新学習指導要領における授業展開の一考察

～数列との単元間接続をめぐって～

北星学園大学附属高等学校
教諭　下郡　啓夫

1. 今回『数列』の授業展開に関して考慮にいれた学習指導要領の改訂内容について

A. 数学B『数列』

①漸化式：「解説」において、漸化式を具体的な事象に結び付けて、その有用性を理解させることを言及している。

②数学的帰納法：現行過程の「解説」には「初期条件が二つあるような技巧を必要とするものを避ける」という制限があったが，その制限を廃止。

B. 数学Ⅲ

①数列の極限を配置→数学B『数列』の既習を前提としている。

②漸化式と極限：新学習指導要領の「解説」において「$\sqrt{2}$ が漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$，$a_1=2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限であることを用いる」ことも考えられることを言及。

C. 数学A

①今回の改訂で新たな単元『整数の性質』を扱うことに。
内容としては　ア 約数と倍数　イ ユークリッドの互除法　ウ　整数の性質の活用　となっている。

今回の改訂で着目すべき点の１つとして，上記C.でも取り上げたとおり，数学Aにおける『整数の性質』の導入が挙げられるだろう。これまでの高校数学において整数は，数の拡張と類別，もしくは数学的帰納法などの各単元内容との絡みの中で確認する程度であり，整数そのものに関する諸性質はほとんど出てこなかった。高校生が触れていたとするなら，おそらく大学入試問題で「整数問題」という特化した形で見るか見ないかが大半であろう。ただそのことは群論等，大学数学の学びとの接続の１つの弊害になっていたのではないかと考えている。

その意味で，今回の数学Ａで単元として取り上げたことは，これからの数学的世界観を深めていく上で大切であると思うが，ただ整数を単元化することで“１つの閉じた数学的世界”として取り扱うだけでなく，そこで得た世界観がどう数学的思考に寄与しているのか，また，これまでの,もしくは今後の数学の学習内容とどう関連しているのか，そのこと自体も逆に問うているのが，今回の学習指導要領の改訂であるような気がしてならない。

そのような問題意識から，私自身はその２つの学びを高校数学の授業展開の中でどう接続できるのか，数学Ｂ『数列』という単元との接続を手がかりに１つの可能性を探ったものが本稿である。さらにその延長上で，『数列』の指導内容をどう豊かにできるのか思案してみた。まだ，構想段階であるため，うまくまとまっていないことは予めお詫びしておきたい。ただ，本稿が今後の高校数学の学習指導に少しでも寄与できれば幸いである。

2. 授業展開例１

【例題１】

数列 $\{a_n\}$ は初項 A，公比 α の等比数列，数列 $\{b_n\}$ は初項 B，公比 β の等比数列とする。(但し，$\alpha>\beta$ とする)

このとき，数列 $\{x_n\}$ は $x_n=a_n+b_n$ で表される数列であり，$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_4=2$ である。

(1) α，β を解とする２次方程式で，x^2 の係数が1であるものを求めよ。

(2)数列 $\{x_n\}$ を求めよ。

(3) $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\ (n=1,2,3\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

[解答]

(1) $x_n = a_n + b_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$．このとき，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 1$，$x_4 = 2$ であるから，

$$\begin{cases} x_1 = A + B = 0 & \cdots ① \\ x_2 = A\alpha + B\beta = 1 & \cdots ② \\ x_3 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1 & \cdots ③ \\ x_4 = A\alpha^3 + B\beta^3 = 2 & \cdots ④ \end{cases}$$

①より $B = -A$ だから，これを②，③，④に代入すると，

$$\begin{cases} A(\alpha - \beta) = 1 & \cdots ②' \\ A(\alpha^2 - \beta^2) = A(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1 & \cdots ③' \\ A(\alpha^3 - \beta^3) = A(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 2 & \cdots ④' \end{cases}$$

②'を③'，④'に代入すると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2 \Rightarrow 1 - 2\alpha\beta = 2 \therefore \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

これから，α，β を解とする２次方程式は，$x^2 - x - 1 = 0 \cdots (*)$ である。

(2) 2次方程式$(*)$を解くと，$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$．$\alpha > \beta$ より $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

これから $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ より①，②' より $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

以上から，$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(3)
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} = A(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &= A\{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\} \\ &= A\{(\alpha^n - \beta^n) + (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\} (\because \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1) \\ &= x_n + x_{n-1} \end{aligned}$$

【別解】α，β は，2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解だから

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \to \alpha^2 = \alpha + 1 \to \alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \quad \cdots ①$

$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \to \beta^2 = \beta + 1 \to \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n \quad \cdots ②$

①―②

$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + (\alpha^n - \beta^n) \to \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$

よって，$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

上記例題を通して，以下の展開が考えられる。

①これまでの漸化式から，具体的な数列 $\{a_n\}$ を求めさせる操作は，

[Ⅰ] $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d \to a_n = a + (n-1)d$ 【等差数列】

[Ⅱ] $a_1 = a, a_{n+1} = ra_n \to a_n = ar^{n-1}$ 【等比数列】

[Ⅲ] $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + f(n)(n \geq 2) \to a_1 = a, a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)(n \geq 2)$ 【階差数列】

[Ⅳ] $a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + q \to a_n = \left(a - \dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \dfrac{q}{1-p}$ 【隣接２項間の数列の漸化式における特性方程式の利用】

([V]　$a_1=S_1, a_n=S_n-S_{n-1}$ の利用)

といった漸化式の解法に限定されてきた。

(注意)上記に列挙した漸化式の内容[Ⅰ]～[Ⅳ]は,『数学B』(東京書籍)に準拠。
[V]は、漸化式の特殊形として提示

しかし,今回の例題を通して,

生徒の具体的操作から3項間漸化式と特性方程式の関係, 及び3項間漸化式の数列の一般形を体験させることが可能

である。

(注意)参考書等には3項間漸化式の解法も載っているが, 教科書の取り扱いは基本的に2項間漸化式までとなっている。

またその後, 3項間漸化式の特殊形として, 特性方程式が重解αを持つ場合は, $x_n=A\alpha^n+Bn\alpha^{n-1}\cdots$(＊＊)で表せることを紹介しても, 本例題(3)で証明を取り扱っているため, スムーズに移行できるであろう。

実際, 漸化式と特性方程式の関係は,

$$x_{n+2}-2\alpha x_{n+1}+\alpha^2 x_n=0 \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$$

であるから, (＊＊)式を左辺の漸化式に代入すると,

$$\left\{A\alpha^{n+2}+B(n+2)\alpha^{n+1}\right\}-2\alpha\left\{A\alpha^{n+1}+B(n+1)\alpha\right\}+\alpha^2\left(A\alpha^n+Bn\alpha^{n-1}\right)=0$$

となる。

② ①のように,これまでの数列の授業展開は漸化式から数列を具体的に求めることが主流であった。また, 大学入試対応でも,上述の[Ⅰ]～[V]以外にも

[Ⅵ] 連立漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n & \cdots① \\ y_{n+1}=cx_n+dy_n & \cdots② \end{cases} \quad (a,b,c,d \text{ は定数}, \ ad-bc\neq 0)$$

⇒①+②×t (t は定数)から, $x_{n+1}+ty_{n+1}=(a+ct)x_n+(b+dt)y_n$を作り, $1:t=(a+ct):(b+dt)$ となる t を出し, 等比数列に帰着

(注1)入試問題の場合, 行列として出されることもある

(注2)3項間漸化式に変形することも可能

[Ⅶ] 分数漸化式

$$a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d} \quad (a,b,c,d \text{ は定数}, \ ad-bc\neq 0)$$

⇒特性方程式 $t=\dfrac{at+b}{ct+d}$ を解いて,等比数列に帰着させたり, $b_n=\dfrac{1}{a_n-t}$ とおいて, 線形2項間漸化式に持ち込んだりする, などの手法が考えられる。

[Ⅷ] 置換による解法

代表的なのは,

例1) $a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}a_n}$ のパターン⇒　$b_n=\log a_n$ と置換

例2)

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ のパターン⇒与式の逆数をとり, $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ と置換

などであり, いずれも線形漸化式を解けばよい。

[Ⅸ] 数学的帰納法による推測

$n=1,2,3\cdots$と具体的に数値を代入し数列の形を推定, その数列を数学的帰納法によって証明する。

など, やはり数列の具体化に力点を置いている。

さらに, そのアプローチを重視するあまり, これまでは,

例)任意の自然数nに対して, $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ が常に整数となることを証明せよ。

など, 数列の具体化後も、抽象的論議へのアプローチ手段でしかなく, 数列の本質から外れることが多かったのではないだろうか。

そのような現在の数列の教育内容を俯瞰するとき，私自身は数列の本質を探る場合，

数列の具象化→漸化式による関係性の追求

という逆の指導の流れを大事にしていくべきではないかと考えている。

実際、その流れでいけば，上記例の証明は

$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ において，ア）$x_1=1, x_2=1$ は整数

イ）x_n, x_{n+1} を整数と仮定すると，漸化式より x_{n+2} も整数

だから，数学的帰納法より，任意の自然数 n で x_n は整数である。

で終わる。これまで，初期条件が１つの数学的帰納法しか経験してこなかった生徒への定着を意図した問題としては，指導しやすいものであり，数列及び数学的帰納法への抵抗感も少し和らぐのではないだろうか。

③漸化式$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ はそもそもフィボナッチ数列である。そのことから，

●具体的な数値代入により，個体繁殖や植物の成長などの自然界の状況を推察する道具としての授業展開

●フィボナッチ数列の隣り合う項の比の数列 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$の極限$b_\infty=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を導き，自然界の調和の比『黄金比』や『白銀比』の実例を紹介

●フィボナッチ数と数学Ａ：『整数の性質』での関連での考察を行う

・２つのフィボナッチ数の最大公約数は、フィボナッチ数である

・隣り合うフィボナッチ数は、互いに素である

・フィボナッチ数列の各項で割ったときの周期性　　etc

●フィボナッチ数列の関係から出される漸化式をさらに考察する。

・ $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots a_n{}^2=a_na_{n+1}$

・ $a_na_{n+2}-a_{n+1}{}^2=(-1)^{n+1}$　　etc

といった授業展開することで，より数学と自然の結びつき，漸化式の更なる考察を意識，数及び数の並びを身近に感じさせることができるだろう。

2. 授業展開例２

【例題 2】

漸化式$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$，$a_1=2$ で表される数列$\{a_n\}$の極限は$\sqrt{2}$ であることを示せ。

[解答]

$$a_n-\sqrt{2}=\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right)-\sqrt{2}=\frac{1}{2a_n}\left(a_n{}^2+2-2\sqrt{2}a_n\right)=\frac{1}{a_n}\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2$$

$$a_n+\sqrt{2}=\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right)+\sqrt{2}=\frac{1}{2a_n}\left(a_n{}^2+2+2\sqrt{2}a_n\right)=\frac{1}{a_n}\left(a_n+\sqrt{2}\right)^2$$

であるから，

$$\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{a_2-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}=\left(\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^2}$$

$$\frac{a_3-\sqrt{2}}{a_3+\sqrt{2}}=\left(\frac{a_2-\sqrt{2}}{a_2+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^3}$$

同様にして，

$$\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{a_{n-1}+\sqrt{2}}\right)^2=\cdots=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

ところが，$0 \le \left|\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=0$　　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

①この証明方法はとても興味深い。というのも，指数関数の連続性にも関連することだからである。
　現在，指数関数の連続性(特に無理数)に関しては，例えば $3^{\sqrt{2}}$ に対して，$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$　だから，有理数を指数とする 3の累乗の列を考えると

x	3^x
1	3
1.4	4.655536722
1.41	4.706965002
1.414	4.727695035
1.4142	4.72873393
1.41421	4.728785881

先表のようになり，次第に一定の値に近づいていくのでその値を $3^{\sqrt{2}}$ と定める，などのように説明されています。
※『数学II』(東京書籍)参照

しかし，上記証明によって

漸化式 $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対して，3^{a_n} の極限値は存在し，その極限値を“無理数 $\sqrt{2}$ を指数とする累乗 $3^{\sqrt{2}}$”

として定義できる。

一般に，

a，A を正数とするとき，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{A}{a_n}\right)$，$a_1=a$ で表される数列 $\{a_n\}$ の極限は $\sqrt{A}$ である。

※証明は例題と同じなので割愛

が言えるので，この漸化式を満たす有理数数列の存在が意識化され，

任意の無理数 α，β の近似有理数数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ が作れる ⇒ $a^{\alpha_n}a^{\beta_n}=a^{\alpha_n+\beta_n}$，$\left(a^{\alpha_n}\right)^{\beta_n}=a^{\alpha_n\beta_n}$，$(ab)^{\alpha_n}=a^{\alpha_n}b^{\alpha_n}$ が任意の自然数 n で成立

⇒ 実数で指数法則が成立する

というような関数の連続性へと拡張することができるだろう。
(参考)新学習指導要領の数学A で『整数の性質』を扱うため，発展学習として実数の連続性の証明の流れで，指数関数の連続性を示すことが可能(その証明も，数学Aとの単元連接を意識して，数列の授業で取り扱うこともできるだろう)。
ただその場合，数学 A の単元内容では、整数論の基本定理までが限界であり，アルキメデスの定理，上界・下界，デデキントの定理，稠密性など実数の連続性をめぐる周辺の知識は，随時補強していく必要がある。

補足として高校数学では，無理数の存在として，円周率 π の存在が挙げられている。
この円周率に関して，収束性を数列との絡みで考えていく場合，
a)2003 年東京大学(後期)理系第 6 問

円周率 π が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

や

b)2003年大阪大学(前期)理系第4問

> πを円周率とする。次の積分について考える。
>
> $I_0=\pi\int_0^1 \sin \pi t dt$，$I_n=\dfrac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin \pi t dt(n=1,2,\cdots)$
>
> (1) nが自然数であるとき，不等式$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}<e^x(x>0)$が成立することを数学的帰納法により示せ。
>
> これを用いて，不等式$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots u^nI_n<\pi e^{\pi u}(u>0)$が成立することを示せ。
>
> (2) I_0，I_1の値を求めよ。また，漸化式$I_{n+1}=\dfrac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}(n=1,2\cdots)$が成立することを示せ。
>
> (3) πが無理数であることを背理法により証明しよう。πが無理数でないとし，正の整数p，qによって$\pi=\dfrac{p}{q}$
>
> として表されると仮定する。$A_0=I_0$，$A_n=p^nI_n$とおくとき，$A_0,A_1,A_2,\cdots$は正の整数となることを示せ。
>
> さらに，これから矛盾を導け。

などの大学入試問題の利用が考えられるだろう。

a)については，さまざまな解法(正多角形から余弦定理・加法定理に帰着した解放や安田亨氏による各辺が3・4・5というピタゴラス数で表される直角三角形を用いた解法など)やオイラーの考え方を紹介した京都大学教授上野健爾氏の数学セミナー('93.4・5月号)への連載寄稿「円周率πをめぐって」などをしながら，数学的思考の世界を広げていきたいところである。

また，円周率πが半径$\dfrac{1}{2}$のときの円の円周と等しいことから，その円に内接する正k角形の周の長さと外接する正k角形の周の長さを数列として表し，その数列の収束性を数値計算によって具体的に示していくなどの授業展開がありえる。

b)については，マクローリン展開の応用だが，これは数列・微分積分の諸性質をふんだんに扱う良問である。ただ，今回この問題を導出したのは，そのような諸性質を扱うためだけではない。

円周率に関しては，鎖国下の日本において和算家建部賢弘が導き出しているが，その考え方の基本はテイラー級数である。そのような数学史への誘いを考えてみても，この入試問題でさまざまな授業展開が可能なのである。

②また，数学Ⅲにおける上記【例題2】のような漸化式の紹介が可能であれば，

【例題3】

> $f(x)=x^2-2$の正の解$x=\sqrt{2}$の近似値を求めよ。

という問題への応用も可能である。

そもそも，学習指導要領の漸化式の例$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$，$a_1=2$はNewton法による解の近似値算出に依拠しているものである。

実際，$f(x)=x^2-2$とおくと，$f'(x)=2x$なので，Newton法を適用すると，

$$x_{n+1}=x_n-\frac{{x_n}^2-2}{2x_n}\Rightarrow x_{n+1}=\frac{x_n}{2}-\frac{1}{x_n}$$

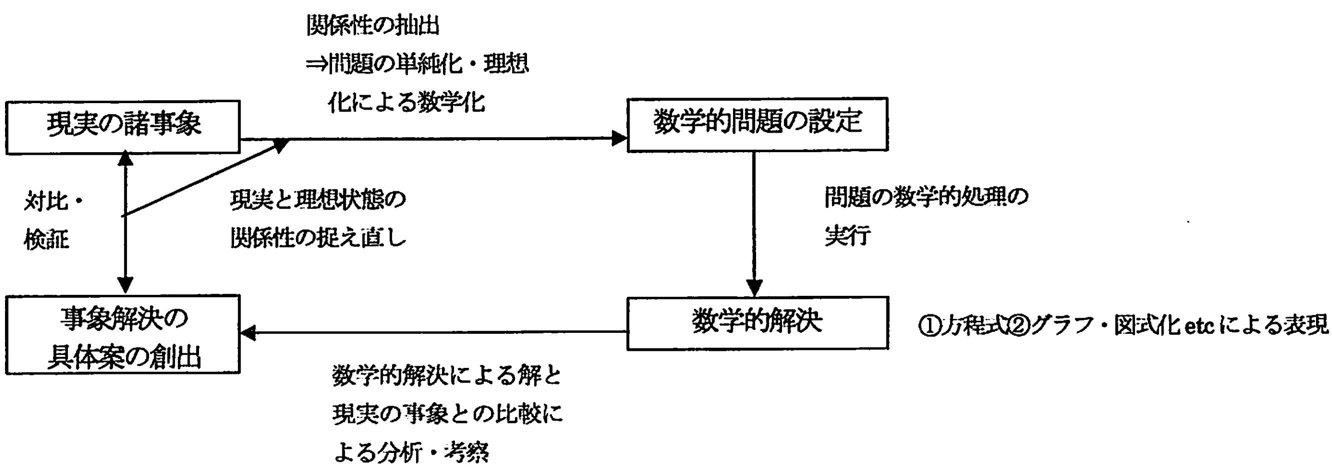
となる。

このように，漸化式の発展学習として(さらに，コンピュータによる数値計算の導入部分として)，Newton法による解近似へと連接させてもよいだろう。特に数値計算への接続は，ユーグリッドの互除法などのコンピュータ計算へのつながりもでき，コンピュータを使った整数の性質の探究プログラムへの移行と可能性は広がるものである。

また，今回の改訂で複雑系へのアプローチへの広がりが持てた分，自然現象はもとより，経済・社会状況の解析など，より事象を数学的に解析する視野が広がるチャンスがあるように思われる。実際，社会現象を捉える場合、離散時間的に変化する場合が多いからである。また，学習指導要領内の単元との接続を考えれば，中学との学びの接続を意識し設置された数学Ⅰの単元『データの分析』によって離散グラフの本質の表現手段として用いる場面もあり得るだろう。(残念なのは，数理的考察の手法として活用場面の多い行列の数学的諸概念を本格的に学ぶ場面がなくなったことである。実際，数列との接続だけでも,漸化式の処理方法の類似点は多いし，その他の単元に関しても，次数下げや図形との関連など関連事項が多く，その意味で高校数学のスパイラル学習の体系化への不備の1つとして指摘できるであろう。また，現代数学との関係性においても，両者の応用場面の1つであるマルコフ連鎖や線形力学系の解法などの学習機会を失うことを考えれば，今改訂の1つの視座「社会生活における数理的考察」の学びが薄まることにつながるのではないだろうか。ただ『数学活用』でそのような考察がどれだけ扱われるのかにもよるだろうが，解説からはなかなかそこまでの内容は伺えない。その他，高校数学における統計の特殊性などいろいろと言及することはあるが，ただこのような改訂の問題点に関する指摘は今回の狙いではないので，学習指導要領に関わる私見はここまでにとどめておきたい)

しかしその場合，離散時間の差分方程式などの数学的手法と単純に捉えるのではなく，現実の事象との比較によって，数学的モデルの構成要素の精選，数式変形と事象との関係性・意味づけなどにしっかりと注意を払うことは当然である。

実際，現実の事象から数学的モデルを作る場合，目的から条件・仮定の①設定⇒②単純化・理想化⇒③数式による抽象化・構造化という手順を踏んでいくが，その過程は問題解決者の関心に応じて問題と数学的問題との関係性が明確にされる必要がある。その場合，現実の事象を問題解決者がどう数学的に翻訳し，モデル分析・考察を経て結論を得たのか，その道筋を見せるのはもちろんだが，なぜその数学的モデルの構成要素が現実事象の解析においてそこまで精選できるのか，など設定から細心の注意を払う必要があろう。
そのことによって，始めて事象⇒数学的モデルの分析のループ(次図)が成立するのである。



3. まとめ

本来，『数列』は，世代間の方程式として漸化式を構成，分析することに面白さがあり，そのことによって自然・社会現象の構成要素の関係性が具体化されることで数理的アプローチの意味性が見せられるようになるものであろう。だからこそ，これまで数列の具体化の解法ばかりに着目してきていた高校数学の授業内容をこの改訂を気に見直すべきではないだろうか。実際，数列の具体化によって見えてくるものは，極言すれば高校数学の世界ではせいぜい収束・発散の関係だけである。しかもそれが有効なのは，微分方程式の解析においてである。

ただこのことは『数列』だけでなく，全ての単元において言えることではないだろうか。今，高校数学は式の抽象化に力点を置くよりもむしろ数式の簡便性からいかにその数式の本質を読み取る力をつけていくのかということに努力を向けていくべきだと考える。実際，現在の数理的解析も数式の見方やグラフ・図の操作に力点が移行している。

例えば，数理生態学における有名なロジスティック方程式

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right) \qquad \cdots①$$

$x(t)$：時間 t における集団サイズ，r：内的自然増加率，K ：環境収容力

を考えてみても，この微分方程式①を解けば，

$$x(t)=\frac{K}{1+\frac{K}{x(0)-1}e^{-rt}} \qquad \cdots②$$

であるから，式の具体化から見えてくるものは,せいぜい $t\to\infty$ のとき，$x(t)\to K$ だけである。

確かに具体化した②をそのグラフを描くことで，生物の個体数増加が示すＳ字曲線となることで，より自然現象に近いことは分かるが，具体化しないでも，①から

$x(t)$ は K よりも小さいと増殖 $\left(\because \frac{dx}{dt}>0\right)$，$K$ よりも大きいと減少 $\left(\because \frac{dx}{dt}<0\right)$

ということは分かるので，平衡点 $x(t)=K$ の解の安定性はすぐに分かる。そして，そのような式の見方から，環境収容力 K の生物学的意味，すなわち生物はその環境内における餌や営巣場所の限界から成長・繁殖のための条件が悪くなること，さらに集団サイズの拡大が病気の繁殖にも影響するので，ある程度の集団サイズで止まる定常期があることが理解できるはずである。

実際，上記のような平衡状態とその安定性の考え方は，実際力学系の定性的解析の１つであるアイソクライン法として応用されているものであり，それは系の状態をグラフ化するのではなく，$\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ の符号変化に着目して視覚化するものである。

したがって，繰り返しになるが，これからは問題の要素抽出からいかにその関係性を読み取り，これまでの数学的経験と照合しつつ数式化，解を導くかという解法中心の指導から１つ１つの式の本質をどう読み取っていくのか，というものの見方に力点をおいた数学指導の方向性が求められていると考える。