数学の一斉授業検証のための一考察

北星学園大学附属高等学校　数学教諭　下郡啓夫

現在の高校数学の教育内容は、元来中学校で学んできた平面図形や統計基礎、方程式や不等式の概念などが完全に移行し、肥大化したにもかかわらず、限られた配当時間の中で教え込まなければならない。この数学カリキュラムの編成は、小中のゆとり教育の保障と"最低基準"である算数・数学の学習内容の定着、さらにその延長上に、遅熟生徒層を生み出さないという政策があるだろう。しかし、そのような初等教育の教育内容の弾力化が、中等教育とそれに続く高等教育での専門知の学習に弊害をもたらせている。また、数学的基礎・基本の未定着は、経済学部における入試科目としての数学削減など、生徒確保のための入試戦略によってますます進んでおり、その結果、学年制による縦断的カリキュラムと教育内容のスパイラルという数学教育の二重構造を完全に崩壊させたと言わざるを得ない。

その一方で、最近では習熟度別授業やティーム・ティーチングなど、いかに集団の中の個への対応に焦点をあてた授業形態も開発、研究がされてきている。また、その評価法についても観点別評価など、生徒の学習過程をいかに評価できるか、というシステムを構築し始めている。(ただ、この点に関して、私自身は新学力観の導入が生徒の数学的基礎学力定着の弊害になっているという私見をもっているが、そのこと自体これからの考察に関係するものではないので、ここでは省略する。)

確かに生徒の努力過程を評価することは、その評価になれた中学生を迎える高校で、ヒデュン・カリキュラムの維持装置の一端を担う方策として導入せざるを得ないのが現状である。とはいえ、そのような要素は元来、一斉授業における教科担当のモニタリングと、それによる生徒の個別の学力向上の分析の延長上にあったはずである。とすれば、受験圧力の低下とそれに伴う学習動機の損失から学力低下が見られる昨今で、現在の教育内容を見直す場合、今も維持されている教室という学習空間での、一人の教師と多数の生徒の対話を通した、知識獲得の一形態しての一斉授業の総括が必要不可欠であろう。そしてその総括がないために、一斉授業に関しては『一斉授業＝詰め込み偏向』という図式だけが形骸化して残っていると思わざるを得ない。

私自身は、一斉授業と言ってもさまざまな側面があり、一概に知識の詰め込みの効率を図るためだけのものではないと考えている。そこで、一斉授業を通して、どう数学の知識の共有化が図られるのかを今回整理し、その中で何がキーポイントとなるのかを考えてみたい。それが今後の学校教育検証の１つの視点となることを願ってやまない。

１．はじめに

本校の一斉授業は、35 名平均の生徒と一人の教師がひとつの教室に会し展開されている。その授業展開の構成はおおまかに、

① 前回の復習とその連続として、新たな学習課題を導入
② これまでの数学的知識を活かした数学的推考と具体的展開、問題から抽出された要素の総合・一般化
③ ②によって得られた公理・公式とその活用の練習、応用による定着化
④ 次回の授業の見通し

というような流れであり、これは数学の授業ではスタンダードなものであろう。この学びの時系列は、数学教師がいかに教える数学的知識を洗練化し、効率よく教え込んでいくのか、という視点を重要視しているとも言えよう。

しかし、大学教育が現在、教官学生間の双方向のコミュニケーションによる集団知の創造、言い換えれば既成知識の情報を共有しながら、新たな形式知を創造していくスタンスを大事にするようになっている。さらにその流れは今の（高校）数学教育でも見られ、いかに数学的概念、考え方を共有し、生徒の自発的発見へとつなげるかという課題意識にもつながってきている。

それはただ単に生徒の理解・定着を図る上でソクラテス的対話（産婆法）が必要であるという基本的な教授法の視座を確認しているだけではない。共通言語での会話によって、ほんとに生徒が教授内容の本質をつかんだのかどうかという判断材料のひとつになりうるであろう。そしてそのことがなければ、数学的知見を曖昧な使用法で使用している場合の軌道修正はもちろん、彼らなりの解釈・理解を読み取り、それをいかした指導していくこと、つまり一つの「個」に応じた指導が創出される契機となりうるはずだ。

２．一斉授業での教師像

現在、一斉授業で数学教師はファシリテーターとしてどのように立ち回りをしているのだろうか。

まず考えられるのが、学習集団内での数学的絶対的権威として、生徒に断片化された数学的知識を押し付ける場面ではないだろうか。つまり総合学習のように、生徒が自発的自律的に問題設定し、その解決過程を通して、「生きる力」の構成要素を発見・獲得していく方向とは全く逆の、学習主体の自由度をほぼ完全に奪い、教師主導で知の獲得の道筋を規定された中で、その隠れた道筋を読み取りながら学習し、そこで獲得した数学的知識をまず定着を図る、いわば学校規範性に支えられた教育カリキュラムの統制による訓練の場であろう。

この方略は、確かに無知な生徒に数学的世界を見る上でのいくひとつの観点、方向付けを行う上では必要であろう。実際、単元学習が既習事項を前提に展開にしているため、その連関を知る数学教師がそのつながりと数学的世界観を見せていく必要があるからである。またそれは他単元との連関を示す、誘導の機会を創出ことでもある。

しかし、そのことは、統制された教育カリキュラムに適応できない遅熟生徒を大量生産していることも事実である。実際、先ほど触れた単元内の連関から、その単元での一つの数学的知識が欠落すると、それ以降の知識獲得が困難となる。だから、数学教師は一回の授業でどれだけの定着率が図れるかが他教科以上に問われる。

ただ、その教師の緊張感だけでは乗り越えら得ない壁が実在するのも事実であろう。それは、授業内での知の授受は生徒の主体的経験があって初めて定着するということである。つまり、脳内思考の補完としての、生徒の演習時間の保障と机間巡視による個の理解状況に即した個別教授が必要不可欠なのだ。そこでは、生徒の思考法にあわせて教師がその思考段階までおりて説明するだけでなく、間違った思考法の訂正や、新たな数学的世界への促しを図る上での、生徒の思考の独断性の制御が求められている。つまり学習空間で、教師－生徒間での一種の駆け引き、交渉が生まれているのだ。そして、一斉授業では教師の優位性の維持のために、問題の設定や発問のコントロールが展開されているのだろう。

このように一斉授業における教師の役割は、一見、数学的知識の訓練だけではなく、その中で駆け引き・交渉があり、その２点が有機的に機能してはじめて教育的効果が上げられると考えられる。どちらも相手との知識の共有化を図る手段であることには間違いないが、教師と子どもの数学的知識のずれをどう解消するのか、その探求した１つの答えがこの一斉授業における２つの教師の役割ともいえるのではなかろうか。

２．共有化を図るプロセス

次に、教師‐生徒間の数学的知識の共有化をもう少し詳細に考察してみたい。

一斉授業を(知識の)共有という部分に力点を置いて鳥瞰してみると、日常的にある特定の言葉が数学教師の口から発せられていることに気づく。それは「ここまでは分かったと思うので次に進もう」などといった、共有の確認を意図する言葉である。つまり数学授業は、数学的知識の共有化を図る上で、確認作業を連続して行うことで成立しているのだ。具体的には、数学的性質（定義・定理）だけでなく、例題を通した問題解決の方略（解法の定式化）など、その獲得していた知識との関連付けを教師も生徒も行っているということであろう。

しかし、ここで一度立ち止まって考察すべきは、生徒は教師の意図した数学的解釈とは違う、活動・経験を通した理解方法を持っている可能性があるということである。
例えば、私の授業で、下記のような条件式の取り扱いを指導する場面で次のようなことがあった。

(問題)

$x=\frac{4}{7}z\cdots①,\ y=\frac{3}{7}z\cdots②$ のとき、x と y の関係を求めよ。

(注)実際には z に当たるものは、ベクトルの線形式であったが、ここでは簡単のため z と一つの文字にしておく。

実際の数学的解法は、数学Ⅱ『図形と方程式』の軌跡問題の基本的処理方法、つまり

①から $z=\frac{7}{4}x\cdots③$

③を②に代入して $y=\frac{3}{7}\left(\frac{7}{4}x\right)=\frac{3}{4}x\cdots$(答)

と、簡単に求まる。この解法は、連立方程式の代入法としても紹介されるものだが、実際に私の授業では、この解法が理解できない生徒がいた。そしてその当該生徒は、次のような解法で問題解決をするに至った。

$x:y=\frac{4}{7}z:\frac{3}{7}z=4:3$ だから，「内項の積＝外項の積」より $3x=4y\cdots$(答)

この生徒は、連立方程式では、代入法の汎用性が加減法よりも劣ると過去に判断した結果、加減法だけを習得していたことがその後分かった。つまりこの生徒は、自分の数学的世界を大切に、教師による統制を嫌ったため、数学的知識が完全に断片的となってしまったのだ。だから、彼の数学の問題解決は、常に自分の頭にあるもの以外ではなされることなく、その後も偏った知識による創意工夫で行っている。実際、平方完成なども独特で面白い思考をするのだが、ここでは論理的に説明するのが難しい(つまり、彼の独特な数式理解と、一般性のない計算理論がそこに介在するため、この紙面では説明しづらい)ため、今回は割愛させていただく。

少々長くなったが、このように生徒はこれまでの数学的活動の中で、彼らなりの世界観、いや独自の数学的文化といえるものを生み出しており、それも前提にした上で教師は共有化を図らなければならないのだ。このことは数学に限らず、さまざまな生活経験から生まれる経験知、暗黙知の獲得場面でも同じことがいえるだろう。
よって、数学の一斉授業における共有は、定式化された数学的知識と既習事項との関連付けだけでなく、生徒のこれまでの（数学的）活動を通した独自の文化との接触・融合なくして成立しないのだ。
その事実をもう少し、私の実際の授業の様子から見てみたい。

(実践例：数学Ⅱ『複素数と方程式』より)

生徒A：2 次方程式の解を求めたとき、$\sqrt{\ }$ の中がマイナスだから、実数では解は存在しないね。

教　師：数学Ⅰの『2 次関数』のときでは、実数の世界しかみんな知らなかったけど、今回の単元

で複素数を習ったでしょう。そのとき, 虚数単位i を習ったから, そのことを使うと$\sqrt{\ }$ の中がマイナスの場合でも、その虚数単位i で表せるよね。

生徒Ｂ：そっか、つまりこの２次方程式は、二つの複素数の解としては存在するってことだね。

教　師：うん、つまりルートの中の計算は判別式と言われるものだったけれど、それがマイナスなら２つの複素数の解、複素数の解は虚数解というんだったけど、その虚数解を持つということが言えるんだね。

生徒Ａ：ふーん、確かに判別式がマイナスなら前は解なしって習っていたかな。でもそのとき実数は確か数直線で表される数とも言っていたっけ。だったら、複素数の解の存在を認めるなら、それは図でどこを表してるの？

生徒Ｂ：そういえば、以前科学雑誌『Newton』だったかな…忘れたけど、確か電気の勉強するときにこの虚数単位を見たことがあるよ。電気は世の中にあるものだから, 複素数は僕たちの目には見えないけど、自然界のどっかにあるんじゃないかな？

ここで教師にとって共有したいことは、「判別式がマイナスであれば２つの虚数解が存在する」という数学的事実である。この共有を支える定式化された数学的知識は「解の判別式の２次方程式の関係」、また既習事項として「虚数単位」の知識が上げられるであろう。ただこの授業展開では、規定された数学的世界から生徒の興味・関心によって物理・自然界の学習という新たなステージへと発展したケースである。

この２番目の実践例で言いたいのは、確かに数学の授業は、先述した定式化された数学的知識と既習事項との関連付けと、生徒の数学的文化との接触・融合からなされるのだが、そこで獲得される知の創出・獲得活動の中では、一概に予定調和した結果となるとは限らないということである。すなわち、共有という鍵概念で一斉授業を考察するとき、個々の生徒の世界観に依拠した学習まではカバーしきれないということである。

その点を考慮したとき実際の授業でも、いろいろな様相がモニタリングできる。例えば、机間巡視における教師の個別対応、生徒どうしで対話を通して獲得する場面は、共有という鍵概念を念頭にした一斉授業の定型化を想定するからは外れることになるだろう。つまり、常に授業者－生徒の指導－被指導を前提として一斉授業の鍵概念を抽出、その視点を中心に授業を分析しても、断片的にしか見れないのだ。そして、分析を構造化する上で(Ⅰ)１対多はもちろん、(Ⅱ)1 対１(教師－個別生徒もしくは生徒－生徒の学習形態、つまり個別指導や操作作業内での対話による定着など)の視点を取り入れつつ、どう授業空間が有機的に機能しているのか、見ていく必要あるだろう。但し、そのように判別したとしても、教室での知の獲得・定着活動には、学校・学級文化が大いに作用する。さらにその場合、各学校行事などによって醸成された学校知とそれに伴う教育活動、それに支えられた社会規範性にも踏み込まざるを得ない。

今述べたことは、各科目問わず一般性のあるものである。数学に限定した場合、生徒の数学的認知活動を細かく見つつ、その上でどう一斉授業がアプローチできるのかを考える必要がある。また、高校数学でいえば、小中学時代の既習事項の定着度をどこまで踏まえるか、計算能力はどこまであるのか、そしてその上でどこまで数式の行間を把握し、典型問題を理解できているのかという問題がある。さらに一斉授業でどこまでの内容・難易度のものに触れるかによっては、解法の典型パターンをどこまで体系化しているのか、その体系化された知識を使って、どこまで問題の要素抽出、関係性を把握、数式化できるか、などに認知心理学的諸問題が介在するだろう。

とはいえ、一斉授業を分析する上で、やはりその分析の切り口がなければ、PDCA サイクルの俎上にのせることもできない。今後私自身は、数学的意味を獲得する上で、数学固有のものを抽出し、他教科との差異化をどう図るかに限定して一斉授業を考察してみたい。現在は、その１つの視点として数学的探究活動に着目している。その中には、数学的操作活動や数学的なものの見方、考え方、また、

データ処理や問題処理の道具としての、解法の典型パターンの学習などを含みます。
　ただ、次回の学習指導要領改訂では、理数教育に力を入れ、教員数も増加させるという、数学としてはありがたい変化が生まれる。しかし、授業形態はもちろん、縦断的カリキュラムの再編成の中身を見ても、どうスパイラル学習を保障しているのかのかも見えない。(寧ろ、前学習指導要領への批判を部分修正したものの、問題をさらに肥大化させただけ、というのが私なりの結論だが、それについてはいずれかの機会で言及したい)その結果、生徒の知的発達段階とカリキュラム内容との非合理性が生まれると見ているが、その変化も数学独自の一斉授業の考察には必要であろう。
　そう考えればこの考察問題は簡単にはいかないかもしれない。実際、できないからこそ、今の研究の主流が活動の一般化よりも個別化、各教師の個性と生徒の集団心理の化学反応として、各授業の様子をモニタリングして課題を抽出する臨床教育学的アプローチとなっているのだろう。今回の拙文では、この問題を分析しきれなかったが、教師―生徒間、生徒－生徒間の数学的コミュニケーションとして、組織心理学的アプローチを試みるなど、なんらかの糸口を見出してみたいと思う。