第８０回：数実研レポート

「数検１級に挑戦！」

平成 24 年 1 月 28 日

野幌高校教諭　佐川　大樹

1　はじめに

私は，現在務めている野幌高校（江別市）に赴任した平成 20 年から，数検 1 級に挑戦し続けています．理由はいろいろありますが，自分の数学の力をにぶらせないこと，そして何よりも私が数学の人間として刺激を受けたいというのが大きいです．今ではライフワークのひとつになっていますが，昨年の 10 月検定でちょうど 10 回目の受検となりましたので，ここで今までの問題を整理して，数検 1 級についてどういうものかをお知らせするとともに，1 級で実際に出題された問題の中で大学入試に関連する問題を紹介したいと思います．

2　もうひとつの動機

現任校の野幌高校でも，前任校の留萌千望高校でも数検の団体受検を行なっていますが，数検の話を生徒にすると決まって生徒から「先生！数検は持っているの？」と聞かれます．一応，準 1 級は北海道に戻ってくる前の年に東京で取ったことはありますが，ここは数学教師として「ああ，1 級を持っているよ」とさりげなく言いたいものです．そうすれば，生徒達のこちらを見る目も変わってきます．私の高校時代を振り返ってもそうでしたが，生徒は「この先生はすごい！」と思える先生についていきたいものです．何をもってすごいとするのかは人それぞれだと思います．部活動でもいいと思いますし，教科指導の中でもコンピュータの部分で他より抜きん出ている人，受験指導で活躍する人，教具・教材作りで光り輝く人など，いろいろな人たちがいていいと思っています．とりあえず，私は数検 1 級を目指すことで（生徒から見て）すごい人の 1 人になりたいと思いました．

3　数検１級とは

数検は財団法人・日本数学検定協会が主催する検定で，だいたい月に一度のペースで行なわれています，去年の 10 月検定が 213 回目の検定になります．歴史は浅く 1992 年にスタートしたと言われています．1 級のレベルは下のように，だいたい大学の教養数学程度とされています．

〈数検 1 級の試験範囲〉

解　析	微分法，積分法，基本的な微分方程式，多変数関数（偏微分・重積分），基本的な複素解析
線形代数	線形方程式，行列，行列式，線形変換，線形空間，計量線形空間，曲線と曲面，線形計画法，二次形式，固有値，多項式，代数方程式，初等整数論
確率統計	確率，確率分布，回帰分析，相関係数
コンピュータ	数値解析，アルゴリズムの基礎
そ の 他	自然科学への数学の応用　など

数検では他の級は団体受検でほぼ毎月のように実施されていますが，1 級に関しては年 3 回（4 月，7 月，11 月）で，しかも個人受検のみです（団体受検では 1 級は受けられません）．北海道では札幌会場と帯広会場の 2 ヵ所で受検することができます．札幌会場はだいたい札幌駅近くの自治労会館か，東札幌のコンベンションセンターで行なわれることが多いようです．帯広会場は実施しているときとそうでないときがあるようです．

さて，数検 1 級は他の級と同じように，1 次（計算技能検定）と 2 次（数理技能検定）に分かれており，両方基準点に達すると晴れて「数検 1 級合格」となります．

1 次は計算問題で答えのみを書きます．制限時間は 60 分で 7 題出題されます，問題の形式はほぼ固まっており，7 題のうちの 1 題（または 2 題）は小問 2 つから成っています．配点は 1 題 1 点，小問 1 つは 0.5 点とカウントしているようです．合格ラインは 5 点以上（約 7 割）です．一方，2 次は記述式の問題で，120 分で 4 題解きます．これも形式が決まっており，1 番から 5 番までの 2 題を選び，6 番，7 番の 2 題が必須問題となっています．配点も 1 次と同様に，1 題 1 点で，合格ラインは 2.5 点以上（約 6 割）です．部分点は設定しているようですが，どういう基準で採点しているのかはわかりません．

学校で数検の試験監督をしたことのある先生方なら，1 次は易しく，2 次は難しいという印象があるかと思いますが，1 級に関しては逆で，合格率で見ると 1 次の合格率は 2 次よりも圧倒的に低いのが普通です．1 次が難しいのは，時間が 60 分と短い上に計算量も多く，また答えだけを書くので，部分点が期待できない（完全解答しか許されない）ところです．しかも，問題のレベルは大学入試でも出題されるようなものも出ますので，とても短時間で解けるものではありません．一方，2 次は必須問題 2 題の相性はありますが（必須問題が 2 題ともできなければ，その時点で不合格！），1 題に充てられる時間が 30 分と多く，また選択問題も選ぶ余裕もあるので，比較的やりやすいと思います．

4 これまでも

数検 1 級を取ってみたいと思ったのは，何も今回が最初ではありませんでした．以前，英語や簿記などいろいろな検定を取ろうと勉強していた時期があり，「数学の教師であるならば，数検の 1 級くらいは取っておかなければ……」と，教材研究の合間に数検対策の勉強もしていたことがありました．「今年こそは数検 1 級を受ける」と毎年決意はしてはいるものの，今まで一度も受検したことはありませんでした．その理由を自分なりに分析してみると……，

① 普段の忙しさを理由に，対策勉強が十分ではなかったから（単なる言い訳）．
② もし落ちてしまったら，数学教師として恥ずかしいというプライドが邪魔をしたから．
③ もし落ちてしまったら，自分が数学教師であるというアイデンティティを否定されるのではないかと恐れたから．

周りから見ればオーバーかもしれませんが，私にとっては③の理由は結構大きな理由でした．数検の 1 級を目指そうと思ったのが平成 13 年の年末．それから実際に挑戦するまでに丸 7 年かかってしまいました．今まではあれこれ考えて行動を起こせずにいましたが，年月が経ちだんだん結果につい

てどうでもよくなり（別に落ちてもクビになることはないですから……），私が江別に引越してきたこともあって，「ま，とりあえず受けてみるか」程度の軽い気持ちで挑戦することにしました．

5 試験対策

一応，受けるからにはそれなりの勉強はしました．数検の１級となると，大学で学ぶ線形代数や微分積分，統計なども試験範囲に入ってきますので，日頃高校数学しか目にしていない私にとっては，大学の数学をもう一度復習し直さなければなりません．一応，高校範囲で解ける問題も出題されてはいますが，毎回，３次以上の行列式や重積分が出題されていることを考えると，無視するわけにはいきません．かといって，今さら定理の証明をじっくり読み進めていくほどの時間もありません．そこで数学の人間としては邪道ですが，定理や公式を理解するよりも使えるようになるということに力を置いて，計算練習を中心に演習を進めていきました．次に挙げる参考書や問題集は，私がよく利用していたものです．

- **基本演習ライブラリー１　基本演習線形代数　（サイエンス社）**
- **基本演習ライブラリー２　基本演習微分積分　（サイエンス社）**

計算技法を身につける際に，たいへんお世話になりました．

- **新訂　微分積分Ⅰ，微分積分Ⅱ，線形代数，確率統計，応用数学（大日本図書）**

これらの５冊は工業高専で教科書として使われている参考書です．当たり前の話ですが，高専は５年制ですから大学の内容も扱います．これらの本は，大学の専門書のように厳密に定理を証明しているわけではなく，高校の教科書のように適度な解説で書かれているので，非常に読みやすいです．もし，現役高校生で大学の数学をかじってみたいという生徒がいれば，私はこういう本を紹介したいと思います．

- **記号法による微分方程式の解き方　金田数正著（内田老鶴圃）**

私が浪人生の頃（約20年前）に，予備校の先生に勧められて買った本です．線形３階くらいの常微分方程式はよく数検に出題されるので，Ｄ演算子による解き方くらいはマスターして臨んだつもりです．

次に過去問ですが，１級になると市販されている本がほとんどなく，対策を練るにも一苦労するのですが，一応，次の３種類（４冊）の過去問を購入することができます．

①　数検１級１次（２次）実物過去問題集　　（エコー出版）
②　数検新過去問題集１級・準１級　　（星雲社）
③　発見Ⅰ－１級攻略－　　（日本数学検定協会）

上の２冊については，数検が公式に発表されている解答をそのまま載せているだけなので，１次については答えのみです（何の解説もありません）．しかも実施時期が古く，特に①に関しては数検が誕生した直後のものと思われますので，多少傾向が違っているようです（私もまだ解いたことはありません）．③は確か数検の公式HPから申し込んだ記憶があります（一般の書店では販売していないようです）．

6　実際に受けてみて

私が初めて数検の１級を受けたのが平成 20 年の 11 月でしたが，このとき驚いたことは

「計算用紙がない！！」

ということでした．特に１次では時間は短いし，計算は面倒だし，計算スペースはほとんどないしということで，あまりにも受検者に冷たいという印象を持ちました（実は，１次の解答用紙は表面しか使わないので，裏面をまるまる計算用紙として使っても採点には何ら影響はしないということが後になってわかりました）．さすがに平成 22 年４月からは A3 サイズの計算用紙が１枚与えられるようになったので，だいぶ楽になりました．

また，毎回受検していて難易度にかなりばらつきがあるという印象を持ちました．これは合格率にも表れています．

数検１級の合格率

検定回	実施年月	１次合格率	２次合格率	１級合格率
161 回	20 年 11 月	3.9 %	22.6 %	3.5 %
167 回	21 年 4 月	14.6 %	24.5 %	10.9 %
171 回	21 年 7 月	9.8 %	9.5 %	5.6 %
176 回	21 年 11 月	12.3 %	50.6 %	9.8 %
184 回	22 年 4 月	38.2 %	25.0 %	21.7 %
190 回	22 年 7 月	7.3 %	21.4 %	5.4 %
197 回	22 年 11 月	7.7 %	19.2 %	5.3 %
206 回	23 年 4 月	4.5 %	15.1 %	3.0 %
209 回	23 年 7 月	6.6 %	16.6 %	3.6 %
213 回	23 年 10 月	1.8 %	23.9 %	2.2 %

数検１級の受検者は全国で毎回だいたい 200～300 人くらいですので，母集団の質に原因があるという見方もできなくもありませんが，やはり問題の難易度にばらつきがあると見た方が自然でしょう．実際，１次にこんな問題が出題されたのは驚きでした．

（問題．１）

$\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい．　　（176 回１次）

また直近の 213 回の２次の問題では，選択問題の１つに次のような問題が出題されました．この問題の正答率が 90.3%と異様に高く，問題のレベルも簡単な２進数の問題で題意さえつかみとることができれば中学生にも解ける問題です．他の選択問題の正答率では１題が 26%程度，残りの３題がおおむね 50%強なので，何を選択するかによって有利・不利が出てしまいます（逆に何を選択すべきかを瞬時に見抜く力も要求されているのかもしれません）．

（問題．２）

英語のアルファベットの大文字 A,B,C,…,Z とスペース（空白，＿で表す），疑問符(？)，感嘆符(！)，コンマ(，)，ピリオド(．)，引用符(”)をそれぞれ 0,1,2,…,31 に対応させ，次のような暗号を考えます．文字・記号を数字に直し，その数字を５桁の２進数で表し（このとき$(11)_2$などは$(00011)_2$のように左側に 0 を加えて５桁とします），上位２桁の数字と下位２桁の数字を入れ替えて得られる数字に対応する文字・記号を，暗号化された文字・記号とします．たとえばＦは

$$F \to 5 \to (101)_2 \to (00101)_2 \to (01100)_2 \to 12 \to M$$

のようにしてＭに暗号化されます．また，逆をたどることにより，ＭをＦに戻す操作を復号といいます．この暗号について次の問いに答えなさい．

(1) 暗号化されても変わらない文字・記号をすべて挙げなさい．

(2) SUUGAKU を暗号化しなさい．

(3) REN＿EB を復号しなさい．（213 回２次）

要は暗号化も復号も同じ手順なため，(2)と(3)は同じことの繰り返しです．なお，試験会場で(3)の問題を解いていく過程で，何となく答えは「KENTEI（検定)」だろうと思っていると，本当に答えがそうなったので思わずニンマリしてしまいました．

ちなみに，数学検定協会では平成 23 年度より，検定体系を新しく整備したのにともない，「実用数学技能検定」の呼称として今まで「数検」と呼んでいたのを，「数学検定」と改めることにしました．つまり，私がこのレポートで盛んに「数検」と言っているのは，今となっては適切ではないということです．ただ，検定体型を整備したからかどうかはわかりませんが，１次の問題のレベルは落ち着いてきたような気がします．

7 実際に出題された問題から

１級を何回か受けてみて大学入試にも関連する問題が結構あることに気づきました．そこで実際に数検で出題された問題と過去の入試問題を見比べて，このレポートを終わりにしたいと思います．

（問題．３）

$\dfrac{10^{30}}{1002}$ を小数で表したとき，一の位，すなわち小数点のすぐ上の桁の数字を求めなさい．

（平成 15 年７月：１次）「数検新過去問題集１級・準１級」より

（類題．３－１）

$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の桁数と，１の位の数字を求めよ．ただし $3^{21}=10460353203$ を用いてよい．

（平成１年：東京大）

上に挙げた数検新過去問題集１級・準１級に載っていた問題ですが，ちょうど東大にこれと似た問題がありました．ちなみに１次の問題は単純計算で，１問あたり約８分で解かなければなりません．いくら記述がなく答えのみの解答とはいえ，「東大の問題を８分で解けというのは……」とビビってしまった記憶があります．

なお，２項定理を使った問題はしばしば出題されていて，他には次のようなものがあります．

（類題．３－２）

15^{2010} を 128 で割ったときの余りを正の数で答えなさい．

（190回１次）

（類題．３－３）

$23^{23^{23}}$ の１の位の数字を求めなさい．

（213回１次）

（問題．４）

$\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{980}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{980}{27}}}$ について次の問いに答えなさい．

(1)　この数はある３次の代数方程式の解の一つです．この方程式を求めなさい．

(2)　(1)で求めた方程式をもとに上の数を簡単にしなさい．（第167回１次）

（類題．４－１）

実数の間の等式

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2 \quad \cdots\cdots (*)$$

を以下の手順に従って示せ．

(1)　係数が整数である x の３次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを１つ求めよ．

(2)　(1)で求めた３次方程式を解くことにより，等式（＊）を証明せよ．（平成21年：東北大）

ちょうど東北大の入試で出題された直後の数検で出た問題です．もちろんただの偶然だとは思いますが，あまりにもタイミングがよすぎるので何かあるのかなとちょっと勘繰ったりもしました．この問題は解と係数の関係を利用して解く問題ですが，他に解と係数の関係を使った問題は次のようなものが出題されました．

（類題．４－２）

x の３次方程式 $x^3+2x^2+4x+7=0$ の３つの複素数解 α,β,γ とするとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めなさい．

（184回１次）

（類題．４－３）

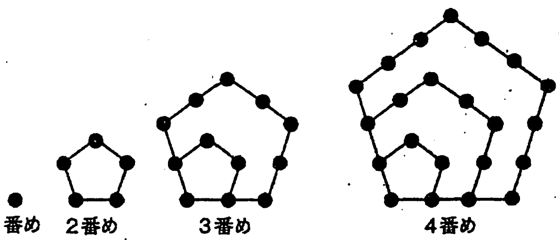
$\cos 40^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\cos 160^\circ$ の値を解とする整数係数の３次方程式を求めなさい．答えは最高次の係数が正，かつ係数全体の公約数が 1 以外にないように標準化した形で求めなさい．

（176回２次）

（問題．５）

１，３，６，…で表される数を三角数，１，４，９，…で表される数を四角数，１，５，12，…で表される数を五角数，…といいます．

下の図は，１番めから４番めまでの五角数を視覚的に表現したものです．n 番めの正五角形の内側には１番め，２番め，３番め，…，$(n-1)$ 番めの正五角形が内接します．同様にして，六角数，七角数，…も定義できます．このとき，次の問いに答えなさい．



五角数

(1) n を３以上の整数とするとき，１番めから n 番めまでの n 角数の和を求めなさい．

(2) m を正の整数とします．このとき１番めを除くすべての $(3m+2)$ 角数は２つの $(m+2)$ 角数の差で表されることを示しなさい．

（第 206 回２次）

（類題．５）

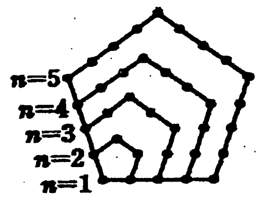
右図のように５角形上に内側から順に点を並べる．内側から n 番目の５角形の周上および内部にある点の個数を a_n とおく．ただし，$n=1$ の場合は１点とする．例えば，$a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=12$, $a_4=22$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 a_n が満たす漸化式を求めよ．

(2) この数列の第 n 項 a_n を求めよ．

(3) $a_n \geqq 2003$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(4) $a_n = \dfrac{m(3m+1)}{2}$ となるような自然数 n, m は存在しないことを示せ．



（平成 15 年：鳥取大）

本屋で立ち読みしたときに鳥取大の問題を見て，どこかで見たことのある問題だなとこの問題に気づきました．ちなみに，私が立ち読みしていた本は「大学入試問題で語る数論の世界」（清水健一著，講談社ブルーバックス）で，大学入試で出題される整数問題をいろいろな角度から焦点を当てた非常に興味深い本です（もちろん即購入しました）．

（問題．６）

$x = 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ を零点にもつ有理数係数の多項式 $P(x)$ のうち，次数が最小かつ最高次の係数が１であるものを求めなさい．

（第 213 回１次）

この問題の正答率はたったの 1.0％でした（私もやられました！）．このときの受験者はおよそ 300 人くらいなので，この問題ができた人は全国でたったの３人ということになります．受験者数は後日

郵送されてくる成績票に得点の分布（ヒストグラム）が載っているので，そこからある程度は予測できます．

さて，この問題を解くにあたって，何となく円に内接する正七角形が出てくるだろうなということが予想できますが，過去，センター試験で円に内接する正五角形から cos36° の値を求めさせる問題が出題されましたので，これをヒントにすることができます（この他には $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ とおくと，$z^7=1, x=z+\bar{z}, \bar{z}=\frac{1}{z}$ なので，これをもとに x の３次方程式を作るといった解法も考えられます）．

（類題．６）

座標平面上の原点Oを中心とする半径 1 の円に内接する正五角形の頂点を順に P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 とする．ただし，P_0 の座標は $(1,0)$ である．この正五角形を用いて $\cos\frac{\pi}{5}$ の値を求めよう．

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_4}=\overrightarrow{OQ_1}$，$\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OQ_2}$ とするとき，点 Q_1, Q_2 は直線 OP_0 上にある．

したがって，$\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}=\overrightarrow{OQ}$ で定まる点 Q は直線 OP_0 上にある．

同様にして，点 Q は直線 OP_1 上にあることもわかる．したがって，点 Q の座標は（　　）である．ゆえに $a=\cos\frac{\pi}{5}, b=\cos\frac{2}{5}\pi$ とおくと，$1-($　$)a+($　$)b=0$ が成り立つ．さらに，余弦定理により，$P_0P_1{}^2=($　$)-($　$)b$ であり，また，$P_0P_1=P_2P_3=($　$)\sin\frac{\pi}{5}$ であるから，$($　$)a^2-($　$)a-($　$)=0$ が成り立つ．よって，$\cos\frac{\pi}{5}=($　　$)$ である．

（平成２年：センター試験，追試）