第８９回：数実研レポート
「２次不等式は数直線で教えています」

平成 26 年６月７日
野幌高校教諭　佐川　大樹

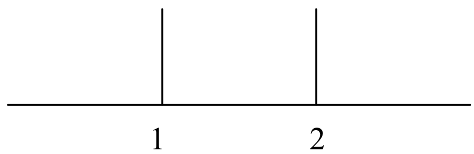
１．はじめに

どの教科書でも，２次不等式の解法は２次関数のグラフを使って説明しています．そのこと自体，何ら問題はありませんが，グラフを描くことすらままならない生徒にとっては，グラフを用いて問題を解こうとすることに苦痛を感じ，拒絶反応を起こす子もいます．２次不等式を解く際に重要なことは，２次関数のグラフの形ではなく，y 座標の符号の変化だけです．そこで私は２次不等式を，数直線を使って機械的に解くように指導しています．この方法は何も２次不等式に限らず，高次不等式や分数不等式にも応用できます．このレポートでは数直線で簡単に不等式を解く方法を紹介します．

２．基本的な解き方

（例１）　$(x-1)(x-2)>0$

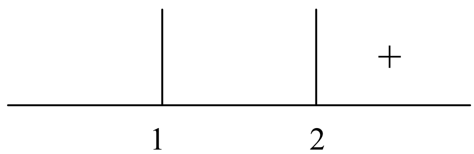
① 不等号を「=」に直して方程式を解く．なお，この解を便宜上「符号の変わり目」と呼ぶことにする．
　この例では $(x-1)(x-2)=0$ より，$x=1\,,\,2$



（図１）

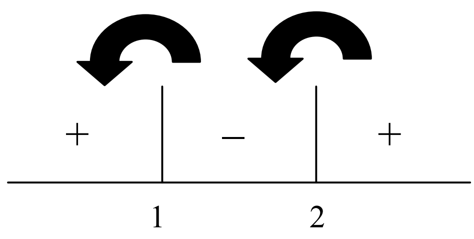
② 数直線で，符号の変わり目のところに区切りの意味の縦線を入れ，数直線を３つの領域に分ける（（図１）参照）.

③ 左辺の x に任意の数を代入して符号を調べる．例えば，$x=100$ を代入すると，明らかに $(100-1)(100-2)>0$ となる．$x=100$ は数直線で一番右側の領域なので，この部分の符号が「+」となる（（図２）参照）.



（図２）

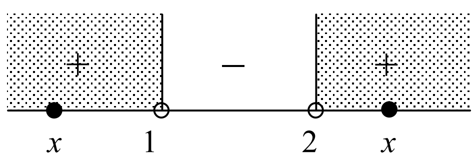
④ $x=2$ で符号が変わるので，その隣（中央）の領域の符号は「−」．$x=1$ でまた符号が変わるので，その隣（左端）の領域の符号は「+」となる（（図３）参照）.



（図３）

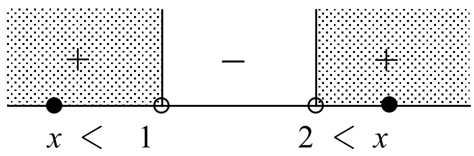
⑤ 問題の不等式の不等号の向きは「>0」とあるので，0 より大きい「+」の部分が求める x の範囲である（（図４）参照）.

⑥ 答えは　$x<1\,,\,2<x$　である（答えの不等号に「=」が付くかどうかは，問題の不等式の不等号に合わせる）.



（図４）

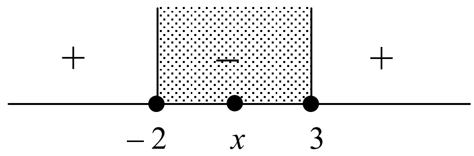
（注）答えの書き方は，数直線を使って機械的に書くことができる．数直線は右へ行くほど数が大きくなることに注意すると，求める x は色のついた部分（打点部）にあるので，x と符号の変わり目の間に不等号「<」を入れるとよい（（図５）参照）．



（図５）

（例２）　$(x+2)(x-3) \leqq 0$

符号の変わり目は $x=-2, 3$ であるから，（図６）より答えは，$-2 \leqq x \leqq 3$ である．



（図６）

３．実際の授業において

実際の授業では１回目は２次関数のグラフを描いて説明しますが，「いちいちグラフを描くのはたいへんだね」ということで，２回目からは「簡単な解き方があるよ」と，この解き方を紹介します．ただし，数直線による解き方も説明が長いし手順も多いので，授業ではプリント（８頁以降参照）を使いながら，もっとシンプルに説明するように心がけています．生徒への問いかけについては次のようにしています．（例２）の $(x+2)(x-3) \leqq 0$ を例にとると，

「まず，符号の変わり目は，$+2$ と -3 の符号を反対にして，-2 と $+3$ だね」

「数直線に書くときは，大きい方が右だから，$+3$ が右だね」

「次はかっこの前を見ると，何も書いてないね．これは $+(x+2)(x-3)$ の $+$ が省略されているから，３つの部屋の右からプラス，マイナス，プラスと書くよ．」

← これは**２．基本的な解き方**の③の部分に該当します

「次の不等号の向きを見るよ．$\leqq 0$ となっているから，左辺は 0 より小さいということだね．0 より小さいからマイナスだ．マイナスの部分に色を塗ろう」

「色を塗ったところに x を記入し，符号の変わり目と x の間に $\leqq$ を入れると答えが完成するんだね」

とまあ，こんな感じです．ここまで機械的になると本質的な理解からはほど遠くなりますし，ちょっと形を変えるととたんに手が止まってしまいます（たとえば，$(x+2)(3-x) \leqq 0$ と出題すると，本校の生徒だったら $-3 \leqq x \leqq -2$ と答えるのではないでしょうか）．しかし，本校のように数学が極端に苦手な生徒が多い場合，とりあえずやってみてできたという経験が次へのモチベーションにつながると信じてやっています．

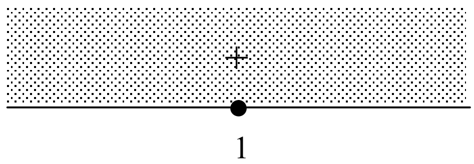
4．特殊な２次不等式への応用

本校で扱う２次不等式のパターンは，左辺が $(x-\alpha)(x-\beta)$ の形（ただし，$\alpha \neq \beta$ とする）に因数分解されるものしかやりませんが，実際には２次不等式の左辺の判別式が 0 または負のときのように特殊なタイプも存在します．こうした問題を解決するためには次の補題が必要です．

> （補題）
>
> 不等式 $f(x) > 0$ または $f(x) < 0$ において，$f(x)$ が $(x-a)^n$ を因数に持つとする．このとき，n が奇数ならば $x=a$ は符号の変わり目となり，n が偶数ならば $x=a$ は符号の変わり目とならない．

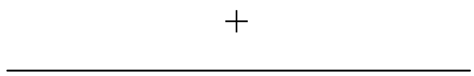
（例４）　$(x-1)^2 \geqq 0$

符号の変わり目の候補は $x=1$ であるが，上の補題によりこれは符号の変わり目にはならない．したがって，符号の変わり目は存在しないので，x の全範囲にわたって左辺の符号は同じ符号になる．$x=1$ も与えられた不等式を満たすので，答えは「すべての実数」となる．


（図７）

（例５）　$x^2-x+3<0$

$x^2-x+3=0$ に実数解を持てば，その解が符号の変わり目となるが，この方程式には実数解がなく，よって符号の変わり目もない．（例４）と同様に x の全範囲にわたって左辺の符号は同じ符号になる．任意の x（たとえば $x=0$ ）は不等式を満たさないので，答えは「解なし」となる．

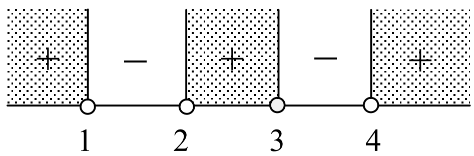

（図８）

5．高次不等式，分数不等式への応用

この考え方は何も２次不等式のみにとどまらず，３次以上の不等式や分数不等式にも応用できます．もっとも左辺が因数分解の形で表されることが大前提ですが，グラフが描けなくても構わないのが強みです．

（例４）　$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$

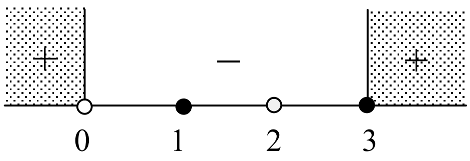
符号の変わり目は $x=1, 2, 3, 4$ であるから，答は $x<1,\ 2<x<3,\ 4<x$ である．


（図９）

（例５）　$\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x(x-2)^2} \geqq 0$

まず分母を 0 にするような x の値は定義されないことに注意する（ここでは $x=0, 2$）．次に，

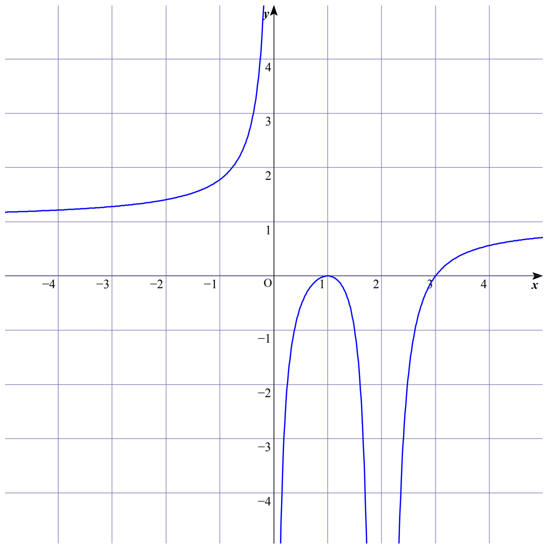
$(x-1)^2, (x-2)^2$ とあるからは $x=1, 2$ は符号の変わり目ではない．したがって下の（図１０）が得られるから，答は $x<0, x=1, 3 \leqq x$ である．



（図１０）

（注）Grapes で $y=\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x(x-2)^2}$ の

グラフを描くと（図１１）が得られました．



（図１１）

6．入試問題への応用

基本的に入試問題で高次不等式や分数不等式が出題されるときは，おそらくグラフを描くことによって答えを出すパターンがほとんどだと思います．しかし，不等式を解くことがメインではなく，問題を解く過程で高次不等式や分数不等式が出てくる場合があります．そんなときは数直線の解き方がたいへん有用です．

（問題）

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

（平成 25 年：京都大・文）

一般的には $f(x)=t$ とおいて，2 次関数の問題として解くと思います（市販の問題集ではほとんどすべてこちらの解き方をしていました）．しかし，試験会場で緊張のあまり，まともに合成関数を計算して 4 次関数の問題として解く受験生がいたとしても何ら不思議ではありません．そこであまりほめられたものではないことを承知の上で，直接，合成関数を計算する方法で解いてみます（もっとも，合成関数の微分を利用する冷静さは必要なのですが……）．

（解）　$g(x)=f(f(x))$ とおく．$f'(x)=(x+2)+(x+a)=2x+(a+2)$ より

$$
\begin{aligned}
g'(x)=f'(f(x))f'(x) &= \{2f(x)+(a+2)\}\{2x+(a+2)\} \\
&= \{2(x+a)(x+2)+(a+2)\}\{2x+(a+2)\} \\
&= \{2x^2+2(a+2)x+(5a+2)\}\{2x+(a+2)\}
\end{aligned}
$$

よって，$g'(x)=0$ となるのは，

$2x^2+2(a+2)x+(5a+2)=0$ ……① のときか，または $x=-\dfrac{a+2}{2}$ のときである．

①の判別式を D とおくと，

$$D/4 = (a+2)^2 - 2(5a+2) = a^2 - 6a \quad より$$

$a \geqq 2$ と合わせて考えると，次の３つの場合に分けられる.

（ア）$2 \leqq a < 6$ のとき

$g'(x) = 0$ の実数解は $x = -\dfrac{a+2}{2}$ のみで，

任意の x について（①の左辺）> 0 であるから，

$g(x)$ の増減表は右のようになる.

x	……	$-(a+2)/2$	……
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

（イ）$a = 6$ のとき

①は重解を持ち，その解は $x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2(a+2)}{2} = -\dfrac{a+2}{2}$ より，$g'(x) = 0$ は３重解

$x = -\dfrac{a+2}{2}$ を持つ．よって，$g(x)$ の増減表は（ア）のときと同じになる.

以下，$2 \leqq a \leqq 6$ で考える.

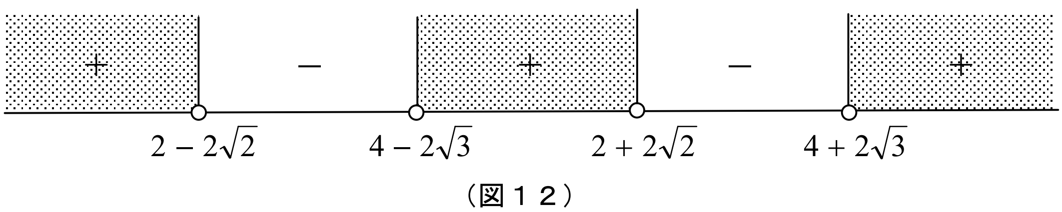
任意の x について，$g(x) > 0$ となるためには，$g\left(-\dfrac{a+2}{2}\right) > 0$ ……②　となればよい.

$$f\left(-\frac{a+2}{2}\right) = \left(-\frac{a+2}{2} + a\right)\left(-\frac{a+2}{2} + 2\right) = \frac{a-2}{2} \cdot \frac{2-a}{2} = \frac{-a^2+4a-4}{4} \quad \cdots③ \quad より，$$

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{a+2}{2}\right) &= f\left(f\left(-\frac{a+2}{2}\right)\right) = \left(f\left(-\frac{a+2}{2}\right) + a\right)\left(f\left(-\frac{a+2}{2}\right) + 2\right) \\ &= \left(\frac{-a^2+4a-4}{4} + a\right)\left(\frac{-a^2+4a-4}{4} + 2\right) \\ &= \frac{1}{16}(a^2 - 8a + 4)(a^2 - 4a - 4) \end{aligned}$$

$a^2 - 8a + 4 = 0$, $a^2 - 4a - 4 = 0$ の解がそれぞれ $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$, $a = 2 \pm 2\sqrt{2}$ であることに注意すると，②の解は

$$a < 2 - 2\sqrt{2} \,,\ 4 - 2\sqrt{3} < a < 2 + 2\sqrt{2} \,,\ 4 + 2\sqrt{3} < a \quad となる.$$



（図１２）

$a \geqq 2$ と合わせて，$2 \leqq a < 2 + 2\sqrt{2}$

（ウ）$a>6$ のとき

①は異なる２つの実数解 $x=\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-6a}}{2}$ を持つ．この２つの解を $x=p\,,q$ とおく（ただし，$p<q$ とする）．

このとき， $p<-\dfrac{a+2}{2}<q$ であるから，$g(x)$ の増減表は下のようになる．

x	……	p	……	$-(a+2)/2$	……	q	……
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗		↘		↗

また，$f(-x-a-2)=\{(-x-a-2)+a\}\{(-x-a-2)+2\}$
$=(-x-2)(-x-a)$
$=(x+a)(x+2)=f(x)$ 　より，

$g(-x-a-2)=f(f(-x-a-2))=f(f(x))=g(x)$ 　となるから，$y=g(x)$ のグラフは $x=-\dfrac{a+2}{2}$ について対称である．よって，$g(p)=g(q)$

以上より，任意の x について，$g(x)>0$ となるためには，$g(p)>0$ となればよい．

①より $2p^2+2(a+2)p+(5a+2)=0$ に注意すると，

$$f(p)=(p+a)(p+2)=p^2+(a+2)p+2a$$
$$=\frac{1}{2}\{2p^2+2(a+2)p+(5a+2)\}-\frac{1}{2}a-1=-\frac{a+2}{2}$$

よって，$g(p)=f(f(p))=f\left(-\dfrac{a+2}{2}\right)=-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2$ 　（∵③より）

となるから，$g(p)>0$ となるような a は存在しない．

以上より，答えは $2\leqq a<2+2\sqrt{2}$ である．

7．最後に

この解き方は，私が浪人生だったころ，当時，代ゼミの講師だった矢木哲雄先生から教わりました．予備校の授業は高校の授業とは違った切り口で，数学以外でも物理の問題を微分・積分で解くことや，英単語を構成する接頭語・接尾語それぞれに意味があることを知ったのも予備校の授業が最初でした．私にとっては浪人時代の 1 年間はとても苦しくはありましたが，学問の奥深さを知りました．

矢木先生の授業で一番印象に残っていることは，先生が授業中に正 12 面体の体積をどのような方法でもよいから求めなさいという課題を出されたことです．私は透明のプラ板を買ってきて実際に正 12 面体を作り，いろいろな角度からながめ，2 週間くらいかかって解きました．先生のところに報告に行くと，君が十何人目の正解者だねと言われ少し誇らしげな気持ちになったことを覚えています．正 12 面体の体積の出し方は何通りもあるとおっしゃいましたが，私は正五角錐の体積 12 個分の解き方しか思い浮かびませんでした．矢木先生の授業は高校数学の枠にとらわれず，しばしば大学の数学にも触れていただき，先生から受けた影響はとても大きいと思います．

数直線による解き方のメリットとしては，グラフに頼らないというのはもちろんですが，その後，数学Ⅱで学習する３次関数の増減表を作成するときに，「そういえば２次不等式のところで，『プラス，マイナス，プラス』とか『マイナス，プラス，マイナス』というのをやったのを覚えていないかい？」という話ができることです．本校のように数学が極端に苦手な生徒が多い場合，以前学習したことがまったくといっていいほど活かされません（なぜなら，考査が終わればきれいさっぱり忘れてしまうからです）．それでも『プラス，マイナス，プラス』というリズムは何となくでも覚えてもらえていることがまだ期待されます．そういった面からも，私はこの方法で２次不等式を教えるようにしています．

2次不等式　（第1段階）

組　　　番　氏名

（問題）　次の２次不等式を解きなさい．まず符号の変わり目を書きなさい

(1)　$(x-2)(x-3) \leqq 0$

(2)　$(x+7)(x+6) < 0$

(3)　$(x-8)(x+1) > 0$

(4)　$x(x-8) \leqq 0$

(5)　$-(x+2)(x+6) > 0$

(6)　$(x-3)(x+8) < 0$

(7)　$(x-6)(x-8) \geqq 0$

(8)　$-(x-1)(x+6) \geqq 0$

(9)　$-(x+1)(x+6) < 0$

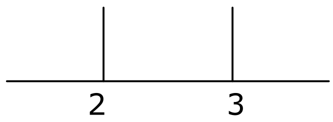
(10)　$(x+4)(x-2) \leqq 0$

2次不等式　（第2段階）

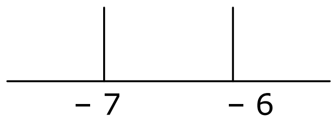
組　　　　番　氏名

（問題）　次の２次不等式を解きなさい．それぞれの部屋に符号（＋，―）を書きなさい

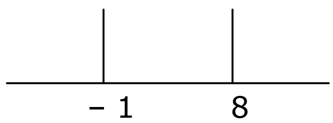
(1)　$(x-2)(x-3) \leqq 0$



(2)　$(x+7)(x+6) < 0$

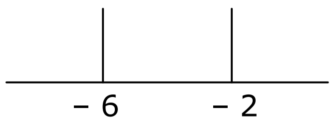


(3)　$(x-8)(x+1) > 0$

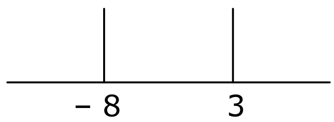


(4)　$x(x-8) \geqq 0$

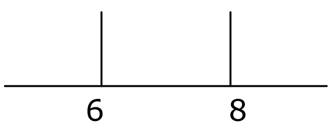
(5)　$-(x+2)(x+6) > 0$



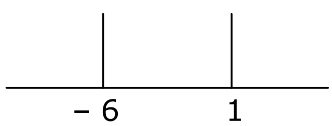
(6)　$(x-3)(x+8) < 0$



(7)　$(x-6)(x-8) \geqq 0$

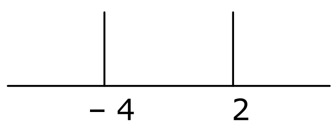


(8)　$-(x-1)(x+6) \geqq 0$



(9)　$-(x+1)(x+6) < 0$

(10)　$(x+4)(x-2) \leqq 0$



２次不等式　（第３段階）

組　　　　番　氏名

（問題）　次の２次不等式を解きなさい．答えの部分に色をつけなさい．

(1)　$(x-2)(x-3) \leqq 0$

＋ | － | ＋

2　3

(2)　$(x+7)(x+6) < 0$

＋ | － | ＋

－7　－6

(3)　$(x-8)(x+1) > 0$

＋ | － | ＋

－1　8

(4)　$x(x-8) \geqq 0$

＋ | － | ＋

0　8

(5)　$-(x+2)(x+6) > 0$

－ | ＋ | －

－6　－2

(6)　$(x-3)(x+8) < 0$

＋ | － | ＋

－8　3

(7)　$(x-6)(x-8) \geqq 0$

＋ | － | ＋

6　8

(8)　$-(x-1)(x+6) \geqq 0$

－ | ＋ | －

－6　1

(9)　$-(x+1)(x+6) < 0$

－ | ＋ | －

－6　－1

(10)　$(x+4)(x-2) \leqq 0$

＋ | － | ＋

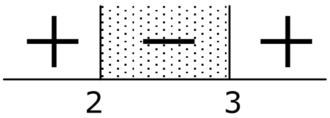
－4　2

２次不等式　（第４段階）

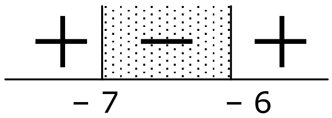
組　　　番　氏名

（問題）　次の２次不等式を解きなさい．最後に答えを書きなさい．

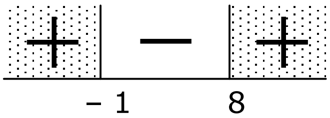
(1)　$(x-2)(x-3) \leqq 0$



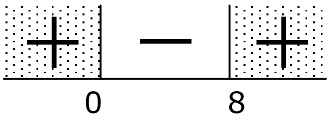
(2)　$(x+7)(x+6) < 0$



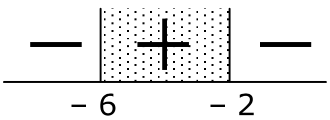
(3)　$(x-8)(x+1) > 0$



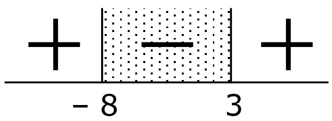
(4)　$x(x-8) \geqq 0$



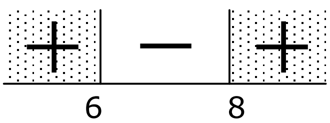
(5)　$-(x+2)(x+6) > 0$



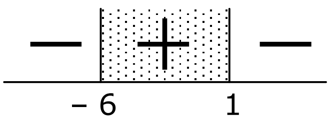
(6)　$(x-3)(x+8) < 0$



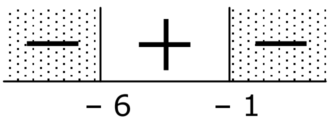
(7)　$(x-6)(x-8) \geqq 0$



(8)　$-(x-1)(x+6) \geqq 0$



(9)　$-(x+1)(x+6) < 0$



(10)　$(x+4)(x-2) \leqq 0$