~ の3つの場合が考えられる. このうち, Aが助かるのは ~~(1)~~ のときに限るから, 答えは3分の1.

(説明. 2)

Aの質問の仕方が卑怯である. 「BとCのどちらが処刑されるか」という聞き方をしているので, Aには何のリスクもない. 仮に「Bが処刑される」と言われても, それはCの助かる確率が3分の1から3分の2に上がるだけで, Aの助かる確率は何ら変わらない.

もし, Aの質問を, BとCの2人の中で限定しないで, ただ単に「Bは処刑されるか」という質問をして, 「Bが処刑される」と言われれば, Aの助かる確率は当然3分の1から2分の1に上がる. もし「Bは処刑されない」と言われれば, Aは100%処刑されるわけで, 助かる確率は0である. 自分もリスクを負う質問をしなければ, 助かる確率は変わらないのである. つまり, 自分が有利になりたかったら, それなりのリスクは背負わなければならないのはどの社会でも同じことなのである (楽をして得をするなんてことはありえない!).