第６３回：数実研レポート
回転体の側面積

平成 19 年 12 月 3 日

留萌千望高校教諭　佐川　大樹

１．はじめに

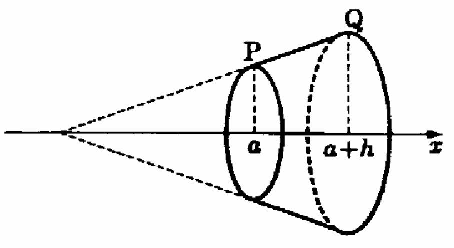
今年の北海道大学の入試（後期）で次のような問題が出題された．

（問題．２）

$y = f(x)$ を正の値をとる微分可能な関数で $f'(x) > 0$ とする．

(1)　$h > 0$ とする．xy 平面上の２点 P (a , $f(a)$) , Q ($a+h$, $f(a+h)$)を結ぶ線分を x 軸のまわりに１回転させる．そうして得られた円錐の一部の面積 $S(h)$ を求めよ．

(2)　$\lim_{h \to 0} \dfrac{S(h)}{h} = 0$ を求めよ．



答えは

(1)　$S(h) = \pi\{ f(a+h) + f(a)\}\sqrt{h^2 + \{ f(a+h) - f(a)\}^2}$

(2)　$\lim_{h \to 0} \dfrac{S(h)}{h} = 2\pi f(a)\sqrt{1 + \{ f'(a)\}^2}$

であるが，実は(2)の答えを積分すると回転体の側面積が得られる．すなわち，

$y = f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$) を正の値をとる微分可能な関数とする．この曲線を x 軸のまわりに１回転させたときの回転体の側面積 S は，次式で求められる．

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \{ f'(x)\}^2}\, dx$$

この問題を通して，いくつか疑問点が生じてきたので，これらを考えてみたい．

（A）　なぜ(2)の答えを積分すると，側面積が得られるのか（分割の考え方からすると当然のような気もするが……）．しかも，なぜ h で割る必要があるのか．

（B）　回転体の体積を求めるときは，円柱の体積の積み重ねで求めてきたが，回転体の側面積も円柱の側面積の積み重ねの考え方が適用できるのか．

（C）　回転体の体積を求めるときに，円錐台の体積の積み重ねで求めてもよいか．また，円柱の体積の積み重ねでの考え方とどう違うのか．

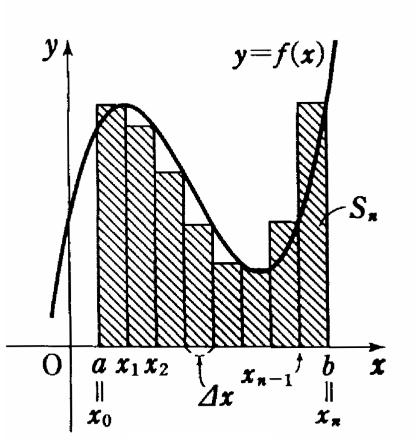
（D）　回転体の側面積の公式 $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \{ f'(x)\}^2}\, dx$ と，弧の長さの公式 $l = \int_a^b \sqrt{1 + \{ f'(x)\}^2}\, dx$ は式の形が似ているが，図形的な意味合いは何か．

２．式の見方

曲線 $y = f(x)$（ただし，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) > 0$ とする ）と $x = a$, $x = b$ で囲まれた面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

で求められる．これは２点 (x_k , 0) , (x_k , $f(x)$) を結ぶ線分を縦，２点 (x_k , 0) , ($x_k + \Delta x$, 0) を結ぶ線分を横とする長方形を考え，この長方形を積み重ねていくことで，題意の図形を作っていくと考える．当然，長方形を並べた図形と，題意の図形とは若干の隙間が生じるが，Δx を限りなく小さくすることで誤差のない図形に近づけることができるというのは直感的に理解できる．つまり，



（図１）

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \text{（ただし，} x_0 = a \text{ , } x_{k+1} = x_k + \Delta x \text{ , } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ とする）}$$

これが区分求積法の考え方である（（図１）参照）．ここで機械的に

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \int_a^b \quad , \quad f(x_k) \Rightarrow f(x) \quad , \quad \Delta x \Rightarrow dx$$

と書き直せば，①が得られる．ということは，①の公式の dx は x で積分するという意味のほかに，微小の幅 Δx という意味もあるということを押さえておかなければならない．

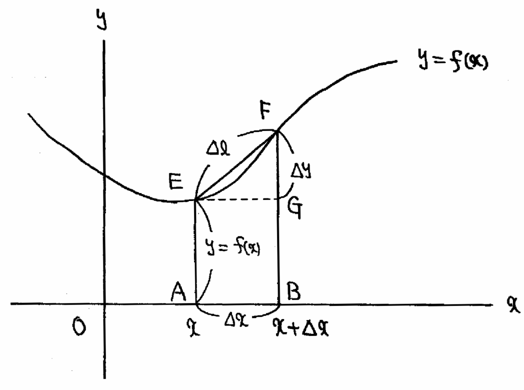
この考え方がしっくりいくと，弧の長さを求める公式も自分で容易に作ることができる．右図で，x 軸方向，y 軸方向の微小の増加分をそれぞれ Δx , Δy とおき，弧長の微小の増加分を Δl とおく．このとき，三平方の定理より，

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

で，これを積み重ねたものが弧の長さ l であるから，

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad \cdots\cdots ②$$

よって，
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$



（図２）

３．回転体の側面積

まず（図２）において，E (x , $f(x)$) , F ($x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$) , A (x , 0) , B ($x + \Delta x$, 0) とおき，EF の延長と x 軸との交点を C とおく．また，点 C を頂点として AE，BF をそれぞれ底面の半径とする円錐をそれぞれ P，Q とおく（（図３）参照）．

　このとき，△CAE ∽ △CBF であるから，CE : CF = AE : BF
すなわち， $l:(l+\Delta l)=y:(y+\Delta y)$ より，

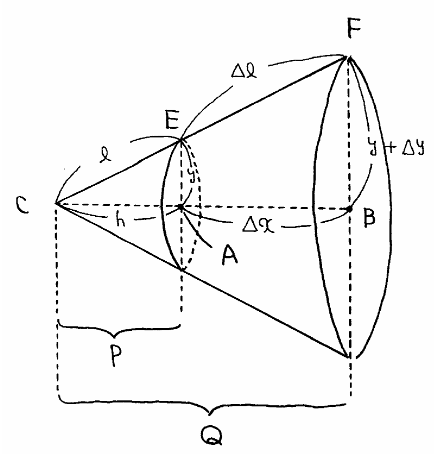
$$l = y\cdot\frac{dl}{dy} \quad \cdots\cdots③$$

よって，円錐 P の側面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi y\cdot l = \pi l y \quad \cdots\cdots④$$

また，（円錐 P）∽（円錐 Q）で，相似比は
$y:(y+\Delta y)$ であるから，円錐 Q の側面積 S_2 は

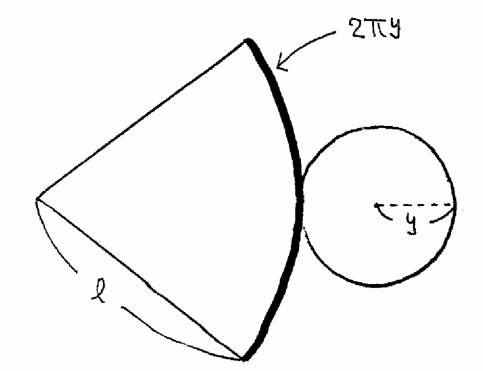
$$S_2 = \left(\frac{y+\Delta y}{y}\right)^2\cdot S_1$$
$$= \frac{y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2}{y^2}\cdot S_1$$



（図３）

よって，円錐 Q から円錐 P を除いた円錐台の側面積 ΔS は

$$\Delta S = S_2 - S_1$$
$$= \left(\frac{y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2}{y^2}-1\right)\cdot S_1$$
$$= \frac{2y\Delta y+(\Delta y)^2}{y^2}\cdot \pi l y \quad (\because\ ④)$$
$$= \frac{2y\Delta y+(\Delta y)^2}{y^2}\cdot \pi\cdot\left(y\cdot\frac{\Delta l}{\Delta y}\right)\cdot y \quad (\because\ ③)$$
$$= 2\pi y\Delta l + \pi\Delta l\Delta y \quad \cdots\cdots⑤$$



（図４）

であるから，$a \leqq x \leqq b$ の部分における回転体の側面積 S は

$$S = \sum 2\pi y\Delta l + \sum \pi\Delta l\Delta y \quad \cdots\cdots⑥$$

⑥の右辺の第２項について，$\Delta l\Delta y$ は Δy に比べて高位の微小量であるから $\sum \pi\Delta l\Delta y$ は 0 に収束すると考えてもよい．したがって，

$$S = \sum 2\pi y\,\Delta l = \sum 2\pi y\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$= \sum 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x$$
$$= \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \quad \cdots\cdots⑦$$

（図３）においては，$\Delta y > 0$ として話を進めたが，$\Delta y < 0$ のときも同様にして⑥が得られ，最終的に⑦が得られる．

（例）半径 r の球の表面積

$x^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに回転すると考える． $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ とすると，

$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ であるから，表面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx = 4\pi r^2
\end{aligned}
$$

４．疑問（Ａ）の答え

疑問（A）を解決するためには，②の変形がヒントになる．ΔS を積み重ねたものが回転体の側面積 S であるから，

$$S=\sum\Delta S=\sum\frac{\Delta S}{\Delta x}\cdot\Delta x \quad\cdots\cdots⑧$$

ここで Δx は北大の問題では h に対応し，ΔS は北大の問題では $S(h)$ に対応するから，

$\lim_{h\to 0}\dfrac{S(h)}{h}=2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ （これは x の関数である．また，北大の問題で a を x に書き直してある）を x で積分すれば，回転体の側面積が得られる．したがって，なぜ h で割るかという疑問に対しては，⑧で Δx を作るためということになる．

５．疑問（Ｂ）の答え

回転体の側面積の公式⑦を導く際に，台形を回転させることによって側面積を求めたが，何もそんな面倒なことをしなくても，長方形を回転させることによって側面積を求められないかという疑問が出てくる．

さて,（図２）において長方形 AEGB を x 軸について回転すると底面の半径が $f(x)$,高さが Δx の円柱ができる．この側面積は $2\pi f(x)\Delta x$ ……⑨　となるから，⑤との誤差は

$$
\begin{aligned}
⑤-⑨ &= 2\pi y\Delta l+\pi\Delta l\Delta y-2\pi f(x)\Delta x \\
&= 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x-2\pi y\Delta x+\pi\Delta l\Delta y \\
&= 2\pi y\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}-1\right)\Delta x+\pi\Delta l\Delta y \quad\cdots\cdots⑩
\end{aligned}
$$

となる．先ほどと同様にして，$\Delta l\Delta y$ は Δy に比べて高位の微小量であるから，誤差⑩を積み重ねると 0 にはならない．したがって，回転体の側面積を求めるときは，円柱の側面積の積み重ねの

考え方が適用できないということになる（もう少し精度の高い分割が必要ということになる）.

６．疑問（C）の答え

上の議論を眺めてみると，円柱の積み重ねで考えても，円錐台の積み重ねで考えても，その誤差が $\Delta x\Delta y\,,\,(\Delta y)^2$ など高位の微小量を含んでいる項しか現れなければ，どちらの考え方をしてもよいということになる.

（図３）において，円錐 P の体積を V_1 ，円錐 Q の体積を V_2 とおく.（円錐 P）∽（円錐 Q）で，相似比が $y:(y+\Delta y)$ であるから，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi y^2 h \quad , \quad V_2=\left(\frac{y+\Delta y}{y}\right)^3\cdot V_1$$

ここで，△CAE ∽ △CBF であるから，CA : CB = AE : BF ．

すなわち，$h:(h+\Delta x)=y:(y+\Delta y)$ より，$h=y\cdot\dfrac{dx}{dy}$ であることに注意すると，台形 AEFB を回転したときの回転体の体積 ΔV は

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_2 - V_1\\
&=\left(\frac{(y+\Delta y)^3}{y^3}-1\right)\cdot V_1\\
&=\left(\frac{y^3+3y^2\Delta y+3y(\Delta y)^2+(\Delta y)^3}{y^3}-1\right)\cdot\frac{1}{3}\pi y^2 h\\
&=\frac{3y^2\Delta y+3y(\Delta y)^2+(\Delta y)^3}{y^3}\cdot\frac{1}{3}\pi y^2\cdot\left(y\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\\
&=\frac{\pi}{3}\left\{3y^2+3y(\Delta y)+(\Delta y)^2\right\}\cdot\Delta x \quad \cdots\cdots ⑪
\end{aligned}$$

一方，長方形 AEGB を回転したときの回転体の体積は $\pi y^2\Delta x$ ……⑫ であるから，⑪との誤差は

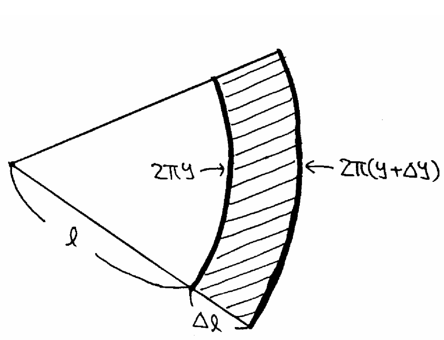
$$⑪-⑫=\frac{\pi}{3}\left\{3y\,\Delta x\Delta y+\Delta x(\Delta y)^2\right\}$$

となり，$\Delta x\to 0$ のとき 0 に収束する.

したがって，回転体の体積については，長方形を回転させて考えても台形を回転させて考えてもどちらでもよいということになる.

７．疑問（D）の答え

これは⑦がそのまま答えになる．つまり，$2\pi y\Delta l$ を積み重ねたものが回転体の側面積になるが，Δl が含まれているから，弧長を求める公式と側面積を求める公式が似てくるのは当然である．なお，図形的には（図５）の斜線部分が $2\pi y\Delta l$ であるが，これは縦が Δl ，横が $2\pi y$ の長方形とみなすことができるということを意味している.



（図５）

８．今後の入試問題の傾向

以前，東大の入試問題で y 軸まわりの回転体の体積を求める公式（バームクーヘン型）を作らせる問題が出題されたことがあった．

（参考．１）

$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする．$y=f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は

$V=2\pi\int_0^1 x\,f(x)\,dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ．

（平成 1 年：東京大）

この問題が入試に登場した最初のバームクーヘン型積分の問題であるかどうかはわからないが，それ以降，たびたびこのバームクーヘン型積分の問題が入試に登場している．

（参考．２）

正整数 l を与える．各正整数 n に対して，関数 $y=x^l\sin nx$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のグラフと x 軸とで囲まれる図形を C_n とする．

(1)　C_n を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_n とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

(2)　C_n を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を W_n とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ を求めよ．

（平成 12 年：東京大）

（参考．３）

媒介変数 t を用いて，$x=t^2$, $y=-t^3+4t^2-5t+3$ ($0 \leqq t \leqq 2$) で表される xy 平面上の曲線 C について，次の問いに答えよ．

(1)　接線の傾きが 0 となる曲線 C 上の点の座標を求めよ．また，曲線 C の概形を描け．

(2)　曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x=4$ で囲まれた図形を D とする．D の面積 S を求めよ．

(3)　D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

（平成 16 年：同志社大・工）

今年の北大で回転体の側面積を求めさせるきっかけとなる問題が出題された．もしかすると今後，回転体の側面積を求めさせる問題がどこかの大学で出題されるかもしれないと勝手に想像している．