～ GeoGebra を活用した空間ベクトル課題　北海道本別高等学校　　阿部　彰

はじめに

定期考査で全体の 1 割程度、必ず思考を問う問題を盛り込むように心がけています。今回は 2 年選択数学 B における空間ベクトルの分野。数実研の過去のレポートで知った Geogebra を、思考問題に取り入れることはできないだろうかと思い、課題を作成してみました。本校の ICT 環境と、生徒の携帯を活用した実践です。

1　導入

1.1　授業について

【教科】　数学 B（2 年選択授業）

【生徒】　23 人

【内容】　空間ベクトル

1.2　ICT 環境

【教員】　iPad,AppleTV(私物)

【学校】　iPad10 台, pocketWiFi 4 台 (1 台 8 接続)
　プロジェクタ, スクリーンは使用教室に常設。

【生徒】　携帯端末（iPhone 18 人,android 5 人）

【事前】　今までの取り組み

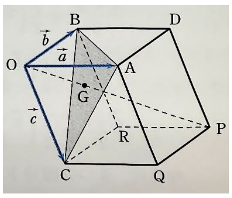
1. 4~5 人グループで ipad 1 台配布。GeoGebra の基本的な使い方はスクリーンで説明しながら 1 時間演習。
   先生機 ipad は、appleTV でスクリーン投影。iPad への GeoGebra ファイル配布は、airdrop 利用
2. 生徒の携帯に GeoGebra スイートと GeoGebra 空間図形をインストール (pocket WiFi 利用)
3. 生徒携帯への GeoGebra ファイル配布は、LINE 利用。
4. ベクトルの授業の多くは GeoGebra を活用した課題学習型の授業でした。

2　問題

O を原点、A(6,0,0) , B(0,6,0), C(0,0,6) としたとき △ABC,△OAB,△OAC,△OBC の 4 平面全てに接する球面の方程式を求めよ。

▶ きっかけになった教科書例題

G は △ ABC の重心、点 O,G,C が一直線上になることを示す問題。球面の方程式の授業中に、今回の課題が思い浮かびました。



3　解答例

3.1　半径を求める

▶ 真っ先に思いつく解答でしょうか・・・

四面体 OABC の面積を |OABC|,
三角形 ABC の面積を |ABC| と表記する。
球面の半径を r とすると、

$$|\mathrm{OABC}| = \frac{1}{3}r(|\mathrm{OAB}|+|\mathrm{OAC}|+|\mathrm{OBC}|+|\mathrm{ABC}|)$$

$$\frac{1}{3}\cdot 6\cdot|\mathrm{OAB}| = \frac{1}{3}r(3\cdot|\mathrm{OAB}| +|\mathrm{ABC}|)$$

$$\frac{1}{3}\cdot 18\cdot 6 = \frac{1}{3}r\left\{3\cdot 18 + \frac{1}{2}(6\sqrt{2})^2\sin 60^\circ\right\}$$

これを解いて、$r = 3-\sqrt{3}$
と求まりますが、このあと中心 P の座標は？？？

3.2　中心の座標を求める（結果、半径も求まる）

△ ABC の重心を G とすると,

$$\overrightarrow{OG} = (2,2,2)$$

△ABC が正三角形、かつ |OA| = |OB| = |OC| より、
原点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線の足は点 G となる。(★)
求める球面の中心を P とする。P は線分 OG 上にあるので

$$\overrightarrow{OP} = (t,t,t)\quad [\ 0 < t < 2\ ]$$

とおける。
点 P から △OAB に下ろした垂線の足を H とすると、H$(t,t,0)$

$$|\overrightarrow{PG}| = |\overrightarrow{PH}|\qquad (★★)$$

$$3(t-2)^2 = t^2$$

$0 < t < 2$ より、$t = 3-\sqrt{3}$

よって求める球の方程式は、

$(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2 = t^2$

$(x-3+\sqrt{3})^2+(y-3+\sqrt{3})^2+(z-3+\sqrt{3})^2 = 12-6\sqrt{3}$

(終)

4　課題の実際

4.1　課題の配布

▶ 冒頭の問いのようにシンプルにしたかったのですが、ちょっと厳しいと判断したことと、位置ベクトルの要素を入れたかったので、下記のように (1) ～ (4) で誘導することにしました。
後日実施した単元テストに同様の問題を出題しました。

O を原点とし、A(6,0,0) , B(0,6,0), C(0,0,6) とする。
△ABC,△OAB,△OAC,△OBC の 4 平面全てに接する球を考える。
(1) △ ABC の重心を G とするとき、$\overrightarrow{OG}$ を成分で表せ。
(2) 球の中心 P の x 座標を t とする。
$\overrightarrow{OP}$ を t を用いて成分で表せ。
(3) (2) の P のとき、P から xy 平面に下ろした垂線の足を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を t を用いて成分で表せ。
(4) t の値を求めよ。
(5) 球の方程式を求めよ。

4.2　Geogebra ファイルの配布

1. 3.2 の解答をもとに、まずは完成図を作成。
$\sqrt{\quad}$ の値は、小数第 5 位くらいのデータで近似させて、なるべく近い値を作って図を作成。

2. 生徒全員の携帯に、GeoGebra ファイルを配布。
「図形をあらゆる角度から見てみることと、アプリ内の図と数式の座標等を見て、どのように作成したのかを逆算して考えて、球の中心の座標と半径を考えよう」

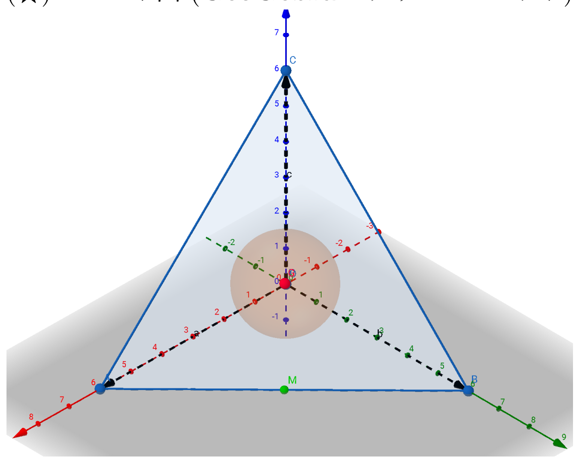
▶GeoGebra による図形の書き方は全員理解。できた図形と入力された数式の関連もほぼ理解しています。
(結構な時間、アプリをいじらせてます)
▶ 解答 →GeoGebra で確認というのが、よくある進め方かと思いますが、２年生の現時点の思考力では、解答作成は厳しいと判断して上記のように進めました。

5　終わりに

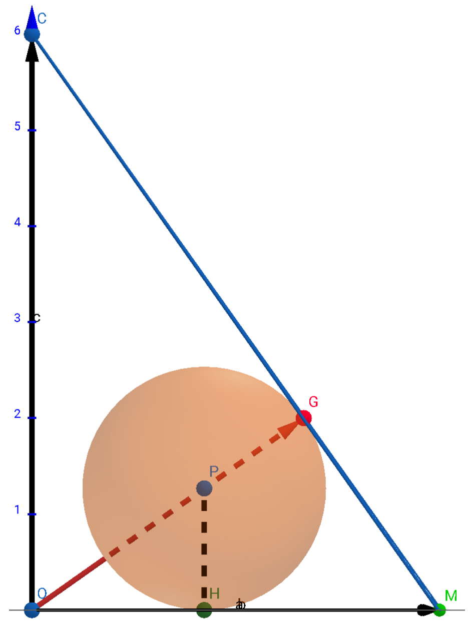
空間ベクトルの分野は、多くの時間、**GeoGebra** を利用して授業を進めてきました。解答 → アプリで確かめという流れではなく、例題のアプローチを少し変えて、アプリで実際に図を作成したり、できた図形を自由に動かしたりする中で、解答のヒントが得られるような工夫をしてきました。
現２年は、ベースの知識はしっかりしています。その知識の使い方（応用力）が不足しています。課題学習型の授業で少しでも引き出せればと思います。

【資料】

(★) のヒント図 (**GeoGebra** スクリーンショット)



(★★) のヒント図 (**GeoGebra** スクリーンショット)



【助言ください・・・】

1. (★) が、本当に言えるのかどうか。
(持っていきかたが飛躍しすぎているような気がします)
2. (★) を理由に、球の中心 P は線分 OG 上にあるということが言えるかどうか。（これも上記同様）
この考えで、作図したので、結果的には言えるということでしょうが・・・
後日、メーリングリストか何かで、ご教授いただけると、とても嬉しいです。